

中2基本形式がある条件をみたす複素 射影空間内の Kähler 部分多様体

筑波大数学系 高木亮一 (Ryoichi Takagi)

0. 序

定正則断面曲率 c の N -dim _{$\mathbb{C}$} 複素射影空間を $P_N(c)$ とする。 M を階数 r の compact 型既約 Hermitic 対称空間とし、 M の $P_N(c)$ への p 番目の正則等長埋め込みを $\iota_p: M \rightarrow P_{N_p}(pc)$ とする。 ι_p の中2基本形式を $H \in \mathcal{L}(M)$ 上の $(1,0)$ 型共変微分を ∇^+ とすると、

$$\underbrace{\nabla^+ \cdots \nabla^+}_{pr} H = \nabla^{+pr} H = c, \quad \nabla^{+pr-1} H \neq 0$$

が成立つことが知られてゐる ([4])。 $c = 2$ の逆に $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体 M

$$(*) \quad \exists m, \quad \nabla^{+m} H = 0$$

をみたすものを分類する問題を考える。 $c = 12$ の ∇^+, H はそれぞれ PL の $(1,0)$ 型共変微分と中2基本形式を表す。

本稿では (*) が M の曲率 tensor R に関する同様の条件,
すなわち, $(\exists d, \forall d R = 0)$ と同値であることを示し,
余次元が 1 の場合に (*) をみたす M を分類する。

1. 準備

M を $P_N(\mathbb{C})$ の n -dim $\mathbb{C}$ Kähler 部分多様体とする。

添字の動く範囲を

$$\underbrace{i, j, k, \dots}_{1, \dots, n}, \underbrace{\alpha, \beta, \gamma, \dots}_{n+1, \dots, N}$$

$A, B, C, \dots$

と約束する。 M 上で局所的に定義された $P_N(\mathbb{C})$ の

unitary 枠 e_A を e_i が M に接するように選ぶ。 e_A
の対双 1 次形式を ω^A とし, これに関する接続形式を ω_B^A と
すれば, $\omega^\alpha = 0$ であることから,

$$(1.1) \quad \omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$$

と書ける。 $H = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \omega^i \cdot \omega^j$ は e^α 方向の M の第 2
基本形式という。 M の曲率形式は

$$(1.2) \quad \Omega_j^i = + \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + d\omega_j^i$$

と定義されるが, これは

$$(1.3) \quad \Omega_j^i = \sum_{k, l} R_{j k \bar{l}}^i \omega^k \wedge \bar{\omega}^l$$

と表わせる。Gauss の方程式は

$$(1.4) \quad R^i{}_{j k \bar{l}} = \frac{c}{2} (\delta_{ij} \delta_{k\bar{l}} + \delta_{ik} \delta_{j\bar{l}}) - \sum_{\alpha} h_{jk}^{\alpha} \bar{h}_{i\bar{l}}^{\alpha}$$

で与えられる。M の Ricci tensor (S_{ij}^{α}) は

$$(1.5) \quad S_{ij}^{\alpha} = \sum_k R^k{}_{i \bar{j} k} = \frac{n+1}{2} c \delta_{ij} - \sum_{\alpha, k} h_{ik}^{\alpha} \bar{h}_{k\bar{j}}^{\alpha}$$

で与えられる。中 2 基本形式の高次共変微分 $h_{i_1 \dots i_m}^{\alpha}$ を次のようにして帰納的に定義する。

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & \sum_j h_{i_1 \dots i_m j}^{\alpha} \omega^j + \sum_j h_{i_1 \dots i_m \bar{j}}^{\alpha} \bar{\omega}^j \\ &= d h_{i_1 \dots i_m}^{\alpha} - \sum_{r=1}^m \sum_j h_{i_1 \dots i_{r-1} j}^{\alpha} i_{r+1} \dots i_m \omega_{i_r}^j \\ &+ \sum_{\beta} h_{i_1 \dots i_m}^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} \end{aligned}$$

このとき次が成立つ。

Lemma 1.1 ([1]).

$$\begin{aligned} h_{i_1 \dots i_m \bar{j}}^{\alpha} &= \frac{m-2}{2} c \sum_{r=1}^m h_{i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_m}^{\alpha} \delta_{i_r \bar{j}} \\ &- \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!(m-r)!} \sum_{\beta, \sigma} h_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}^{\alpha} h_{i_{\sigma(r+1)} \dots i_{\sigma(m)}}^{\beta} \bar{h}_{i_r \bar{j}}^{\beta}, \end{aligned}$$

ここに, $\Sigma \sigma$ は $(1, \dots, m)$ のすべての置換にわたるものとする。特に, $h^{\sigma_{i_1 \dots i_m}}$ は $i_1, \dots, i_m$ に関する対称であり, $h^{\sigma_{ij\bar{k}}} = 0$ である。

2. 結果と証明

以下, M は $P_N(\mathbb{C})$ の Kähler 部分多様体とし, §1 の記号を用いる。

定義 2.1. M の法ベクトル $\sum_{\alpha} h^{\sigma_{i_1 \dots i_m}} e_{\alpha}$ によって張られる複素ベクトル空間を H_m とする。

