

第 2 種 Mathieu 関数 $fe_m(z, q), ge_m(z, q)$ の計算について

富士通・沼津工場・PP 事業部第 4 開発部 山下真一郎 (Shin-ichiro Yamashita)

Helmholtz の偏微分方程式を楕円座標を用いて変数分離して得られる方程式

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\lambda - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (1)$$

を Mathieu の微分方程式と言う。λ は分離定数であり、q はパラメータである。(1) 式を満足する周期関数を第 1 種 Mathieu 関数と言う。2 階の微分方程式は 2 つの独立な関数を満足するから第 1 種 Mathieu 関数に対するもう 1 つの関数を第 2 種 Mathieu 関数と言う。これは周期関数ではない。周期関数と成る為には、分離定数 λ を適当に選ばねばならない。Mathieu 関数の計算の難関は、第 1 に、この固有値の計算にある。固有値の計算は参考文献 [1] で述べたように、区分的最良近似式による。第 1 種 Mathieu 関数をフーリエ級数に展開すると

$$ce_{2n}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \cos(2k)z \quad (2)$$

$$ce_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)z \quad (3)$$

$$se_{2n+2}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2} \sin(2k+2)z \quad (4)$$

$$se_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \sin(2k+1)z \quad (5)$$

と表される。(2) ~ (5) を (1) に代入すると、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} A_2 &= V_0 A_0 ; A_4 = V_2 A_2 - 2A_0 \\ A_{2k+2} &= V_{2k} A_{2k} - A_{2k-2} ; k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= (V_1 - 1)A_1 \\ A_{2k+1} &= V_{2k-1} A_{2k-1} - A_{2k-3} ; k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 ; B_4 = V_2 B_2 \\ B_{2k+2} &= V_{2k} B_{2k} - B_{2k-2} ; k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= (V_1 + 1)B_1 \\ B_{2k+1} &= V_{2k-1} B_{2k-1} - B_{2k-3} ; k = 2, 3, 4, \dots \\ \text{ここに, } V_k &= (\lambda - k^2)/q \end{aligned} \quad (9)$$

さらに (6) から係数 A_{2k} を消去する。その為に $R_k = A_{k+2}/A_k$ と置き、次のよう消去する。

$$\begin{aligned} R_0 &= A_2/A_0 = V_0 ; R_2 = A_4/A_2 = V_2 - 2A_0/A_2 = V_2 - 2/R_0 ; \therefore R_0 = 2/(V_2 - R_2) \\ R_{2k} &= A_{2k+2}/A_{2k} = V_{2k} - A_{2k-2}/A_{2k} = V_{2k} - 1/R_{2k-2} ; k = 2, 3, 4, \dots \therefore R_{2k-2} = 1/(V_{2k} - R_{2k}) \end{aligned}$$

$$\text{従って} \quad V_0/2 = 1/(V_2 - 1/(V_4 - 1/(V_6 - \dots)) \quad (10)$$

同様に (7) ~ (9) に対応して

$$(V_1 - 1) = 1/(V_3 - 1/(V_5 - 1/(V_7 - \dots)) \quad (11)$$

$$0 = 1/(V_2 - 1/(V_4 - 1/(V_6 - \dots)) \quad (12)$$

$$(V_1 + 1) = 1/(V_3 - 1/(V_5 - 1/(V_7 - \dots)) \quad (13)$$

を得る。これは固有値を計算する為の特性方程式である。固有値の求め方および (2) ~ (5) の係数の求め方は参考文献 [1] に述べた。

第2種 Mathieu 関数をフーリエ級数に展開すると

$$fe_{2n}(z, q) = C_{2n}(q) \{ z ce_{2n}(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+2} \sin(2k+2)z \} \quad (14)$$

$$fe_{2n+1}(z, q) = C_{2n+1}(q) \{ z ce_{2n+1}(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} \sin(2k+1)z \} \quad (15)$$

$$ge_{2n+2}(z, q) = S_{2n+2}(q) \{ z se_{2n+2}(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} \cos(2k)z \} \quad (16)$$

$$ge_{2n+1}(z, q) = S_{2n+1}(q) \{ z se_{2n+1}(z, q) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1} \cos(2k+1)z \} \quad (17)$$

と表される。この第2種 Mathieu 関数のフーリエ係数を決めるには、これらを(1)に代入すれば、係数に関する関係式が導ける。 $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+2} \sin(2k+2)z$ と置き、(14)を(1)に代入すれば、

$$f'' + (\lambda - 2q \cos(2z))f = -2 ce'_{2n}(z, q) \quad (18)$$

と成り、さらに

$$\begin{aligned} (\lambda - 4)f_2 - q f_4 &= 4A_2 \\ (\lambda - 4k^2)f_{2k} - q\{f_{2k-2} + f_{2k+2}\} &= 4k A_{2k} \quad ; k \geq 2 \end{aligned} \quad (19)$$

同様に(15)～(17)を(1)に代入して

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 + q)f_1 - q f_3 &= 2A_1 \\ (\lambda - (2k+1)^2)f_{2k+1} - q\{f_{2k-1} + f_{2k+3}\} &= 2(2k+1) A_{2k+1} \quad ; k \geq 1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lambda g_0 - q g_2 &= 0 \\ (\lambda - 4)g_2 - q(2g_0 + g_4) &= -4B_2 \\ (\lambda - 4k^2)g_{2k} - q\{g_{2k-2} + g_{2k+2}\} &= -4k B_{2k} \quad ; k \geq 2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 - q)g_1 - q g_3 &= -2B_1 \\ (\lambda - (2k+1)^2)g_{2k+1} - q\{g_{2k-1} + g_{2k+3}\} &= -2(2k+1) B_{2k+1} \quad ; k \geq 1 \end{aligned} \quad (22)$$

である。これは3項無限次元連立一次方程式である。この方程式を解くには、消去法で $k=1 \sim n$ まで進み、2項式に変形する。一方、収束項 $^\dagger k=M$ から、2つの値を仮定して、逆に $k=n$ まで計算する。

この関係を分かりやすくする為に、次のように書き換える。

$$V_2 f_2 - f_4 = c_2 \quad (23)$$

$$-f_2 + V_4 f_4 - f_6 = c_4 \quad (24)$$

$$-f_4 + V_6 f_6 - f_8 = c_6 \quad (25)$$

.....

