

Walsh の函数による近似について

東北大理 渡辺 千波

まえがき よく知られているように、与えられた周期函数を三角多項式で近似する際には、函数のなめらかさが大きいほど、得られる近似度がよい、という現象が見られる。この際、与えられた函数の連続率と、三角多項式による最良近似との間には、ほぼ平行した関係があるが、完全に平行した関係があるわけではない。まず、連続率には trivial な限界がある： $f(x+h) - f(x) = o(h) \Rightarrow f(x) = \text{const.}$ であるから。

この限界を、連続率の定義に導出数を持ち込んで、乗り越えることは不可能である。たとえば、ある（負でない）整数 r に対して $f^{(r)}(x)$ が n 点と $2n$ 点で存在し、しかも

$$f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x) = O(h^\alpha) \quad (\text{as } h \rightarrow 0, \text{ unif. in } x)$$

が成立するとき、 $f \in \text{Lip}(\alpha+r)$ と定義すれば、この定義は通常の $\text{Lip} \alpha$ の拡張になっている。けれども、「函数のなめらかさは convolution による得られる函数に「遺伝」する」という命題は、不完全にしか成立しない。この簡単な例として、Weierstrass 型の函数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos 4^n x$ がある。

これを f とすれば、 $f \in \text{Lip} \frac{1}{2}$ であるが、 $f * f \notin \text{Lip} 1$ である。

最良近似を、このままもこの函数の性質をあらわすものと考えるとき（「よく近似される函数はよい函数である」）に立えば、「convolution による遺伝」は簡明である。 $f - P_n = O(\varphi_n)$, $g - Q_n = O(\psi_n)$ であるならば

$$(f - P_n) * (g - Q_n) = f * g - (P_n * g + f * Q_n - P_n * Q_n)$$

2, 右辺の () の中は三角多項式であり, 左辺から容易に大ざざ
か評価でき, $f * g - () = O(p_n^{-1})$ が得られる.

S. B. Steckin [3] は, 高階の階差を用いる連続性を考え, 函数の
なめらかさと, 三角多項式による最良近似の平行関係に記述したか, 何階
の階差を用いよかは *a priori* に決定できない. (よい函数の
場合には高階の階差を考へる必要がある.)

こゝでは, 高階の階差を考へる必要のない (あるいは, そのよいもの
が考へられぬ) 場合に, 函数のなめらかさと, 多項式近似のよさとの
間に完全な平行関係成立する一例を提示する.

§1. dyadic group と Walsh の函数

以下に於ては, 以下の dyadic group G 上の函数を G の charac-
ters の一次結合するものとして Walsh 多項式で近似する問題に於て.

dyadic group G とは, 0 または 1 を項とする数列 $x = (x_n)_{n=1,2,\dots}$
の集合に,

$$x + y = z = (z_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} z_n = x_n + y_n \pmod{2} = |x_n - y_n| \quad (n=1,2,\dots)$$

の演算を定義し, 単位元 $0 = (0, 0, \dots)$ の逆像

$$V_0 = G, \quad V_n = \{x \in G; x_1 = \dots = x_n = 0\} \quad (n=1,2,\dots)$$

あるのは距離

$$d(x, y) = \lambda(x + y), \quad \lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$$

による topology を定義して得られる compact Abelian group である.

$$\phi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \quad (x \in G, \quad n=1, 2, \dots)$$

すなわち $\phi_n(x)$ は G の n 個の端点 $a_0, a_1, \dots, a_n$ (ただし $a_0 = a, a_n = b$) を頂点とする n 角形の重心 (Rademacher の函数) である。また $\phi_n(x)$ は G の n 個の端点 $a_0, a_1, \dots, a_n$ (ただし $a_0 = a, a_n = b$) を頂点とする n 角形の重心 (Walsh の函数) である。

ここで ϕ_n の有限個の和を考えると、その結果は

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_n(x) = \phi_{n_1}(x) \cdots \phi_{n_r}(x) \quad (n = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_r} \leq 1, \quad n_1 > \cdots > n_r \geq 0)$$

である。以下 Walsh の函数にはこの「順序」($\hat{G}$ の演算と compatible である) をつけようとする。

をこのようにする。

§2 連続性と最良近似

まず α より先に、

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} c_v \phi_v; \quad c_v \in \mathbb{C} \quad (v=0, 1, \dots, n-1) \right\}$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup\{|f(x)|; x \in G\} & (p = \infty) \end{cases}$$

