

古典電磁気学の一限界領域をめぐって

[磁場の概念と特殊な unipolar machine の解釈]

東大理 飯 田 修 一
理学士 藤 川 頼 彦^{*}

(8 月 9 日 受 理)

§ 1 序

Maxwell の電磁基礎方程式によって代表される古典電磁気学は大学教養課程理科方面の必須課目として、多くの人達はよく判った心算でいるものである。併し乍らその方程式の包含する物理的内容は必ずしもそれ程単純ではなく、特に物質との相互作用の解釈に当っては相当の慎重な考慮が必要であり、むしろそういった限界領域に関しては、普通の人達は殆んど理解していないと言ってよい。これは相当大胆な放言であり、これを聞いて多少心外に思われる読者も多いかと思われるが、事実である。筆者の一人は先に、CGS単位系とMKSA単位系の変換と、それに相関した物理的事実の理解に関して存在している混乱と誤謬の問題点に関して一文を記したが、^{1), 2)}ここに指摘しようと思う問題はこれらの問題と密接に関係し、しかもその結果が古典的に検証されるという点において興味あるものである。

§ 2 Unipolar Induction について

中心問題に入る前の練習問題として、Unipolar Induction の紹介を行なう。第一図にその一例が示されている。

図においてAは永久磁石で、Bは銅の円筒形キャップであり、いずれも中心軸 z の回りに円柱対称である。

*) 品川燃料技術顧問。藤川が本文の課題に関し、永い間考察を加えていたという事情と、これに刺激されて飯田がこの問題の存在に留意し、その解釈に助力したという事実が本論文を異例の共著とした理由である。

CはBに接触するブラシP, Qを持つ銅線で, Gはそれに連結されている微小電流計である。CとGは一体となってz軸の回りを回転できるものとする。問題はA, B, Cが各々独立に静止もしくは回転するとすると, どの場合にGに電流が現われるかということである。(但し回転の際に各角速度は同一とする。) そうするとA, B, Cが各々静止か回転かで, $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りの異なる場合がある。即ち

A	B	C	結 果
×	×	×	×
×	×	○	
×	○	×	
×	○	○	
○	×	×	
○	×	○	
○	○	×	
○	○	○	

である。但しA, B, Cに対しては×は静止を, ○は回転を示し, 結果に対して×は電流指示なし, ○は電流が流れる場合とする。問題は甚だ簡単であり, 電磁気学がよく判っていると考えていられる諸氏は正しい解答が出来ないと困ると思われるに違いない。実際そうであると筆者も考えたい。試しに答えてもらおうと即座では十人中十人迄ほとんど間違ふ。これは内外の物理学者仲間で筆者の一人が試みた経験の結果であって, 正しい答えを出した人は例外中の例外であったことから間違いない。勿論慎重に相対論や電磁気学の本などをひもといて考究すれば別である。

その意味ではこの問題は既に well known でありミステリーは何もない。答えは次の頁に出してあるから, 読者諸氏の答えと比較していただきたい。満点を取られたならその人は電磁気学に関して特別に authorize されるであろう。

結果の解釈は甚だ簡単であって, BとCが相対的に動いている限り電流が観測される。これはこの場合磁場 $\mathbf{H}$ はその発生源の運動と無関係に存在し, 観測

系の真空空間そのものに固着していると見なして差支えないという電磁気学の基本原理の結果である。真空中において $\mathbf{H}$ は空間の性質であって、物質的には考えてはならないのであって、動いている磁場というのは無意味なのである。

定量的計算は勿論相対論によらねばならない。今から便宜上非有理 C G S 対称単位系を使おう。さて S と S' 系を考え、 S' 系が S に対し速度 $\mathbf{v}$ をもっているとすると、 S 系上で $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ であれば S' 系では

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{H}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H} - (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{E}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

であって、 $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ とすると

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{H}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}_0 \quad (4)$$

である。但し $(v/c)^2$ は無視している。又空間は真空であるとして $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, $\mathbf{H}' = \mathbf{B}'$ とおいている。

従って Q, G 間の二つの電導路に対し (3) 式の積分値が異なる場合、即ち B と C が相対的に動いている場合に G が電流に流れる。勿論磁束の性質から B 上の電導路 Q, P が一回転した際、そこを貫いた磁束はすべて、 C 上の電導路 P, Q, G が一回転した際に、その回転面を通過することは無論である。

§ 3 興味ある Unipolar Machine について

Unipolar induction の逆機構として、電流を流すことにより回転を誘起することが出来る。例えば第一図において G を電池として電流を通じると B は回転を始める。これは P, Q の間に流れる電流が、それを貫通している磁場 $\mathbf{H}$ と作用して生じる Lorentz 力

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{H} \quad \text{----- (5)}$$

の積分効果として理解できる。これは割合簡単である。ここで $\mathbf{i} \times \mathbf{B}$ としない
 で、 $\mathbf{i} \times \mathbf{H}$ としたのは今の場合銅の帯磁率 $\chi \sim 10^{-(5\sim6)}$ を無視したからである
 が、尚 $\mathbf{H}$ と区別して $\mathbf{B}$ を用いる為には大変慎重な考慮がいるからである。即ち
 それが無視できない場合にどうなるであろうか。これが本節の課題である。

第二図は藤川の考察した興味ある Unipolar Machine の一例である。NS
 は鉄その他電導性の金属で出来た永久磁石で、その中、S軸に細孔がえぐられ
 ている。

その細孔を通じてABの銅線が固定されている。一方その側面中央にはCの
 側面環が取り付けられて、その上に水銀があり、その水銀に茶筒の蓋状の銅製円、
 筒蓋GDCが接触している。又、Aも水銀溜であって、電池Fと連結するが、
 結果として永久磁石NSはそれに電流も供給する系、FA, CDEと独立に回
 転できるようになっているものとする。

さて今スイッチSを閉じて電流Iを流すと、中心軸をZ軸として、FABの
 回りには、円柱対称の環状の磁場 $\mathbf{H}_\phi$ が生じる。図3に示したように全く初等
 的に考えて、磁極の立場からすると、この円形磁場 $\mathbf{H}_\phi$ は磁石のN極にある正
 磁極に作用して、トルク $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N}_N = \int_0^{\rho_0} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{H}_\phi \, dS \quad \text{----- (6)}$$

を生ぜしめると予想出来る。ここに $\boldsymbol{\rho}$ は円柱座標の動径ベクトルで、 ρ_0 は永
 久磁石の半径、 dS はその底面の面積素片である。又、 $H_\phi = 2I/c\rho$ はよく
 知られている。