ただし、 $c_{2k} = 4kA_{2k}/q$; $V_k = (\lambda - k^2)/q$

ここで、2項式を作る為に、最初の式を V_2 で割り、2番目の式と加えて f_2 を消去すると

$$D_4 f_4 - f_6 = C_4 \quad (26)$$

$$\text{ここに, } D_4 = V_4 - 1/D_2; D_2 = V_2$$

$$C_4 = c_4 + C_2/D_2; C_2 = c_2$$

となる。同様にして

$$D_6 f_6 - f_8 = C_6 \quad (27)$$

$$\text{ここに, } D_6 = V_6 - 1/D_4; C_6 = c_6 + C_4/D_4$$

† Mathieu 関数の基本の漸化式 $f_{n+2} = V_n f_n - f_{n-2}$ は、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、0に向かうものと ∞ に向かうものの2つがある。 ∞ に向かうものは不要である。0に向かう速さと ∞ に向かう速さは同じであり、 ∞ に向かう計算はやさしい。 $k=n$ から順方向に計算して十分に大きな値(2倍精度で 10^{+32} 程度)と成る $k=M$ を収束項とする。

となる。以下同様にして

$$\begin{aligned} D_{2n} f_{2n} - f_{2n+2} &= C_{2n} \\ \text{ここに, } D_{2n} &= V_{2n} - 1/D_{2n-2} \\ C_{2n} &= c_{2n} + C_{2n-2}/D_{2n-2} \end{aligned} \quad (28)$$

と成り、2項式が出来る。次に逆向きに、 $k=M$ 項から $W_{2M}=1$; $W_{2M+2}=0$ として出発して

$$W_{2k-2} = V_{2k} W_{2k} - W_{2k+2} - c_{2k}; \quad k=M, M-1, \dots, n+1 \quad (29)$$

から、 W_{2k} を計算する。出発値を任意に選んだので、 W_{2k} は仮の値である。正しくは、

$$f_{2k} = W_{2k} - \theta A_{2k}; \quad k=M, M-1, \dots, n \quad (30)$$

である[†]。(30)を(28)の f_{2n} , f_{2n+2} に代入して θ を求めれば

$$\theta = (D_{2n} W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n}) / (D_{2n} A_{2n} - A_{2n+2}) \quad (31)$$

となる。この分母は桁落ちするので、次のように計算する。

$$\begin{aligned} [\text{分母}] &= D_{2n} A_{2n} - A_{2n+2} \\ &= (V_{2n} - 1/D_{2n-2}) A_{2n} - A_{2n+2} \\ &= (V_{2n} A_{2n} - A_{2n+2}) - A_{2n}/D_{2n-2} \\ &= (A_{2n-2}) - A_{2n}/D_{2n-2} \\ &= (D_{2n-2} A_{2n-2} - A_{2n}) / D_{2n-2} \end{aligned} \quad (32)$$

カッコ内は次数の1つ低い同型である。従って、

$$\begin{aligned} [\text{分母}] &= (D_2 A_2 - A_4) / (D_2 D_4 \cdots D_{2n-2}) \\ &= (V_2 A_2 - A_4) / (D_2 D_4 \cdots D_{2n-2}) \\ &= 2A_0 / (D_2 D_4 \cdots D_{2n-2}) \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。これで θ が次のように決まる。

$$\theta = (D_{2n} W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n}) (D_2 D_4 \cdots D_{2n-2}) / (2A_0) \quad (34)$$

この θ を(30)に代入して、 f_{2k} ; $k=M, M-1, \dots, n+1, n$ が決まる。さらに、2項式より後退代入して

$$f_{2k} = (C_{2k} + f_{2k+2}) / D_{2k}; \quad k=n, \dots, 2, 1 \quad (35)$$

により f_{2k} が決まる。同じように、(15)~(17)も決定できる。最後に正規化の為に

$$C_{2n}^2(q) \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 = C_{2n+1}^2(q) \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}^2 = S_{2n}^2(q) \{2g_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}^2\} = S_{2n+1}^2(q) \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1}^2 = 1 \quad (36)$$

とする。これで定数 $C_{2n}(q)$, $C_{2n+1}(q)$, $S_{2n+2}(q)$, $S_{2n+1}(q)$ も求められる。第2種 Mathieu 関数値の計算は、2つのフーリエ級数が主な計算である。これは Clenshaw の方法で計算すれば良い。

参考文献

- [1] 山下, Mathieu 関数について, 数値解析・軽井沢シンポジウム, 平成元年6月
- [2] McLachlan, N.W., Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publ., N.Y., 1964.

[†] 3項無限次元一次方程式の一般解は定数項を0と置いた独立な2つの解と特解の線型結合である。今の場合、 $k \rightarrow \infty$ とした時、 ∞ となる方は捨てる。定数項を0と置いた解は A_{2k} であり、 W_{2k} は特解である。従って、このように解は表せる。