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h) \quad (h \in G)$$

$$\omega^{(p)}(V_n; f) = \sup\{\|f - \tau_h f\|_p; h \in V_n\}$$

$$f \in \text{Lip}^{(p)} \alpha(W) \stackrel{\text{def}}{\iff} \|f - \tau_h f\|_p = O(\lambda(h)^\alpha) \quad (\alpha > 0, h \rightarrow 0)$$

$$E_n^{(p)}(f) = \inf\{\|f - P_n\|_p; P_n \in \mathcal{P}_n\}$$

定理 1. α を正の定数とすると、つぎの 4 の命題は互いに同値である。

$$(1) f \in \text{Lip}^{(p)} \alpha(W)$$

$$(2) \quad \omega^{(p)}(V_n; f) = O(2^{-n\alpha})$$

$$(3) \quad E_m^{(p)}(f) = O(m^{-\alpha})$$

$$(4) \quad \|f - S_{2^n}(\cdot; f)\|_p = O(2^{-n\alpha})$$

$\Leftarrow S_{2^n}(\cdot; f)$ は f の Walsh-Fourier series の 2^n 項までの和である。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) はあきらかである。(2) $\Rightarrow$ (1) も容易に示される。
 なる、 $0 \neq h \in G$ を任意に固定する。 $\exists n; h \in V_n - V_{n+1}$.

$$\therefore \|T_h f - f\| \leq A \cdot 2^{-n\alpha} \leq B \cdot \lambda(h)^\alpha$$

(4) $\Rightarrow$ (3): 固定された m に対し、 $2^n \leq m < 2^{n+1}$ とする n をとる。 $\mathcal{P}_{2^n} \subset \mathcal{P}_m$ であるから

$$E_m^{(p)}(f) \leq E_{2^n}^{(p)}(f) \leq \|f - S_{2^n}(\cdot; f)\|_p = O(2^{-n\alpha}) = O(m^{-\alpha}).$$

したがって、定理の証明を定結するに於て (3) $\Rightarrow$ (4), (2) $\Leftrightarrow$ (4) を示せばよい。これを以下の三つの補題に分けて証明する。

補題 1 (i) $D_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)$ とおくとき

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & x \in V_n \\ 0 & x \notin V_n \end{cases}$$

(ii) $f \in L^p(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) に対し

$$\|S_{2^n}(\cdot; f)\|_p \leq \|f\|_p$$

証明 (i) は $D_{2^n}(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi_j(x))$ からあきらかである。

(ii) は (i) と Minkowski の不等式からあきらかである。

補題 2. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leq \|f - S_{2^n}(\cdot; f)\|_p \leq 2 E_{2^n}^{(p)}(f)$

証明. 前半は trivial である. 後半を示すには, $E_{2^n}^{(p)}(f) = \|f - P\|_p$
 $(P \in \mathcal{P}_{2^n})$ とすると, $S_{2^n}(\cdot; P) = P$ に注意して

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^n}(\cdot; f)\|_p &= \|f - P - S_{2^n}(\cdot; f - P)\|_p \\ &\leq \|f - P\|_p + \|S_{2^n}(\cdot; f - P)\|_p \leq 2 \|f - P\|_p \quad (\text{補題 1, (ii)}) \end{aligned}$$

補題 3. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leq \omega^{(p)}(V_n; f) \leq 2 E_{2^n}^{(p)}(f)$

証明. $1 \leq p < \infty$ の場合を示す. $p = \infty$ の場合はより容易である.

補題 2 から

$$\begin{aligned} E_{2^n}^{(p)}(f) &\leq \|f - S_{2^n}(\cdot; f)\|_p = \left(\int_G |f(x) - \int_G f(x+y) D_{2^n}(y) dy|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left\{ \int_G \left(\int_G |f(x) - f(x+y)| D_{2^n}(y) dy \right)^p dx \right\}^{1/p} \\ &= 2^n \left\{ \int_G \left(\int_{V_n} |f(x) - f(x+y)| dy \right)^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq 2^n \int_{V_n} \| \tau_y f - f \|_p dy \leq \omega^{(p)}(V_n; f) \end{aligned}$$

これで前半が得られた. 後半を示すために $h \in V_n$ を任意にとる.

$P \in \mathcal{P}_{2^n}$ に対しては $P(x+h) = P(x) \quad (\forall x \in G)$ であるから

$$\|f - \tau_h f\|_p = \|f - P - \tau_h f + \tau_h P\|_p$$

$$\leq \|f - P\|_p + \|T_h P - T_h f\|_p = 2\|f - P\|_p$$

$P \in \mathcal{P}_n$ として下限をとる, $h \in \mathcal{P}_n$ として上限をとればよい.