実験の結果はほぼ(6)式に近いトルクが現れることが判ったが、正確には
 (6)式より小さい。どうしてであろうか。勿論今日の常識をもってすると、磁
 石を構成している磁気能率の起源は微少な円形電流であって、磁極とか、磁荷
 というものはもともと実在ではないから、^{1), 2)} 上の考え方は根本から誤っている
 ことが明らかである。併し一方磁気の仮定から磁極を考えて力を導出して今迄
 矛盾がなかったという問題点があり、今回も桁数においては正しいのである。
 従って、この際どこがどう誤ったのかということが問題になる訳である。この

解答自身は困難ではないが、その内部機構の十分な理解には相当の電磁気学の基礎概念の分析を必要とする。

さて以上の初等的な磁極の考え方の場合 N 極附近はそれで良いとして、中央 B 部の附近はどうなるか、その附近で円形磁場は B から C に向う電流の発生と共に次第に零になる訳であるが、その附近で磁石は力を受けないであろうか。この点を明確化しようとするすると強磁性体内を通過する電流の受ける力と、その電流により誘起された磁場が強磁性体の構成要素である磁気能率に及ぼす力は如何という問題点に突き当たる。この問題は古典電磁気学の限界領域に存在する本質的な内容を含むものであって、その解答は容易ではないのである。

§ 4 磁気能率に働く力について

さて問題の核心に入る前に磁気能率に働く力はいかに理解されるかを考えておこう。その際一つの問題は、二つの磁極の存在を仮定した二重極能率で磁気能率を考える場合と、微少な永久環状電流として磁気能率を考える場合とで、磁気能率に働く力に相違が生じる可能性があるであろうかという問題がある。この答が微妙であって、電流の関与のない場合には両者は同等であるが、マックスウェル式でいう電流が関係していると相違が生ずるのである。そして問題の図 2 B C の附近はそれが関係しているのである。勿論その他に後者には角運動量が内在的に附随し、従って運動方程式がいわゆる“こま”の形式を取る点で、前者とは本質的に異なる結果を与えることを指摘される。

併し後者については古典的と言うよりは、むしろかなり早い dynamic な測定に対してのみ観測可能であって、一般的に静磁気学的な範囲ではこれによる相違は大きくない。さて今順序として巨視的な電流は存在しないものとし、I. 真空中に 1 ケの磁気能率のある場合、II. 物質片が真空中におかれた場合の二つに別けて考えてゆこう。

I. 要素磁気能率 1 ケが真空中で外場 H のもとにある場合

今要素磁気能率の大きさを μ としよう。もしこの μ が、外からの印加磁場 H のもとにあるときの静磁ポテンシャル・エネルギー

$$U = -(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\mu}) \quad (7)$$

の存在を認めることが出来ると、この答は簡単であって、上記二つのモデルで異なるはずはない。即ち力を単純力 $\mathbf{f}$ と、トルク $\mathbf{n}$ に別けて、

$$\mathbf{f} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\mu}) = \mu_x \nabla H_x + \mu_y \nabla H_y + \mu_z \nabla H_z \quad (8)$$

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (9)$$

$$\mathbf{n} = -\left(\frac{\partial}{\partial \theta_x}, \frac{\partial}{\partial \theta_y}, \frac{\partial}{\partial \theta_z}\right) U = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H} \quad (10)$$

である。但し (8) 式より (9) 式の変換に対しては、考える点で $\mathbf{H}$ は外場であり

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (11)$$

であると仮定している。又 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ はそれぞれ x, y, z 軸を回転軸とする微小回転角である。

併し (7) 式を認める為には相当の長い議論が必要である。^{*}従って本稿ではむしろ (7) 式を認めないで、ローレンツ力より直接力を出してみよう。

a) 二重極の場合

図4 (a) に示したように

$$\boldsymbol{\mu} = Q_m \Delta \mathbf{r} \quad (12)$$

$$\text{力} \quad \mathbf{f} = Q_m \mathbf{H}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) - Q_m \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$$

$$= Q_m (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{H}$$

$$= (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (13)$$

$$\text{トルク} \quad \mathbf{n} = (\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \times Q_m \mathbf{H}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{r}_0 \times Q_m \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$$

$$= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{f} \quad (14)$$

^{*} 多くの人はこの式を認めるために必要な考察を十分には行なわないで受入れている。特に二重磁極は実在ではなく、環状電流がその本質である点を注意したい。²⁾

但し $\mathbf{r}$ は任意点 0 よりのベクトルである。

b) 環状電流の場合

図 4 (b) に示したように

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I\pi a^2}{C} \nabla \mathbf{z} \quad (15)$$

但し $\nabla \mathbf{z}$ は $\mathbf{z}$ にナブラ演算した結果で $\mathbf{z}$ 方向の単位ベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\oint \phi \frac{I\mathbf{H}}{C} \times d\boldsymbol{\theta} \\ &= -\oint \phi \frac{I}{C} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \times (\nabla \mathbf{z} \times \Delta\mathbf{r}) d\varphi \\ &= -\oint \phi \frac{I}{C} [\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{H}] \times (\nabla \mathbf{z} \times \Delta\mathbf{r}) d\varphi \\ &= -\frac{I\pi a^2}{C} [(\nabla \cdot \mathbf{H}) \nabla \mathbf{z} - \nabla H_z] \\ &= \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \boldsymbol{\mu} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad (17)$$

ただし (16) 式で $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ を使用し、更に (17) 式に移る時に $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ の条件を仮定している。又トルクは

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \oint \mathbf{r} \times \left(-\frac{I\mathbf{H}}{C} \times d\boldsymbol{\theta} \right) \\ &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{f} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。従って両者は全く一致するが、但しその為には

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (19)$$

の条件を使用していることに特に留意したい。 $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ は外場に対しては当然である。

II. 物質素片に対する力

さて要素磁気能率に対して式 (17), (18) が得られたが、要素磁気能率の

集合体である物質中で微視的には大きく，巨視的には小さい体積 dv に働く力は，単純に (17)，(18) の和であるという訳には行かない。それはその際要素磁気能率に働いている外場は H ではないからである。

