

## 量子輸送現象入門

東京大学物性研究所 家 泰弘

## 1. はじめに

この講義では量子輸送現象の基礎的なことがらを学ぶ。輸送現象は電子系のフェルミ準位付近の低エネルギー励起を極めて敏感に反映する。特に「量子」という銘打つ意味は、量子化エネルギー準位、電子波の位相干渉、電荷の離散性、といった量子力学ならではの要素が特徴的に現れる現象というほどの意味である。特にそれらはいわゆるメソスコピック系や低次元系で、しかも低温において顕著に現れる。

量子輸送現象を考える場合、物理現象を特徴づける長さのスケールと系を特徴づけるスケールとの比較（あるいはそれらをエネルギースケールに翻訳したもの）が常に重要な意味を持つ。重要な長さのスケールとして、フェルミ波長  $\lambda_F = 2\pi/k_F$ 、平均自由行程  $\ell$ 、位相緩和長  $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$ 、熱拡散長  $\ell_T = \sqrt{\hbar D/k_B T}$  などがある（ $D$ は拡散係数）。これら相互および試料サイズ  $L$  との大小関係によってそれぞれ展開される物理が異なる。例えば、 $\lambda_F \approx L$  では量子閉じ込めによるエネルギー準位の離散性、 $\ell > L$  ではバリスティック伝導現象、 $\ell \approx \lambda_F$  では電子局在の効果、がそれぞれ顕著となる。

## 2. 電子局在

## 2.1 スケーリング理論

周期ポテンシャル中の伝導電子がブロッホ状態として結晶全体に広がったものになることは固体物理の入門で学ぶ。系に不純物や欠陥を導入することによってランダムポテンシャルを強くして行くと、電子状態は局在する傾向がある（アンダーソン(Anderson)局在）。アンダーソン局在の理解にはスケーリング理論が大きな役割を果たした。それを簡単に復習しよう。

大きさ  $L$  の  $d$  次元立方体試料を考え、その伝導度を  $\sigma$  とする。 $\sigma$  の次元は  $(e^2/\hbar)L^{2-d}$  であるから、 $\sigma = (e^2/2\pi^2\hbar)g L^{2-d}$  と定義すると、 $g$  は無次元のコンダクタンスを表す。

ある系の絶対零度における伝導度は、一般に、その系に含まれる電子密度、散乱体の種類と密度、それに系の大きさ  $L$  に依存する。あるコンダクタンスの値を与えるようなこれらの量の組み合わせは無数にあるわけであるが、スケーリング理論では次のことを仮定する。すなわち、 $g$  の値が同じならば  $L$  を変えたときの  $g$  の相対変化量も同じであるとする。つまり「 $(1/g)(dg/dL)$  が  $g$  のみの関数となる」と仮定する。これを式の形で表すと、

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g) \quad (1)$$

ということになる。(1)式の  $\beta(g)$  はどのような関数型を持っているだろうか。金属的伝導の極限 ( $g \rightarrow \infty$ ) では  $\sigma$  が系の大きさに依らないはずであるから、 $g \propto L^{d-2}$ 、したがって  $\beta(g) = d-2$  である。一方、局在電子の極限 ( $g \rightarrow 0$ ) では波動関数が指数的に減衰しているので、 $g \propto e^{-2\alpha L}$ 、すなわち  $\beta = \ln g + \text{const}$  となるものと考えられる。

$\beta(g)$  が滑らかな関数であるとする、その形は図1のようなものになるであろう。

1次元系や2次元系では  $g$  のあらゆる値に対して  $\beta(g)$  は負であるので、ある  $L$  において  $g$  が有限の値をとったとしても  $L$  を大きくしてゆくと(1)式にしたがって  $g$  は減少して行き、 $L \rightarrow \infty$  の系では必ず  $g = 0$  となる。つまり1次元や2次元では固有状態はすべて局在し、絶対零度では系は金属ではありえないという結論になる。しかし有限温度では、電子は非弾性散乱によって別の固有状態に移ることができるので、固有状態の乗り換えを次々に行うことによって伝導を担うことが可能となる。非弾性散乱を受けると電子が拡散する距離は  $L_e = \sqrt{D\tau_e}$ （ $D$ は拡散定数、 $\tau_e$ は非弾性散乱時間）である。電子はこの程度の距離を進むごとに非弾性散乱によって別の固有状態に移ることになる。この場合の伝導度は大きさ  $L_e$  の系の絶対零度における伝導度に相当するものとなる。