これで定理上の証明が完了した.

$$\text{系 } \alpha > 0, \beta > 0, p \geq 1, q \geq 1 \text{ 且 } 1 \geq 1/p \geq (1/p) + (1/q) - 1$$

とあるとする. このとき

$$f \in \text{Lip}^{(p)} \alpha(W), \quad g \in \text{Lip}^{(q)} \beta(W) \Rightarrow f * g \in \text{Lip}^{(r)} (\alpha + \beta)(W)$$

証明 $E_n^{(r)}(f * g) = O(n^{-\alpha - \beta})$ を示せばよいが, 近似度は convolution によって「遺伝」するから, はじめに示さなければならない.

§ 3 Linear methods による近似

$f \in L^1(G)$ の Walsh Fourier series を (WFS と略記)

$$f \sim \sum_{v=0}^{\infty} c_v \psi_v$$

とし, 形式的に作る級数

$$\sum_{v=0}^{\infty} v^\lambda c_v \psi_v$$

がそれぞれ

essentially bounded function $f^{(\lambda)}$ の WFS である ($p = \infty$)

$L^p(G)$ に属する函数 $f^{(\lambda)}$ の WFS である ($1 < p < \infty$)

G 上の bounded Borel measure $f^{(\lambda)}$ の Walsh-Fourier-Stieltjes series である ($p = 1$)

よくは f の全体を W^λ あるいは $W^{(p)\lambda}$ と書く.

$\beta(t)$ を $t > 0$ に対して定義された 正の連続非減少函数とし, $\frac{\beta(t)}{t}$ は十分大きな t に対しては非増加とし, かつ

$$\int_1^n \frac{\beta(t)}{t} dt = O(\beta(n))$$

を仮定しているとする. このとき, つぎの定理が成立する.

定理 2 $\lambda > 0$ とし, $T = (T_n)$ を $L^p(G) \rightarrow L^p(G)$ の linear operators の列とする. もし

$$(1) \quad \|T_n f\|_p \leq M_1 \|f\|_p \quad (\forall f \in L^p(G))$$

$$(2) \quad \|f_n - T_n f\|_p \leq M_2 n^{-\lambda} \|f^{(\lambda)}\|_p \quad (\forall f \in W^\lambda)$$

が成立すれば, $0 < \alpha < \lambda$ に対して

$$E_n^{(\alpha)}(g) = O(n^{-\alpha} \beta(n)) \Rightarrow \|g - T_n g\|_p = O(n^{-\alpha} \beta(n))$$

がある. すなわち, g は T による最良近似と同じ order で近似される.

補題 4 (Bernstein の不等式)

$$P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow \|P^{(\alpha)}\|_p \leq A_\alpha n^\alpha \|P\|_p.$$

証明 $2^k \leq n < 2^{k+1}$ である k を定める. $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ が成立するから, $P = D_{2^{k+1}}^{(\alpha)} * P$ に注意して, $\|D_{2^{k+1}}^{(\alpha)}\|_1 \leq A_\alpha n^\alpha$ を示せば十分である. Abel 変換を 2 度用いて

$$D_{2^{k+1}}^{(\alpha)} = (2^{k+1} - 1)^\alpha D_{2^{k+1}} - ((2^{k+1} - 1)^\alpha - (2^{k+1} - 2)^\alpha) (2^{k+1} - 1) F_{2^{k+1}-1} + \sum_{\nu=1}^{2^{k+1}-2} \alpha_\nu^2 \nu F_\nu$$

$$\Delta_v^2 = (v+1)^\alpha - 2v^\alpha + (v-1)^\alpha \sim v^{-2+\alpha}$$

$$v F_v = \sum_{j=1}^v D_j$$

$$\|F_v\|_1 \leq 2 \quad (v=1, 2, \dots) \text{ 是和 } \leq 2 \text{ である (Yano [5])}$$

したがって、

$$\|D_{2^{kn}}^{[\alpha]}\|_1 \leq 2^{(k+1)\alpha} + A \cdot 2^{(k+1)\alpha} + B \sum_{v=1}^{2^{kn}-2} v^{-1+\alpha} \leq A_\alpha n^\alpha \quad \text{q.e.d.}$$

補題5 $\alpha > 0$ とし、 $\gamma(t)$ は $t > 0$ に対して定義された正の連続関数で、十分大きな t に対しては非増加であるとす。 $P_n \in \mathcal{P}_n$ が

$$\|f - P_n\|_p \leq \gamma(n)/n^{\alpha-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