注. この記号の下で, Lemma 2.1 より

$$\sum_{\alpha} h^{\sigma_{i_1 \dots i_m} \bar{j}} e_{\alpha} \in H_2 + \dots + H_{m-1}$$

がわかる。

Lemma 2.2. ある正整数 r, l に対して

$$H_r \perp (H_2 + \dots + H_l)$$

が成立するとは,

$$(1) \quad \forall s \geq r \text{ に対して, } H_s \perp (H_2 + \dots + H_l)$$

$$(2) \quad H_{2r} \perp (H_2 + \dots + H_{l+1}).$$

証 a は $2 \leq a \leq l$ なる $\forall$ 整数とする。

(1) $H_{r+1} + (H_2 + \dots + H_\ell)$ を示せば十分である。

仮定より

$$\sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_r}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} = 0$$

が成立つが、これを e_k で共変微分して

$$\sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_r k}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} + \sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_r}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a k}^{\alpha} = 0$$

を得る。第2項は Lemma 1.1 と仮定により 0 である。

よって示された。

(2) (1) より

$$\sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_{2r}}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} = 0$$

が成立つが、これを $\bar{e}_k$ で共変微分して

$$\sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_{2r}}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a k}^{\alpha} + \sum_{\alpha} h_{i_1 \dots i_{2r}}^{\alpha} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} = 0$$

を得る。ここで Lemma 1.1 より第2項は

$$\begin{aligned} & (r-1) \sum_{b=1}^{2r} h_{i_1 \dots \hat{i}_b \dots i_{2r}}^{\alpha} \delta_{i_b k} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} \\ & - \sum_{b=1}^{2r-2} \sum_{\sigma, \beta, \ell} \frac{1}{b! (2r-b)!} h_{\ell i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(b)}}^{\alpha} h_{i_{\sigma(b+1)} \dots i_{\sigma(2r)}}^{\beta} \\ & \quad \left(\bar{h}_{\ell k}^{\beta} \bar{h}_{j_1 \dots j_a}^{\alpha} \right) \end{aligned}$$

となるが、この第1項は(1)より0となり、第2項は、
 $b+1 \geq r$ または $2r-b \geq r$ が成立つから、やはり0と
 なる。 よって

$$\sum_k h_{i_1 \dots i_{2r}} \overline{h_{j_1 \dots j_{2k}}} = 0. \quad \text{了}$$

定義 2.3. $H_d \perp H_2$ なる d に対して、数
 列 $\{d_i\}$ を

$$\begin{cases} d_{i+1} = 2^{d_i-2} d_i & (i=0, 1, 2, \dots) \\ d_0 = d \end{cases}$$

によって定義する。

Lemma 2.4. $(\exists d, H_d \perp H_2)$ が成立てば、
 ベクトル空間 $H_2, H_d, H_{d_1}, H_{d_2}, \dots$ は互いに
 直交する。

証. $H_d \perp H_2$ であるから、Lemma 2.2(2)を
 $d-2$ 回くり返して使えば、

$$H_{d_1} \perp (H_2 + H_d)$$

がわかる。以下同様に Lemma 2.2(2)を適用して

$$\forall i, \quad H_{d_{i+1}} \perp (H_2 + H_{d_0} + \dots + H_{d_i})$$

がわかる。

了

次の定理は条件(*)の一つの幾何学的意味を与えている。

定理 2.5.

$$(\exists d, \nabla^{d-2} R = 0) \Leftrightarrow (\exists m, \nabla^m H = 0)$$

証. $\Leftarrow$ は (1.4) より明らかである。 $\Rightarrow$ を示そう。仮定は (1.4) より $H_d \perp H_2$ と同値である。もし $(\forall m, H_m \neq 0)$ なら, Lemma 2.4 により, H_2 に直交する 0 でない法ベクトル空間の部分空間

$$H_2, H_d, H_{d_1}, H_{d_2}, \dots$$

が無限個得られ矛盾である。

了

注. Kähler C -空間の曲率 tensor R は常に

$$\exists d, \nabla^d R = 0$$

を示す ([3]) から, 定理 2.5 により $P_N(C)$ の Kähler 部分多様体としての C -空間はすべて (*) を満たす空間の例である。

次の定理は定理 2.5 の d と m の間の関係を与えている。

定理 2.6. $M \neq P_N(c)$ の n -dim $_{\mathbb{C}}$ Kähler 部分多様体 z

$$\exists d, \quad \bar{\partial}^d R = 0, \quad \bar{\partial}^{d-1} R \neq 0$$

をみたすとする。このとき,

$$\exists m, \quad H_m = 0, \quad H_{m-1} \neq 0$$

であって, $m \leq d_{N-n-1}$ をみたす。

証 Lemma 2.4 により, ある i が存在して,

$$H_2, H_3, H_4, \dots, H_{d_i}$$

は互いに直交する 0 でない法部分ベクトル空間 z , かつ

$$H_{d_{i+1}} = 0$$

となる。これと, 法ベクトル空間の $\dim_{\mathbb{C}}$ が $N-n$ であることから, $i+2 \leq N-n$ を得る。これと, m と i の定義より

$$m-1 \leq d_{i+1} - 1 \leq d_{N-n-1} - 1$$

を得る。

了

最後に余次元が 1 の場合を考える。

定理 2.7 $\mathbb{P}_{n+1}(C)$ の $\mathbb{C}$ -ahler 超曲面 M が
 $(\exists m, H_m = C)$ を満たせば, M は超平面か二次曲
 面 $x_0^2 + \dots + x_{n+2}^2 = 0$ に合同である。

