

連続測定に起因する量子カオス

Quantum chaos caused by the continuous measurement

鎮目浩輔（筑波大図書館情報学系）、S.Habib（Los Alamos 研）、K.Jacobs（Griffith 大）

量子的 Duffing 振動子が弱い連続測定を受ける場合の運動を調べた。その結果、連続測定の強度が弱く系の運動に量子性が残る場合でも位置、運動量の量子的期待値の軌道にカオス的な振舞いが表れることを見出した。

1 背景：量子力学からの古典カオスの導出（連続測定＋古典極限）

近年、開いた量子系、即ち環境と相互作用する量子系の研究が進んでいる。その目標のひとつが量子-古典遷移の研究、即ち量子力学から「なぜ・どのように」古典力学が現れるかの研究である。古典力学と量子力学の間には大きな隔たりがあり、量子力学で $\hbar$ を単純に小さくしても古典力学に帰着するわけではない。Ehrenfest の定理は波束が小さい場合にその運動が古典的なものになることを保証するが、 $\hbar$ が小さくても波束が急速に広がる系では無力となり、量子古典対応は破れる。その代表的な例がカオス系である。実際、古典カオス系では軌道 (x, p) は 0 より大きい Lyapunov 指数 λ を持つが、同じハミルトニアンを使って Schrodinger 方程式を解き量子的期待値 $(\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$ の軌道の Lyapunov 指数を調べても 0 にしかならない。これはユニタリ性に起因するので、ユニタリ性がある限り $\hbar$ をどんなに小さくしてもカオス、即ち $\lambda > 0$ の軌道は得られず、従って古典力学は導出できないのである。

この問題は量子系と環境との相互作用や連続測定を考慮することで解決された。環境との相互作用はある極限で系に対して連続測定を行うことと等価になる。Caves 達 [1] は測定の簡単なモデルを立て、連続測定を受ける量子系の時間発展が次式の Stochastic Schrodinger 方程式で与えられることを示した。

$$|t + dt\rangle' = \exp \left[-2kdt \left\{ \hat{x} - \left(\langle \hat{x} \rangle + \frac{1}{\sqrt{4k}} \frac{dW}{dt} \right) \right\}^2 \right] \exp \left[\frac{-i\hat{H}dt}{\hbar} \right] |t\rangle \quad (1)$$

ここで k は観測の強度を表すパラメータ（彼らは位置 x の測定誤差導入により観測強度 k をコントロールできるとした）、 dW は Wiener 過程、左辺のケットにつけたダッシュはノルムが 1 でない（ため正規化が必要な）ことを意味する。式から観測は一種のガウスフィルタとして働き、波束の広がりを抑える。 k が大きいとカオス系でも波束は局在するので Ehrenfest の定理が働き運動は古典的になる。実際 Bhattacharay 達 [2] はこの方程式を代表的なカオス系の一つ Duffing 振動子

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2 + 0.5\hat{x}^4 - 10\hat{x}^2 + 10\hat{x} \cos 6.07t \quad (2)$$

に適用し、連続測定を前提としての古典極限、即ち $\hbar$ を小さくするのみならず k が大きい極限もとることで $(\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$ の軌道が古典と同じ Lyapunov 指数およびストロボ図を持つことを示した（彼らは $\hbar = 10^{-5}$, $k = 10^5$ に取った）。また Percival [3] も別の方程式を用いて散逸系で古典的な場合と同じス

トロボ図を得ている。彼らの結果は、観測の効果もダイナミクスの一部として積極的に取入れることにより自然にユニタリ性が破れ、古典力学を再現できた、とも見なせる。

これらの結果から、古典カオスは今や量子カオスとして理解されたと言えよう。即ち、上述の「連続測定を前提としての古典極限」という極端な状況において量子力学が作る $(\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$ の軌道がこれまで古典カオスと呼ばれていた現象を起こしている、と言える。

2 本研究：非古典極限におけるカオス

以上の背景から、次の疑問が自然に生じる：「古典極限という極端な状況でなくても、量子力学はカオスを引き起こすのでは？ もしそうならその性質は？」 観測なし ($k = 0$) ではカオスは起きず、 k 大では古典カオスになる。となるとその中間の量子-古典遷移の段階では量子力学固有のカオス（まさに量子カオス！）が起きる可能性がある。我々はこの意味での量子カオスの性質を調べるため、非古典極限のパラメータ領域、即ち「 $\hbar$:あまり小さくない、 k :あまり大きくない」で Stochastic Schrodinger 方程式を数値的に解き、期待値の軌道の振舞を調べ、特にその Lyapunov 指数とストロボ図を求めた。但し、この軌道には観測による波束の収縮の効果がノイズの形で入る。そのような noisy な軌道の Lyapunov 指数に関しては現在定説がないため、便宜的な手段として距離を比較するための 2 つの軌道で共通の乱数の realization を用いる、いわば「common noise 法」を用いた。