を満たすものは

$$\|P_n^{[\alpha]}\|_p \leq A + B n \gamma(n) + C \int_1^n \gamma(t) dt$$

である。

証明 γ は $t \geq 2^{a-1}$ に対して非増加であるとす。 $j \geq a$ に対しては (以下 $1 \leq n$ の添数 p を省く)

$$\begin{aligned} \|P_{2^j} - P_{2^{j+1}}\| &\leq \|P_{2^j} - f\| + \|P_{2^{j+1}} - f\| \\ &\leq 2^{j(1-\alpha)} \gamma(2^j) + 2^{(j+1)(1-\alpha)} \gamma(2^{j+1}) \\ &\leq (1 + 2^{1-\alpha}) 2^{j(1-\alpha)} \gamma(2^j) \end{aligned}$$

$P_{2^j} - P_{2^{j+1}} \in \mathcal{P}_{2^{j+1}}$ であるから、補題4によれば

$$\|P_{2^j}^{[\alpha]} - P_{2^{j+1}}^{[\alpha]}\| \leq A_\alpha \gamma(2^j) \cdot 2^{j\alpha} \cdot 2^{j(1-\alpha)} = A'_\alpha \gamma(2^j) 2^j$$

よって $j = a, a+1, \dots, m-1$ に対しては加えて

$$\|P_{2^a}^{[\alpha]} - P_{2^m}^{[\alpha]}\| \leq A'_\alpha \sum_{j=a}^{m-1} 2^j \gamma(2^j) \leq A'_\alpha \int_{2^{a-1}}^{2^m} \gamma(t) dt$$

$n \geq 2^{q-1}$ を与えよとす, m を $2^m \leq n < 2^{m+1}$ なる定めて $P_n - P_{2^m}$

に同じ評価をする

$$\begin{aligned} \|P_n^{(\alpha)} - P_{2^m}^{(\alpha)}\|_p &\leq A_\alpha n^\alpha \left\{ \eta(n) n^{-\alpha+1} + \eta(2^m) 2^{-m(\alpha-1)} \right\} \\ &\leq A'_\alpha \left(n \eta(n) + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \eta(t) dt \right) \end{aligned}$$

これらを加え合わせれば, 求める評価が得られる.

q.e.d.

定理2 の証明

最良近似多項式 P_n をとる.

$$\|g - P_n\| \leq M_3 n^{-\alpha} \zeta(n) = M_3 n^{-(\alpha-1)} \zeta(n) n^{-1}$$

よるから, 補題5に於いて $\eta(n) = \zeta(n)/n$ とおくと

$$\|P_n^{(\alpha)}\| \leq A + B \zeta(n) + C \int_1^n \frac{\zeta(t)}{t} dt \leq M_4 \zeta(n).$$

他方, 補題4 から

$$\|P_n^{(\alpha)}\| = \|(P_n^{(\alpha)})^{(\lambda-\alpha)}\| \leq M_5 n^{\lambda-\alpha} \|P_n^{(\alpha)}\| \leq M_6 n^{\lambda-\alpha} \zeta(n).$$

$P_n \in W^\lambda$ であるから, 仮定(2)によつて

$$\|P_n - T_n P_n\| \leq M_2 n^{-\lambda} M_6 n^{\lambda-\alpha} \zeta(n) = M_7 n^{-\alpha} \zeta(n).$$

定理の仮定(1) から

$$\|f - T f\| \leq \|f - P_n\| + \|P_n - T_n P_n\| + \|T_n(f - P_n)\|$$

の右辺第3項が第1項と同じ order になり, 証明が終る.

定理の仮定(1) は, 各 n の operator (T_n) によつて与えられる自然な条件であり, 仮定(2) は 左とせば (T_n) による近似が W^λ と同じ核に対して飽和近似とあれば (そして飽和近似度が $n^{-\lambda}$ とあれば) 与えられる.

文 献

- [1] N. J. Fine. On Walsh function. Trans. Amer. Math. Soc., 65(1949), 372-414.
- [2] R. E. A. C. Paley. A remarkable system of orthonormal functions,
Proc. London Math. Soc., 34(1932), 241-279.
- [3] S. B. Steckin, On the best approximation of continuous functions.
Izv. Akad. Nauk. 15(1951), 219-242.
- [4] C. Watari. Best approximation by Walsh polynomials, Tôhoku Math. J.,
15(1963), 1-5.
- [5] _____, A note on saturation and best approximation,
Tôhoku Math. J., 15(1963), 273-276.
- [6] S. Yano, On approximation by Walsh function, Proc. Amer. Math. Soc., 2(1951),
962-967.