その為には図 5 に示したように，物質中に，丁度磁場 H を定義した時に用いたのと同じ，磁化 M の方向に平行な針状の体積 V を考え， V を取り出して空洞とし，その中の磁場を $H^*(r)$ とする。針状の体積 V は，全体としてこの外場 $H^*(r)$ を受けていることになる。この針状体積 V に対しては， V 自身の造る磁場は内部的に発生しているものであり，作用反作用の法則で，最終力には残らないから，

$$\begin{aligned} F_V &= \int_V (\mu \cdot \nabla) H^* = \int_V (M dv \cdot \nabla) H^* \\ &= \int_V (M \cdot \nabla) H^* dv \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_V &= \sum \mu \times H^* + \sum r \times (\mu \cdot \nabla) H^* \\ &= \int_V M dv \times H^* + \int_V r \times (M dv \cdot \nabla) H^* \\ &= \int_V M \times H^* dv + \int_V r \times (M \cdot \nabla) H^* dv \end{aligned} \quad (21)$$

となる。この空洞の中では $\nabla \times H^* = 0$ ， $\nabla \cdot H^* = 0$ が満足されていることは当然である。そうした上で定義により，

$$H^* \equiv H \quad (22)$$

であると考えれば問題は解決する。しかしこの際

$$(M \cdot \nabla) H^* = (M \cdot \nabla) H \quad (23)$$

であるかどうかについては，議論の要するところである。併し乍ら之は今 M に完全に平行に，多少湾曲した長い針状体積 V を考えても，その中の

$$H^* \equiv H \quad (24)$$

であることを考慮すれば差し支えないことが判る。 $(M \cdot \nabla)$ は M 方向の

gradient であるから、(24) 式の範囲で微分できる訳である。

物質片全体に対しては、勿論 (20) 式の積分を物質片全体に括げればよい。併し乍ら以上の結論を得る際に必要であった (19) 式の条件は電流が存在する時に充されない。その場合には

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \quad (25)$$

であって、電流が要素磁気能率の附近にも密度を持っているかどうかの問題になると共に力の計算は (16) 式から再出発せねばならないのである。

§ 5 強磁性体内を流れる電流に働く力

さて再び図 2 の問題にかえる。既に判ったことによって、磁極の概念を使って B C 附近の強磁性体に働く力を考えてはならない。理由はそこには電流があるからである。従って (6) 式導出の際の考え方、即ち二重極能率の考え方に立って、磁極は内部では相殺しているから、下の N 極と上の S 極だけであり、従って磁石を構成する磁気能率が磁場から受ける力は (6) 式であるとする考え方は誤っていることになる。この誤りを無くするためには磁気能率の存在するところに電流がないようにする必要があるのである。例えば図 6 に示したように、B C のところに厚さ無限小の円板状導体 P を入れ、絶縁体膜によって電流をその導体内に局限すると、この場合には磁極の概念が使えて、(6) 式の力と正確に釣合う逆トルクが、その円板状導体の直下に現れている S 極に働くことになる。即ち磁気能率が磁場から受けるトルクの相和は零となる。

又、有効なトルクは結局 B C を通る電流が、磁場 $\mathbf{H}^* = \mathbf{B}$ によって受けるものとなり

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c} \times \mathbf{H}^* \right) d\mathbf{v} \\ &= \iiint \rho \cdot \frac{1}{c} \cdot \mathbf{H}_z^*(\rho) d\rho \cdot dz \cdot \rho d\phi \cdot \nabla z \\ &= \frac{I}{c} \int_B^C \rho B_z(\rho) d\rho \cdot \nabla z \\ &= \frac{I}{c} \frac{1}{2\pi} \Phi \cdot \nabla z \end{aligned} \quad (26)$$

となる。 Φ は挿入した円板を垂直に通過する全磁束である。

さてこの場合作用反作用の法則から円筒キャップDCは丁度(26)式と逆符号のトルクを受けることになる。

このトルクはBC附近の構造によらないから、(26)式は図2の問題の一般解に等しいということになるのである。勿論電流に与えられたトルクは、電流の担い手の電子がBCを形成する結晶格子と衝突して全部Pに伝えられ、続いて磁石に伝えられる。

さて併し、この場合一般に磁場が磁気能率に作用するトルクの相和は零であるといえようか。そう言えれば話は簡単になるが、我々の解釈は残念ながらそうではない。図7にその模型的な説明が示される。(a)はその立面図で、B点よりCの円周に放射状に導体が造られ、それが磁石と良く絶縁されているものとする。(b)はその一本を切断して断面を見たところで、V型と示したものは無限に薄く垂直方面に拡った断面、H型は逆に水平に拡がり垂直方向には無限に薄い断面を持つ場合である。H型の場合中を貫く磁場は

$$H^* \Rightarrow B \quad (27)$$

と考えられよう。従って問題は前の場合と同様になるが、V型の場合

$$H^* = H \quad (28)$$

になることはHの定義より明らかである。従って(33)式の積分結果は

$$\begin{aligned} N &= \frac{I}{c} \int_B^C \rho H_z(\rho) d\rho \\ &= \frac{I}{c} \int_B^C \rho [B_z(\rho) - 4\pi M] d\rho \\ &= \frac{I}{c} \frac{1}{2\pi} \Phi - \frac{2I}{c} MS \end{aligned} \quad (29)$$

となり、(26)式とは一致しない。但しSは磁石の断面積である。一方放射状導体の分割数を十分大きくすれば、キャップCDに働くトルクに変化は生じないはずであるから、何か考え落しているものがないと作用、反作用がバランスしないことになる。

この力は円柱対称性を失った電流が発生する、円柱対称性のない磁場によって、磁石の磁気能率に作用するトルクであると結論される。この力を定量的に計算して(29)式の第2項と合致させることは相当面倒なので実施しないが、定性的にその存在を示すことは容易である。図8にその状況を示す。図8(a)のBCは放射状導体の一本である。このBCの周囲には円形の磁場が生じる。(図8(b))。この磁場は導体に近い程強いから、図8(c)に示したように、その周辺にある磁気能率、即ち円形電流にトルクを作用し、その相和は零にならない。このトルクは導体の形が図7(b)のH型のようになって、円柱対称に近づけば近づく程小さくなる性質のものであるが、一方電流に働くトルクはそれに呼応して逆に大きくなるのである。併しここで特に注意することは、図8(c)の内容は本当はこの図で単純に理解できる程度丈の単純さではない。もし電流が図8(b)の形で $-\infty$ から $+\infty$ 迄一直線に走り、その周囲の磁場 H がBCを軸として完全に円柱対称であるとする、(c)図の力を丁度打ち消す力が、(c)図の紙面に垂直方向に発生して相和は零になる。このことはもっと厳密に図11(a)で説明する。