比較的乱れが小さくて金属的なふるまいを示すような系、すなわち  $g$  が十分に大きい

ような系については、 $\beta$ 関数を $1/g$ で展開することができる。通常のポテンシャル散乱については、

$$\beta(g) = (d-2) - \frac{2}{g} + \dots \quad (2)$$

となる。2次元の場合、 $\beta(g) = -2/g$ として(2)式を解くと、

$$g(L_\epsilon) = g(L_0) - 2 \ln(L_\epsilon/L_0) \quad (3)$$

$$= g_0 - \ln(\tau_\epsilon/\tau_0)$$

を得る。非弾性散乱時間 $\tau_\epsilon$ が温度に対して $T^{-P}$ の依存性を持つとすれば、伝導度の温度依存性は

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \frac{e^2 P}{2\pi^2 \hbar} \ln T \quad (4)$$

となる。第1項の $\sigma_0 = ne^2 \tau/m$ は古典的なドゥルーデ伝導度であり、第2項はそれに対する量子補正を表している。著しい特徴は第2項の係数が物質パラメータを含まず、 $e^2/\hbar$ という普遍量のみで書かれていることである。ここで行ったように、局在の効果は古典的伝導度に対する量子補正として扱う領域を弱局在(weak localization)と呼ぶ。なお、ここでは議論しなかったが、電子間相互作用の効果からも $\ln T$ に比例する量子補正が得られることがわかっている。

## 2.2 量子干渉としての電子局在

上記の量子補正の物理的起源は次のような電子波の干渉効果にある。図2のように、あるA点から出発して不純物ポテンシャルによる弾性散乱を受けながら固体中を拡散して再びA点に戻る電子の波を考える。このような経路は無数に存在するが、それぞれ別々の経路をたどってきた電子波は互いに特別な位相の関係を持たないので、それらの間の干渉効果は統計平均で消えてしまう。ところが、同一経路を逆向きにたどる2つの電子波を考えると、各散乱過程は互いに時間反転対称の関係にあり、

$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \langle -\mathbf{k} | V | -\mathbf{k}' \rangle$ という関係が成立する。あらゆる経路について、それを互いに逆向きに巡る2つの電子波はA点で必ず同位相となるので、それらはすべて互いに強め合うような干渉を起こす。このため、A点から出発した電子がA点に戻る確率は、

このような量子干渉効果がない場合に比べて高くなる。言い換えると、A点から他の場所への拡散が抑えられる。

電子局在の本質は、このように互いに時間反転の関係にある電子波同士の干渉にある。したがって時間反転対称を破るような摂動には局在を破壊する効果がある。その代表的なものは磁場である。図2の経路に含まれる磁束を $\phi$ とすると、A点に戻ってきた2つの電子波の間には $2e\phi/\hbar$ だけの位相差が生じている。経路ごとに囲む磁束は異なるから、この位相差も経路ごとに異なる。したがって、ある程度以上の磁束を囲む経路については、量子干渉の効果は統計平均によって消えてしまい、もはや局在に寄与しなくなる。磁場 $B$ が与えられたとき、位相のずれが1程度に達するような経路のサイズは $L_B \approx (\hbar/eB)^{1/2}$ 程度であり、この $L_B$ が(3)式の $L_\epsilon$ にとって代わることになる。伝導度の磁場による変化分(磁気伝導度)はほぼ

$$\Delta\sigma(B) = \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \ln B \quad (5)$$

で与えられる。より詳しい計算によれば、

$$\Delta\sigma(B) = \frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \left\{ \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{a\tau_\epsilon} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{a\tau} \right) + \ln \frac{\tau_\epsilon}{\tau} \right\} \quad (6)$$

となる。 $\psi(x)$ はダイガンマ関数

$a = 4\epsilon_F \tau \omega_c$ である。磁場によって量子干渉による局在が抑えられるために、伝導度が増加する。すなわち負の磁気抵抗として現れる。