2.1 計算

系は上述の Duffing 振動子。 $\hbar = 0.01, k = 0.0005$ で 30 個の異なる初期条件を取り、それぞれで Stochastic Schrodinger 方程式を数値的に解いて Lyapunov 指数の平均とストロボ図を求めた。同じことを k を増加させ ($k = 0.001, 0.01, 0.1, 1$ 及び 10) で繰返した ($\hbar$ は 0.01 に固定)。

2.2 結果

波束の形 まず系がどの程度古典的になっているかを見るため、ある時刻 t での波束（の絶対値の自乗、即ち確率分布）のスナップショットを図 1 に示す。

図 1 波束 (確率密度) の形 横軸は x で範囲は -6~6。縦軸は確率密度。
(a) $k = 10$ での波束 (b) $k = 0.01$ での波束

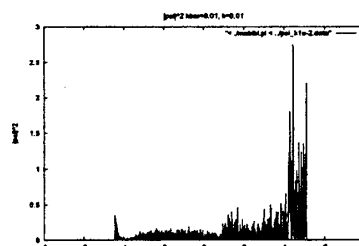
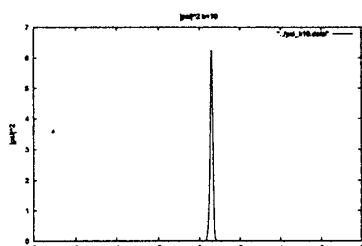


図 1 から $k = 10$ では波束はほとんど最小波束のまま動くので運動も古典的になると予想される。一方、 $k = 0.01$ では波束は広がりかつ複雑な形で、量子的な領域といえる。

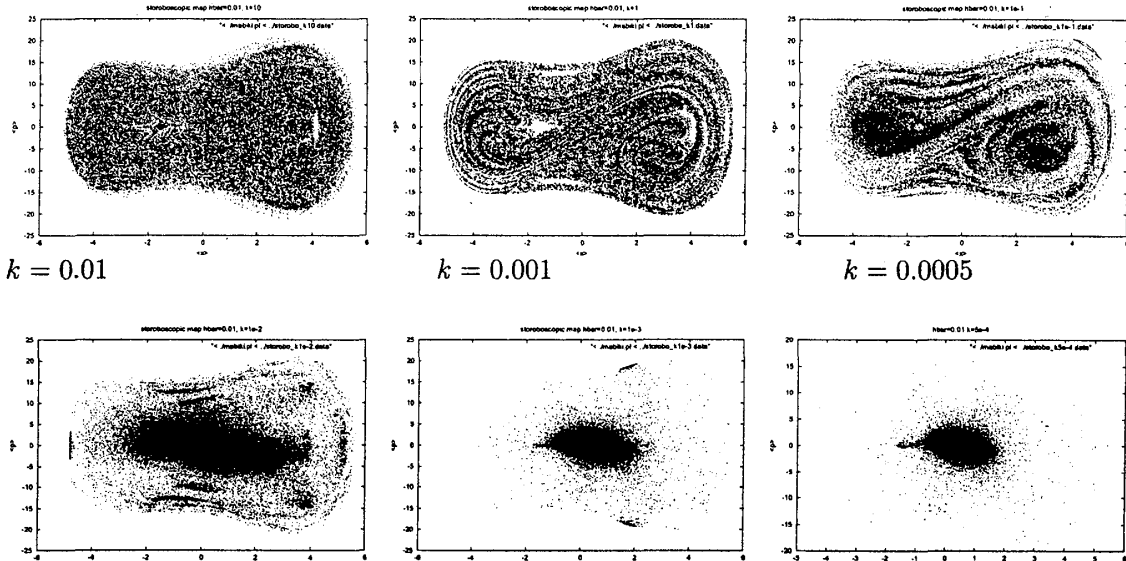
ストロボ図 図2にストロボ図、即ち $t = 0, T, 2T, \dots$ での $(\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$ のプロットを示す。

図2 各 k でのストロボ図。横軸は $\langle \hat{x} \rangle$ で範囲は $-6 \sim 6$ 、縦軸は $\langle \hat{p} \rangle$ で $-25 \sim 25$ 。

$k = 10$

$k = 1$

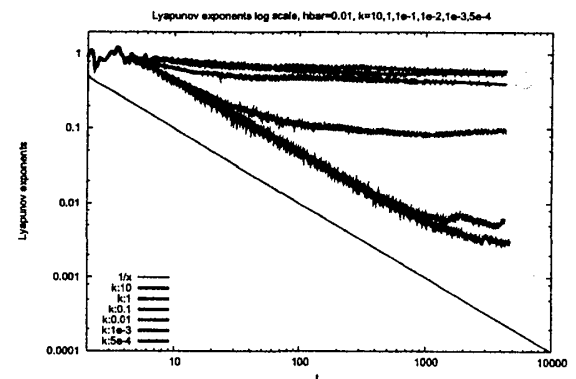
$k = 0.1$



$k = 10$ では古典的な構造、つまり一様なカオスの海とトーラスの島がはっきり現れ、 $k = 0.0005$ で観測無しの場合（ユニタリ発展）とほぼ同じ。その間の k 、即ち量子古典遷移の段階では古典的な構造を保ちながら一種の「流れパターン」とでも呼べるものが現れており、このパターンが特徴の一つと言える。