勿論今の場合はこのような円柱対称性を持つことがあり得ないことは当然である。併し乍らこの事実を考慮すると(c)図で示したことは単にBからCに向う電流が、磁気能率にトルクを作用させ得る可能性のあることを示したに過ぎず、厳密な証明は逆作用をも考慮して、境界値問題を解いてはじめて得られるものであることを意味するものである。又今の場合には電流と磁化は分離されているから、全く同一の結論が磁極の考えを使っても導出される。(これも図11で説明できる)。

磁気能率に作用するトルクは勿論直ちに磁石の結晶格子に働くトルクとなるし、又電流に働くトルクは、電流を構成する電荷の、電流路の側面に対する衝突を通じて、間接的に結晶格子に働くトルクとなることは申す迄もないことである。

さて以上によって図2 BC面に作られた導体内を電流が流れる場合に、そこに働く力の解析はほぼ終ったことになる。又、そのトルクの総計は如何なる場合でも、同一であると結論された訳である。併しそれでは問題の強磁性体内を電流が直接流れる場合は如何であろうか。既に判ったことにより、電流が受け

る総力は、

$$\left(\frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B}\right) d\mathbf{v} \quad (30)$$

であると言い切ることは出来ない。即ち磁石の受けるトルクの総計は(30)式に準拠して計算して十分であるが、トルクの一部は電流を構成する電荷に伝えられるのではなく、図8に示した原理に基づいて、磁気能率自身に直接与えられるかも知れないからである。この問題も厳密に解析することは古典電磁気学の範囲を超えて、バンド理論その他量子力学的な取扱いが当然必要となるが、ここでは出来る丈古典電磁気学の言葉で、その構造を説明してみよう。

まず第一にもし電流を構成する電荷(電子と考えよう)が完全に一様に微視的世界の中を貫通してゆくとすると、ローレンツの微視的電磁場の考えに従って

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B} \quad (31)$$

であり、²⁾(30)式の力を平均として電子が受けることになる。併しこの為には半径 10^{-11} cm と言われる電子のスピン回転運動の中を他の電子が貫通する必要がある、高電圧で加速された超高速電子ならともかく^{2), 4)}電流中の電子では、電子相互間のクーロン反発力のためにとっても大きい確率でそうなることはない。従って電導電子は磁気能率の担い手である電子とは重疊することはないと考えるのが自然である。(量子力学的には電子が簡性を持たず二つの電子が区別できないという問題もある)。そうすると(31)式は使用できないことになる。

併し乍ら、なお電子の走行路に関して(31)式相当の式が適用できる可能性はある。それは、(31)式に加うるに、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (32)$$

であるから、 $\mathbf{h}$ のある平均が $\mathbf{B}$ になる強い理由がなお存在するのである。図9にその事情を示す。図9は $\mathbf{B}$ に平行に造られた小さな円柱で、巨視的には大きくはないが、微視的には十分大きいものとする。そうすると(32)式を図9 S_1 , S_2 の二つの面で囲まれた体積で積分して、

$$\int_{S_2} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_1} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S}_1' \quad (33)$$

である。今 S_1 を B に垂直な任意面とすると、

$$\int_{S_2} h_x dS_x + \int_{S_2} h_y dS_y + \int_{S_2} h_z dS_z = B S_1 \quad (34)$$

となる。もし S_2 を結晶格子中スピン磁気能率を持って磁化 M に寄与する電子を貫通することを避けて微少な高低のある面 (S_3 のような面) であったとしても (34) 式は変りない。更に S_2 が上記の各電子の近傍で $+x$ と $-x$, $+y$ と $-y$ との間に S_2 の位置の統計分布に関して差別のない面であるとする

$$\int_{S_2} h_x dS_x = 0, \quad \int_{S_2} h_y dS_y = 0 \quad (35)$$

となる。従ってそのときは

$$\int_{S_2} h_z dS_z = B S_1 \quad (36)$$

となる。

$$\int dS_z = S_1 \quad (37)$$

であるから

$$\bar{h}_z = \frac{S_z}{S_1} \nabla_z = B \quad (38)$$

となる。

図2のBC間を走る電子が、動経方向に向っては等速運動をしていると仮定できると式(38)はこの場合電子の受ける力を計算する際に設定すべき電子の受ける平均磁場を定める近似式になるであろう。実際はそのように仮定することは出来ないから(38)式を使用することは出来ないし、従って(30)式は正しくはないが、

$$\mathbf{f} = \frac{(-e)}{c} \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{h}} = \left(\frac{-e\mathbf{v}}{c} \right) \times \bar{\mathbf{h}} \quad (39)$$

という意味での電子の受ける磁場の平均 $\bar{h}^e$ は B に極めて近くなり得る可能性のあることが判るであろう。⁵⁾ そしてその平均が B に足りなかった分については、電子流が local に発生する磁場によって、磁気能率が直接力を受けていると考えるのが正しい理解であろう。併し更に次にも述べるように、電子の平均自由走行距離は極めて短いものであり、結晶格子を構成する電子群との衝突によって、 v は全く逆方向に進行する可能性すらも大きいとすると、(38) 式が適用されるべきであるとする理由も強いものではない。もし各電子の近傍を避けて運動するものとする、その様な場合の数学的な体積平均は

$$\bar{h} = H + \frac{4\pi}{3} M \quad (40)$$

となるのである。²⁾ 併しいづれにしても結果として磁石に働くトルクは不変で (26) 式で示されることには変りはない。

§ 6 強磁性体の Hall 効果と磁性体に働く力の関係

既に述べたことにより、問題の核心は強磁性体内を流れる電流に働く力、従って Hall 効果と密接な関係をもっていることがわかる。図 10 にその事情を示す。勿論固体内の電気伝導については、量子力学に従ってバンド理論の構成が不可避であり、バンドの底にあるか、頂上にあるかで、電子が電流の担い手であっても、なお正電荷の運動と同一の振舞いをする場合がある等の問題があるが、現在はそれらの議論を一切省略し、古典電磁気学の範囲で考えることとする。