## 2.3 アハラノフ・ボーム効果

前節で述べた電子局在効果による負の磁気抵抗は、ベクトルポテンシャルによって位相に影響を受けた電子波の干渉、すなわちアハラノフ・ボーム(Aharonov-Bohm)効果の一つの現れにほかならない。負の磁気抵抗効果では、いろいろな経路についての足し合わせの結果として $\ln B$ (2次元系の場合)という特徴的な磁場依存性が現れた。それでは電子の経路をできるだけ制限すれば、もっと直接的なアハラノフ・ボーム効

果が観測されるものと期待される。

図3のようなリング状のメゾスコピック試料に磁場をかけると、すべての経路はほぼ同じ面積 $S$ を囲むことになる。この場合、ある経路を互いに逆向きに廻る電子波がA点に戻ったときの位相差の磁束による変化分は $2e\phi/h = (2e/h)SB$ となる。したがって、電子波の干渉の様子は $(2e/h)S$ を周期とする磁場 $B$ の周期関数となる。この現象はAAS (Altshuler-Aronov-Spivak) 振動と呼ばれる。

一方、リングの両側をそれぞれ通った電子波の位相差 $\Delta\theta$ にはリングに含まれる磁束 $\phi$ に比例する $(e/h)\phi$ だけの余分の項が加わる。電子波の干渉はこの位相差を反映して $(e/h)S$ を周期として振動的に変化する。リングに含まれる経路ごとに位相差は異なるから、経路の数が多くなるにしたがってこのような効果は統計平均によって均されてしまうが、リングの幅を十分に狭くして経路の数を少なくすることができれば、このような干渉効果が統計平均で消えることなく磁気抵抗に反映される。これがAB (Aharonov-Bohm) 振動である。

## 2.4 コンダクタンスゆらぎ

リング形状でなくても、量子細線などメゾスコピックサイズの試料であって電子波の伝播経路の数が限られているならば、それらの間の干渉効果が統計平均によって消えずに観測にかかる。あるメゾスコピック試料の電気抵抗は、その試料中の散乱体の配置で決まる電子波の干渉パターンに依っている。いま仮想的に多数の散乱体のうち1個の位置を変えたとすると干渉パターンが変わり、それにともなって抵抗の変化が起こる。不純物原子を移動することは思考実験の域を出ないが、電気抵抗が系のパラメータに敏感に変化してゆらぎのような振る舞いを見せるというのはメゾスコピック系に広く見られる現象である。特に磁場をかけた場合には、ベクトルポテンシャルを通した電子波の干渉パターン変化が磁気抵抗の複雑な変動として観測される。これは一見するとノイズのようなふるまいであるが、磁場の関数として完全に再現性のある

ものである。このような干渉パターンの変化にともなうコンダクタンスのゆらぎは $e^2/h$ の程度になることが知られており、普遍的コンダクタンスゆらぎ(UHF—universal conductance fluctuation)と呼ばれる。特に磁気抵抗の変動パターンは、ある特定の試料の(「散乱体の配置」の詳細まで含めた)「個性」を反映したものであることから、「磁気指紋(magneto-fingerprint)」とも呼ばれている。

## 3. バリステック伝導

### 3.1 バリステック伝導

固体中の電子は真空中とは異なり、頻繁に散乱を受けながら運動している。十分低温において支配的な散乱は不純物や欠陥などが作る局所ポテンシャルによる弾性散乱である。前節で扱ったのはこのような散乱がかなり強く、電子の運動が拡散的になっている場合であった。一方、極めて高純度かつ欠陥の少ない金属単結晶試料では低温における電子平均自由行程 $l$ はマクロな長さにもなり得る。 $l$ が試料のサイズと比べられる程度に長くなれば、電子輸送は試料表面などの境界における散乱で支配されることになる。このような電子輸送の状況はバリステック(ballistic)すなわち弾道的と呼ばれる。

通常系の電気抵抗は例えば試料の長さが2倍になれば2倍になるといった線形のスケールに従う量である。その場合には抵抗率すなわち単位体積の試料の抵抗という量が定義でき、この抵抗率(あるいはその逆数の電気伝導度)は試料サイズには依らない物質固有の性質を表すものとされる。一方、バリステック伝導の領域ではそもそも電子散乱が試料のサイズに依存するわけであるから、局所的な抵抗率というものは意味を持たず、系全体としての抵抗を扱わなくてはならない。