Lyapunov 指数 図3に Lyapunov 指数を示す。正確にいうと時刻 t までの有限時間 Lyapunov 指数 $\lambda(t)$ を、 t を横軸にしてプロットしたものである。観測なし ($k = 0$) ではユニタリ性から $1/t$ で 0 に収束する。図の斜めの直線は $1/t$ のグラフ。 $k > 0$ では初期は $1/t$ で減るが、ある時点で $1/t$ からずれ、有限の値に収束していく。右図での各線が対応する k と $t \sim 4000$ での最終値 λ_{fin} は $(k, \lambda_{fin}) = (10, 0.6), (1, 0.6), (0.1, 0.4), (0.01, 0.1), (0.001, 0.006), (0.0005, 0.003)$ 。特に系に量子性が残る $k = 0.01$ でも有限の値 (~ 0.1) に収束していく。 $k = 10$ だとほとんど古典的な場合と同じように振舞っている。

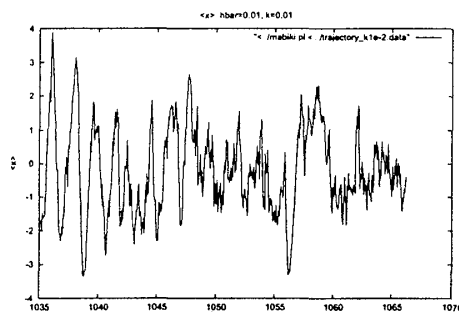
図3 Lyapunov 指数 横軸は t 、縦軸は t での Lyapunov 指数 (本文参照)。どちらもログスケール。各曲線の対応する k は上から順に 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0005。



期待値 $\langle \hat{x} \rangle$ の振舞い ストロボ図を見ると k が小さい時には点はほぼ中心に集中するが、いくつかの点は中心からかなり外れた周辺に現れる。この理由を調べるため図4に $\langle \hat{x} \rangle$ の軌道を示す。

軌道には滑らかな部分とぎざぎざな部分が見られる。これは波束の幅と関係している。量子古典遷移の中間的な領域では波束は時間とともに幅が変化する。狭い時には Eherenfest の定理が働くので古典的に振舞い、古典的な軌道同様滑らかに可能な位相空間全体に渡って大きく動く。一方、幅が大きい時には量子的に広がっているので期待値は中心あたりで小さくしか動かない。ストロボ図にもこれが反映されると考えられる。

図 4 期待値 $\langle \hat{x} \rangle$ の振る舞い。横軸は t で範囲は 1035 ~ 1070。縦軸は $\langle \hat{x} \rangle$ で $-4 \sim 4$ 。



3 まとめ

本研究では量子と古典の中間的な領域における連続測定のものでカオス的な振舞いを調べた。その結果、波束が大きく広がっている量子的な段階でも期待値の軌道は有限の Lyapunov 指数を持ちうることがわかった。またストロボ図に独特の「流れパターン」が表れる。さらに軌道を見ると、古典的な滑らかな軌道と、量子+観測による確率過程的なぎざぎざ軌道の両方を時間に応じてとりうるということがわかった。これらの結果から量子的な領域でもカオスは存在し、しかも独特の性質を持つと考えられる。

今後の課題は、まず Lyapunov 指数を求めるために用いた common noise 法の正当性の問題がある。少なくともノイズが十分小さくなる古典極限及び $\hbar$ が小さい場合には有効と考えられるが、その中間での物理的意味は十分明確とは言えない。但しこれは本研究が対象とした量子系に限らず、古典系でも(現実には避けられない)ノイズを考慮した時に生じる一般的な問題である。次にストロボ図に現れる「流れパターン」の説明である。前述の通り軌道を調べることで古典的なものと量子的なものがいり混じることの説明はつくものの、なお十分とは言えない。さらなる研究が必要である。

謝辞

本研究の数値計算は主に Los Alamos 研究所 Advanced Computing Laboratory の QSC システムにより行われた。

参考文献

- [1] C.M.Caves and G.J.Milburn, Physical Review **A36** (1987) 5543
- [2] T.Bhattacharay, S.Habib and K.Jacobs, Physical Review Letters **85** (2000) 4852
- [3] I.Percival "Quantum state diffusion" (Cambridge 1998)