そうすると、図 10 の左から右に流れる電子は、磁性体内の $\bar{h} \sim B$ によって上向きに力を受ける。この力はホール電場 E_H によって丁度打ち消されて、電流は略一様に流れることになる。この際ホール電場 E_H は電子の平均自由走行時間等に関係するが、これは (39) 式の $\bar{v}$ が $\bar{v}$ に比例し、 $\bar{v}$ は走行時間が永い程加速されて大きくなることから当然である。通常の関係式

$$-e E_x - \frac{e}{c} \bar{v}_y \bar{h}_z = 0 \quad (41)$$

$$E_H = E_x = \frac{1}{c} \bar{v}_y \bar{h}_z \quad (42)$$

ということになる。従って E_H は $\bar{h}_Z$ を感じているはずである。併し $\bar{v}_y$ が判らないから Hall 効果より $\bar{h}_Z$ を厳密に出すことは勿論不可能である。併しこの $\bar{h}_Z$ が B_Z である必要のないことは既に説明した通りである。又、今迄の説明より予想して、図 10 の強磁性体は上方に力 F を受けると考えられる。この力を今

$$\mathbf{F} = \int \frac{\mathbf{i}}{c} \times \mathbf{B}^* d\mathbf{v} = \frac{I\mathbf{L}}{c} \times \mathbf{B}^* \quad (43)$$

と書いたとすると、 $\mathbf{B}^*$ は何を意味するであろうか。既に述べたことにより、 $\mathbf{B}^*$ が各電子の受ける磁場の平均ではない。 $\mathbf{F}$ の一部は電流の造る磁場が磁石の磁気能率に直接作用することによって生じていると考えられるからである。

この点を明瞭にするためには y 方向の形状をも明確にしなければならない。もし y 方向に無限に長いとすると先に述べたことに従って電流に働く力と磁性体に働く力の総和は零になる。この間の事情は図 11 で説明される。図 11 (a) は無限長の円筒形強磁性体に、中央に絶縁された円形断面の導線を通し、それに電流を通じた場合である。この時は (17) 式を積分してみると零になる。これは磁極模型で、円筒の上下の他、導体の上下にも磁極が出ることからも容易に判る。又電流模型に立っても実効的に表面に残る電流が、やはり円筒の側面と導体の側面であって相殺する。又中央の導線の中の磁場 H^* は

$$H^* = H + H_{\text{local}} = -2\pi M + 2\pi M = 0 \quad (44)$$

であって、従って力はない。又もし導線の断面が M に垂直に無限に薄い板であると、(17) 式の積分は単位長当りにして

$$\frac{2\pi I}{c} M \quad (45)$$

となり紙面に垂直に下を向く。これは電流モデルでも磁極モデルでも直観的に計算できる。一方 H^* は

$$H^* = H + H_{\text{local}} = -2\pi M + 4\pi M \quad (46)$$

$$= 2\pi M$$

従って電流に働く力は

$$\frac{I}{c} 2\pi M \quad (47)$$

であって紙面に垂直に上を向く。結局 (45) + (47) で全体としては力は零になる。

さて y 方向の形状を固定する為に球とした場合が図 11 (b) に示される。その場合導線の断面を円形とすると、前と同様電流の造る磁場 H_I により磁性体が受ける力は零であるが、(磁極模型で考えよ)、電流に対する磁場は

$$H^* = H + H_{\text{local}} = -\frac{4\pi}{3}M + 2\pi M = \frac{2\pi}{3}M \quad (48)$$

従って電流のこの部分は

$$F = \int \frac{I}{c} \times H^* \cdot dz = \frac{2\pi I}{3c} M \cdot 2a \cdot \nabla y \quad (49)$$

の力を紙面に垂直に受ける。但し a は球の半径である。(49) 式は磁性体球の受ける力の総和を示すのであるから、導線の他の部分、即ち空中にでている部分は、この逆作用を受けて、紙面に垂直に下向きに同じ力で引かれることは当然である。導線の空中にある部分の磁場は磁性体球内での電流の通り方に依存しないから、その受ける力は不変で、従って図 2 の場合と同様 (49) 式で示される磁性体球の受ける力は磁性体球の中の電流 I の通り方にはよらない。即ちもし球の中に導線を通すことをやめて、図 10 のように磁性体自身の中に電流を流しても磁性体球は全く同一の力を受ける。このような場合に (49) 式を仮に適用して H^* を定義すると、その H^* は強磁性体内部の磁束密度

$$B = -\frac{4\pi}{3}M + 4\pi M = \frac{8\pi}{3}M \quad (50)$$

と異っていることは特に注意すべきであろう。このことは先に電流の受ける力が、必ずしも高速粒子でなくても

$$F = \frac{I}{c} \times B \quad (51)$$

と近似的に示し得る場合が多いと言ったことと必ずしも矛盾はしていない。それは既に述べたように電流の受ける力と、磁性体全体の受ける力とは同一では

ないからである。併し既に明らかにして来たように式(51)と、第2節で述べたところの、空間における磁場の独立性の概念とを調和させて、式(49)で示される磁性体の受ける力の総和を理解することは決して容易ではない。併しこの事実は間違いのない真理である。^{*}

以上の事実は古典力学的に運動する電荷あるいは電流に働く力という概念を正しく理解することが如何に困難であるかということを示している。初等電磁気学、特にM K S A単位系で書かれた書物に磁束密度 $\mathbf{B}$ の定義として

$$\mathbf{F} = \frac{Q \mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (52)$$

(M K S A系では $\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$)

を使用している例が多いが、筆者の一人(飯田)はこれに賛成出来ない立場を取っている。²⁾ それは(52)式の $\mathbf{B}$ が $\mathbf{H}$ (M K S A系では $\mu_0 \mathbf{H}$)と異なる為には、物質として磁性体を考えねばならないが、磁性体の中を運動する電荷に働く力を理解するためには本文で解説したような複雑な内容を理解せねばならない。これは電磁気学をマスターした人の問題であって定義といったこれから学ぶ人の理解できることではない。

更に(52)式の定義に賛成できない理由の一つとして、古典電磁気学における力の概念を、孤立した点電荷 Q の運動の中で理解することは容易ではない。この場合空間には電荷 Q の発生する非定常な動いている電場 $\mathbf{E}$ とそれに附随する磁場 $\mathbf{H}$ が発生していて系は非定常状態にあることが指摘される。古典電磁気

米) この事を確認するには、図11(b)の外場が、外部導体に与える力を計算すれば良い。

$$\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 M \nabla \mathbf{x}$$

として

$$H_x(0, 0, z) = \left[-\frac{\mu}{r^3} + \frac{3(\mu \cdot \mathbf{r}) \nabla r}{r^4} \right]_x = -\frac{4\pi a^3 M}{3z^3}$$

$$\therefore F_y = 2 \int_a^\infty \frac{I}{c} H_x(0, 0, z) = -\frac{4\pi I M a}{3c}$$