証 超曲面を考えるから, 添字 α は書く必要が
 ない。また, $m=3$ の場合はすでに解決されている ([2]
) から, $m \geq 4$ としよ。

$$\underbrace{h_{i \dots i}}_{m-1} \neq 0 \text{ (resp. } \underbrace{h_{i \dots i}}_{m-1} = 0 \text{)}$$

となる任意の添字 i を a (resp. r) で表す。仮定より
 $\{a\} \neq \emptyset$ である。以下, $l=1, \dots, m-3$ かつ $u =$
 $0, 1, \dots, l-1$ とする。Lemma 1.1 により

$$\underbrace{h_{a \dots a \overbrace{r \dots r}^u}}_{m+l} \cdot i = 0$$

は次のように表せる。

$$(E_{l,u}) \dots \sum_{w=0}^u \sum_{v=l+2}^{m-1} \binom{m+l-u}{m+l-v-w} \binom{u}{v} \\
\left(\sum_j h_j \underbrace{a \dots a \overbrace{r \dots r}^w}_{m+l-v} \cdot \underbrace{h_{a \dots a \overbrace{r \dots r}^{u-v}}}_{v} \cdot h_j i \right) = 0$$

特に $E_{m-3,0}$ を作れば,

$$\sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-2} \underbrace{a \cdots a}_{m-2} h_j = 0$$

となる。添字 a は $1, 2$ の約 4 通り

$$(2.1) \quad \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-2} h_j = 0$$

を得る。よって $m \geq 5$ なら $E_{m-4, 0}$ を作れば

$$\begin{aligned} & \binom{2m-4}{m-2} \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-2} \underbrace{a \cdots a}_{m-2} h_j \\ & + \binom{2m-4}{m-3} \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-3} \underbrace{a \cdots a}_{m-1} h_j = 0 \end{aligned}$$

となり, (2.1) を用いて

$$\sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-3} h_j = 0$$

を得る。以下この論法をくり返して, 結局

$$(2.2) \quad \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_l h_j = 0, \quad \forall l \geq 2$$

を得る。次に $E_{m-3, 1}$ を作れば

$$\begin{aligned} & \binom{2m-4}{m-2} \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-2} \underbrace{a \cdots a}_{m-1} h_j \\ & + \binom{2m-4}{m-3} \sum_j h_j \underbrace{a \cdots a}_{m-2} \underbrace{a \cdots a}_{m-1} h_j = 0. \end{aligned}$$

となる。これと (2.2) より

$$\sum_j h_{j a_1 \dots a_{m-2}} h_{ji} = 0$$

を得る。このあと $E_{m-4,1}, \dots, E_{1,1}$ を順々に作れば、
(2.2) を得たようにして、

$$(2.3) \quad \sum_j h_{j a_1 \dots a_\ell} h_{ji} = 0, \quad \forall \ell \geq 2$$

を得る。同様に $E_{m-3,2}, \dots, E_{1,2}$ を考え

$$(2.4) \quad \sum_j h_{j a_1 \dots a_\ell} h_{ji} = 0, \quad \forall \ell \geq 2$$

を得る。特に (2.2), (2.3), (2.4) により $\ell=2$ とし

$$\sum_j h_{j k \ell} h_{ji} = 0$$

が得られるが、これは Ricci tensor S が平行である

ことを意味する。よって高橋 (恒) の定理によつて

$h_{ijk} = 0$ となり ([5]), Smyth の分類定理に帰着される ([2])。 了

注 $P_N(c)$ は正則等長に埋め込まれた Kähler $\mathbb{C}$ -空間で

$$\bar{\partial}^2 H = 0, \quad \bar{\partial} H \neq 0$$

と計算する必要があることが直接計算で確かめられる。

文 献

- [1] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638-667.
- [2] B. Smyth, Differential geometry of complex hypersurfaces. Ann. of Math., 85 (1967), 246-266.
- [3] R. Takagi, On higher covariant derivatives of the curvature tensors of Kählerian C -spaces, to appear in Nagoya Math. J., 91 (1983).
- [4] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14 (1977), 501-518.
- [5] T. Takahashi, Hypersurfaces with parallel Ricci tensor in a space of constant

holomorphic sectional curvature, J. Math.
Soc. Japan, 19 (1967), 199-204.