最近では、半導体結晶成長技術の進歩によってGaAs/AlGaAsヘテロ構造などにおいて極めて移動度の高い2次元電子系が実現されている。しかも微細加工技術の進歩によってサブミクロンスケールの量子細線や量子ポイントコンタクトなど極微細構造中の電子輸送が調べられるようになり、バリ

スティック伝導の特徴を鮮やかに示す実験がいくつか行われている。しかしながら高純度金属を用いたバリスティック伝導の実験は、1950年代から既に行われている。

以下で紹介するバリスティック伝導の諸現象のうち、 $l > L$ という条件が主要な役割を果たしているもの——曲がり抵抗、電子集束など——は古典的な電子の軌道(trajec-tory)を考えるビリヤードモデルでかなりの程度理解することができる。これらの現象には系のサイズが小さいことは必ずしも本質的でなく、平均自由行程さえ十分に長ければマクロな試料でも本来観測されるはずのものである。(金属と対比して)半導体におけるバリスティック伝導では、さらにフェルミ波長そのものも試料幅と同程度になり得る( $\lambda_F \approx W$ )。その場合には限られた数の伝導チャンネルのみが伝導に寄与するという状況が実現される。このような $\lambda_F \approx W$ という条件が重要である現象——コンダクタンスの量子化など——では系がメソスコピックサイズであることが本質的であり、電子導波路のモデルに立つ必要がある。そのような場合を取り扱う上で、次に紹介するランダウアー・ビュティカー流の考え方が有効である。

### 3.2 ランダウアー・ビュティカーの式

図4(a)のように、左右2つの電子溜め(reservoir)が細線でつながっている場合を考える。左右の電子溜めの化学ポテンシャルに $\delta\mu$ の差があるときに細線を通る電流は

$$I = \frac{2e}{h} \delta\mu \sum_{n,m=1}^N |t_{n,m}|^2 \quad (9)$$

で与えられる。ここで、 $n$ や $m$ は細線中を伝播する電子波のモード(チャンネルと呼ぶ)を指定する添字であり、 $|t_{n,m}|^2$ はチャンネル $n$ から $m$ への透過確率を表わす。化学ポテンシャルの差が電位差による

( $\delta\mu = eV$ )のものであれば、系のコンダクタンスは

$$G \equiv \frac{I}{V} = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |t_{n,m}|^2 = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger) \quad (10)$$

となる。散乱がないときの透過係数は

$|t_{n,m}|^2 = \delta_{n,m}$ であるが、このときのコンダク

タンスは1チャンネルあたり( $2e^2/h$ )である。散乱が全くない場合にもコンダクタンスが無限大にならないのは、ある意味の接触抵抗と解釈することができる。

上記のコンダクタンスは2端子測定の場合である。図4(b)のように電流端子と電圧端子が別々にある4端子測定の場合の考え方は次のようにする。電圧端子3につながるリード線に電流が流れない条件は

$(\mu_1 - \mu_3)(1+R) = (\mu_3 - \mu_2)T$ である。左辺は電極3に流れ込む電流、右辺は電極3から流れ出す電流を表す。電圧端子4についても同様に、 $(\mu_1 - \mu_4)T = (\mu_4 - \mu_2)(1+R)$ となる。これらから

$(\mu_3 - \mu_4) = (1-T)(\mu_1 - \mu_2)$ が導かれ、4端子コンダクタンスは

$$G_{12,34} = \frac{I}{(\mu_3 - \mu_4)} = \frac{2e}{h} \frac{T}{1-T} \quad (11)$$

となることがわかる。散乱がない( $T=1$ )場合の4端子コンダクタンスは無限大である。

### 3.3 量子ポイントコンタクト

GaAs/AlGaAsヘテロ構造にスプリットゲート電極を付けた図5のような構造は量子ポイントコンタクト(QPC: quantum point contact)と呼ばれている。スプリットゲート電極に負のバイアス電圧をかけるとその直下の部分は空乏するので、狭い間隙の部分のみで左右の領域がつながった状況が実現される。間隙部分の有効幅 $W$ はバイアス電圧によって変えることができるので、これを適当に選べば伝導チャンネルが0本