が出る。

学の範囲では電荷の運動はむしろ閉じた回路を持つ定常な電流として理解することから始めるのが至当であると考えている。その場合 (52) 式はその電流の全回路がどのようになっているかという疑問を更に発生させるわけである。その回路如何によって働く力が異なるかもしれないことは本文で述べた通りである。以上の立場から、 H 、 B の定義として昔風の空洞法が推薦されると考える。²⁾ その際磁極を挿入して測定するのは適當ではないが、その代りには閉じたループ状の無限小コイルを挿入して、それに働くトルク (18) 式として測定すると考えればよいであろう。

§ 7 結 語

以上古典電磁気学の一限界領域をめぐる一つの問題点を説明した。この小文が古典電磁気学の理解に少しでも役立てば幸いである。

文 献

- 1) 飯田修一, 日本物理学会誌, 22 (1967) 128
- 2) 飯田修一, "Difficulties in classical electromagnetism and a proposal for the introduction of a new unit system", この論文は文献 1) より遙かに内容が豊富で厳密であるが英文で書かれており, 物理学会関係誌の中での取扱いに関して結論が得られていないので公表が延引しているものである。
- 3) Hannes Alfvén and Carl-gunne Fälthamnar, "Cosmic Electrodynamics" Oxbord (1963) § 1, 3,
- 4) M. S. Cohn and K. J. Harte, Proc. IEEE, 53 (1965) 1145
- 5) H. Boersch, W. Raith, and H. Wefer, Z. Physik 161 (1961)

表 1

A	B	C	結果
×	×	×	×
×	×	○	○
×	○	×	○
×	○	○	×
○	×	×	×
○	×	○	○
○	○	×	○
○	○	○	×

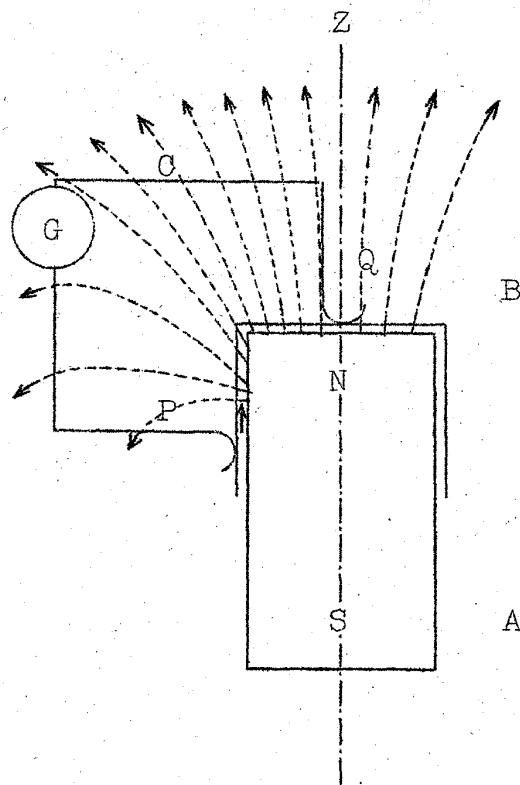


図 1

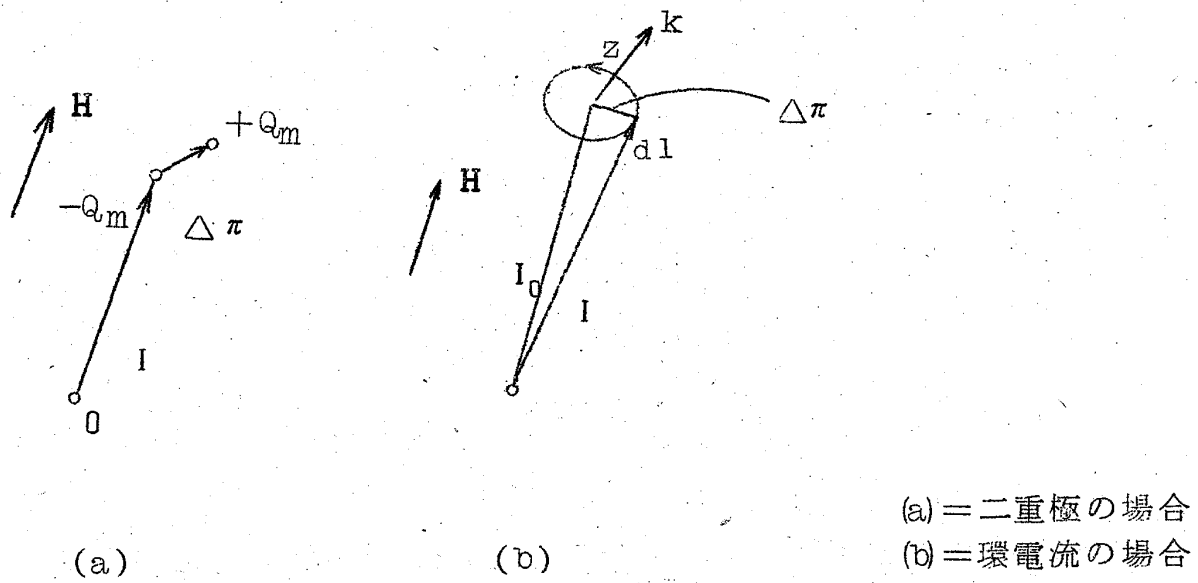


図4 磁気能率に働く力

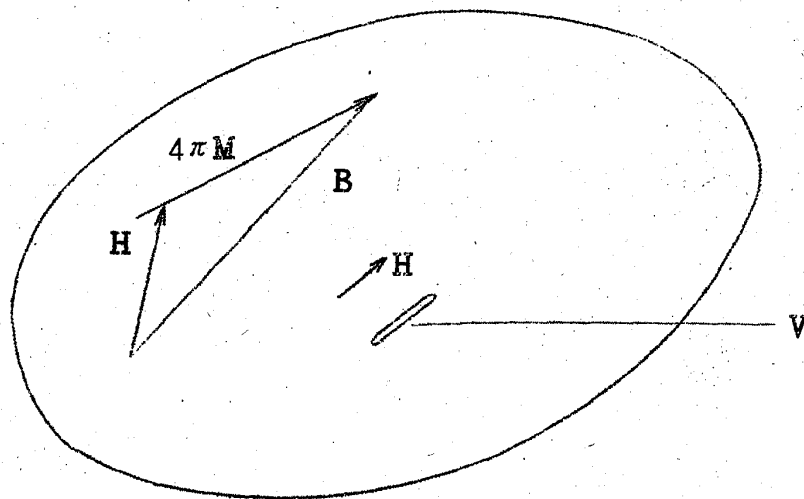


図5 物質中に働く力を考えるための針状空洞

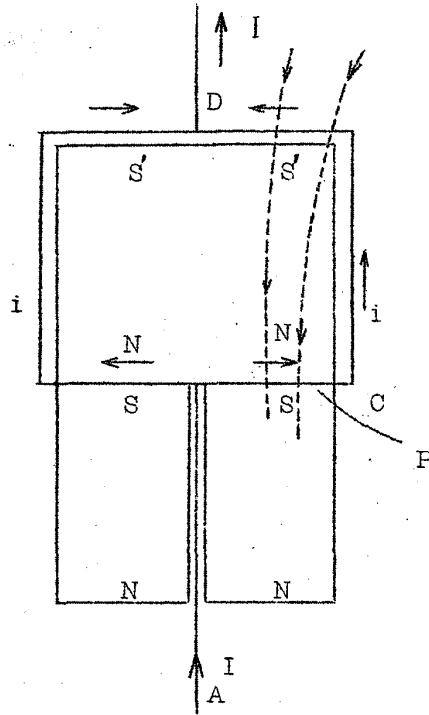


図6 電流の通筋を明確にするため，BC間に厚さ無限小の円板導体Pを入れ，磁石とは良く電氣的に絶縁した場合

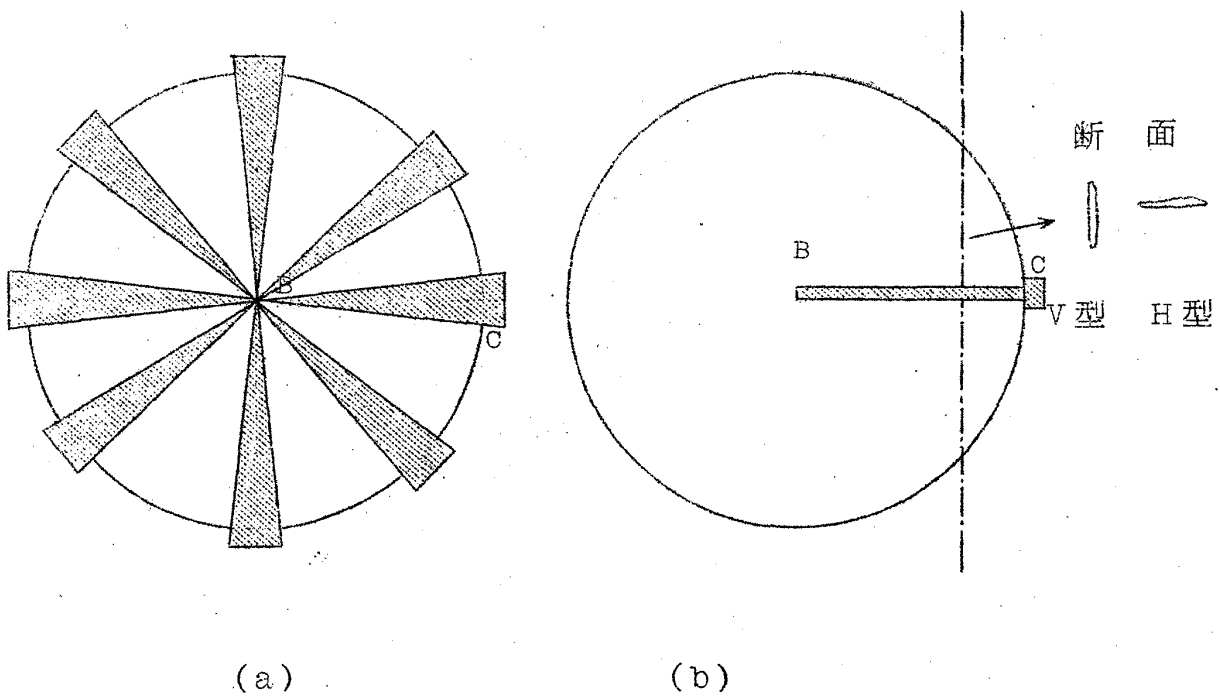
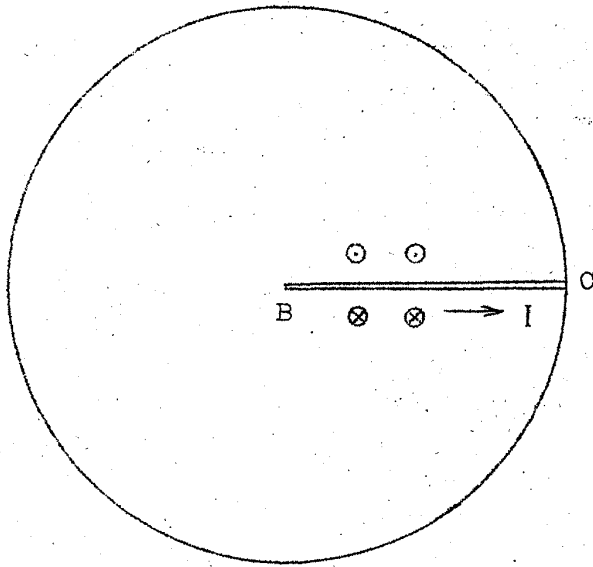
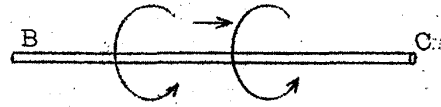


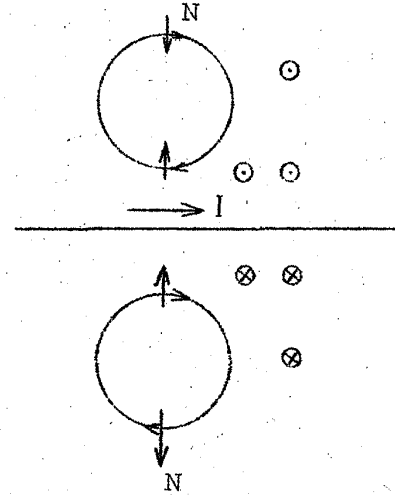
図7 磁石と絶縁された導体中を電流が流れる場合

(a) 放射状に造られた導体 (b) その断面図

(b)



(a)



(c)

図中 $\odot$ は上向もの H ， $\otimes$ は下向もの H で，その数が2箇あるのは1箇より強い H を示す，(c) の円形の矢印は電子の回転方向である。

図 8

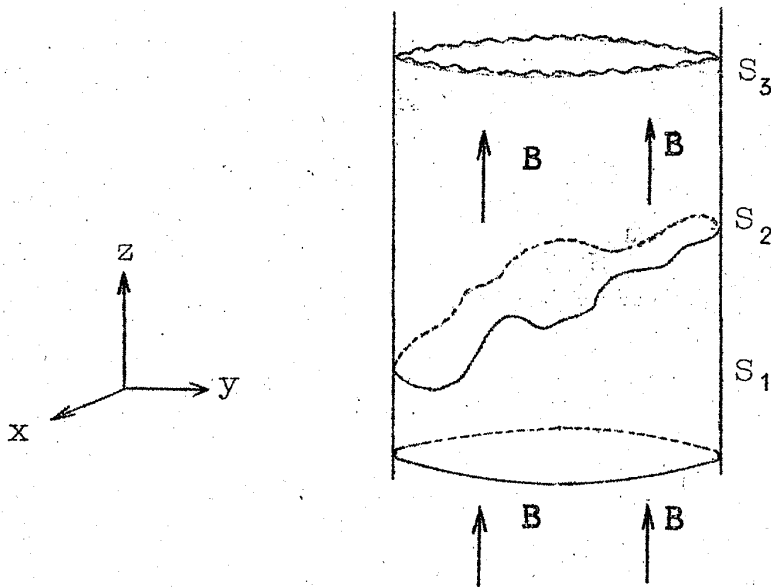


図 9

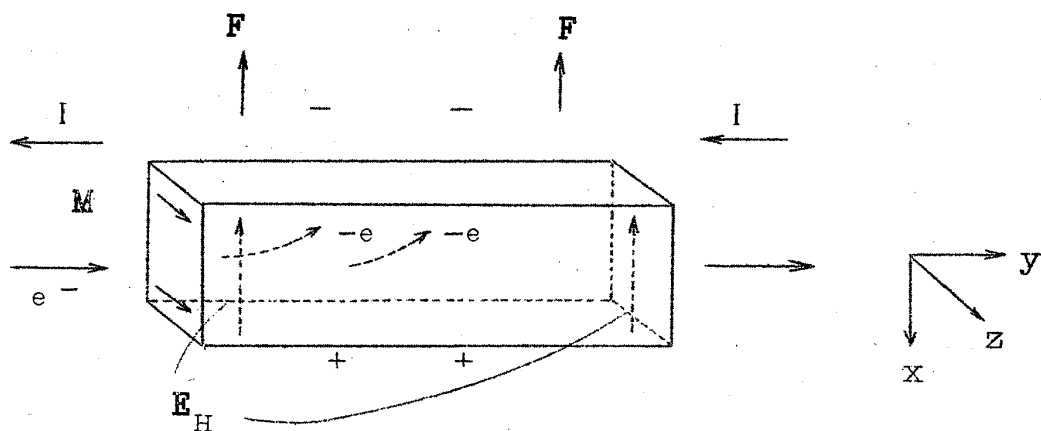


図 10 強磁性体のホール電圧

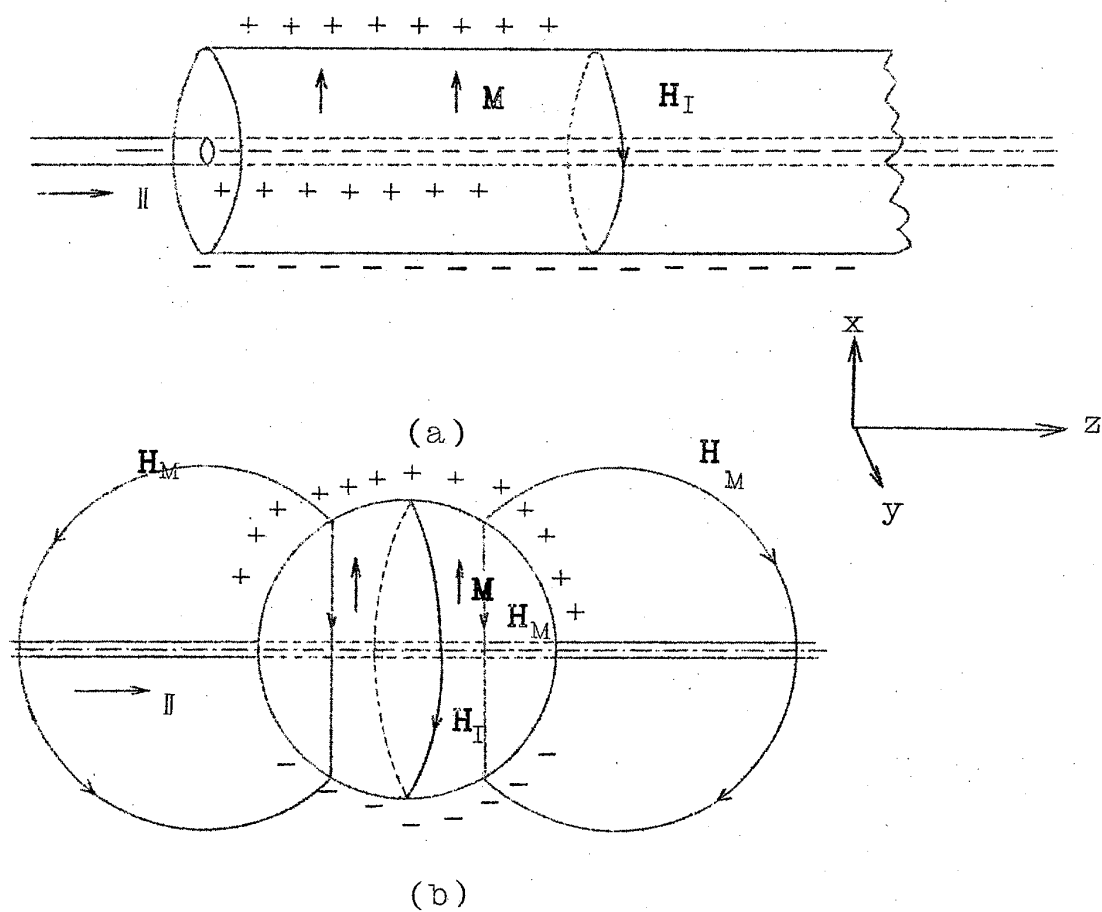


図 1 1 ホール効果の測定の場合に生じる力の関係式の説明図

a) 無限長の円筒形強磁性体, b) 球状強磁性体