(ピンチオフ)から1~数本という状況をつくることができる。スプリットゲートにかかるバイアス電圧を変化させて抵抗を測定すると階段状の変化が見られる。QPCの両側の広い部分の抵抗の分を差し引いてから逆数をとると、図5のようにQPCのコンダクタンスがスプリットゲートのバイアス電圧に対して階段的に変化し、しかもそのステップが( $2e^2/h$ )の整数倍になっている。このようなコンダクタンスの量子化が見られるのは、QPCが理想的な電子導波管として働き、電流が各伝搬モードに均等

に分配されていることを示している。QPCではチャンネルの長さ $L$ が電子の平均自由行程 $l$ に比べて十分に短いので、入射した電子は反射されたり他のチャンネルに散乱されたりすることなくバリスティックに通過する。つまり $|t_{n,m}|^2 = \delta_{n,m}$ であるため、ランダウアー公式によりコンダクタンスは $G = (2e^2/h)N_{ch}$  ( $N_{ch}$ は伝導チャンネルの数)となる。各モードがそれぞれ異なる群速度をもつにもかかわらず同一の電流を運ぶのは、電流が群速度とフェルミ準位の状態密度との積に比例していて、1次元の場合には両者がちょうどキャンセルするという事情によっている。なお、QPCにおける量子伝導度ステップの形状はポイントコンタクト部分の形状に依存することが知られている。

**3.4 電子集束 (coherent electron focusing)** バリスティック伝導を示す2次元電子系を用いて、図6に示したような2つのQPC (エミッターとコレクター) を並べた構造をつくる。これに対して紙面に垂直な磁場をかけると、サイクロトロン直径 $2R_c = 2\hbar k_F / eB$ の整数倍とエミッター・コレクター間の間隔 $L$ とが一致するとき、エミッターを出射した電子がもっとも効率よくコレクターに入射する。すなわち $B = (2\hbar k_F / eL) \times \text{整数}$ 、という磁場で電子の集束(focusing)が起こる。図6に見られるような高次の電子集束が起こるためには境界での反射が鏡面反射(specular reflection)的でなければならないが、ゲート電極による静電ポテンシャルの境界はこの条件をよく満たしている。逆向きの磁場では電子の集束点がコレクターとは反対の側に行ってしまうので、電子集束は磁場の一方向でしか起こらない。

また静電ポテンシャルを用いたレンズによる電子波の集束も実証されている。この実験では凹レンズのような形状のゲート電極に負のバイアス電圧をかけることによってその直下に低電子密度の(つまり $\lambda_F$ が長い)領域を作り出している。これは幾何光学で屈折率が小さい領域に相当するので、その境界で電子波の屈折が起こる。通常の

レンズとは逆で周囲よりも屈折率が小さいので凹レンズ形状が普通の凸レンズに相当することに注意されたい。

### 3.5 ビリヤードモデル

鏡面反射の境界でのみ散乱されるバリスティック電子の運動はかなりの程度まで、直観的な古典的粒子運動の描像(ビリヤードモデル)や幾何光学的なイメージで捉えることができる。以下に、その例をいくつか挙げる。

**曲がり抵抗(bending resistance)** : バリスティック伝導領域では境界による散乱が主であるから、試料の幾何学的形状によって電子の運動の軌跡が変化し、それが電気抵抗に反映される。例えば図7から一目瞭然のように、細線の折れ曲がりの部分で後方散乱が起こることによる抵抗の発生がある。この現象は曲がり抵抗(bending resistance)と呼ばれる。

**コリメーション(collimation)** : 図8のように出口のところが広がった形状をもつ細線から出射する電子は、その運動量の角度分布が前方に揃えられる。これをコリメーションと呼ぶ。このようなことが起こる原因は、ビリヤードモデルで考えれば、ホーン状部分での鏡面反射によって電子の運動量の方向がより前方に向けられることによる。また導波路的な見方では次のように考えることができる。電子波が細線に沿って進むとき、細線の広がり方が滑らか(短波長成分を持たない)ならば横方向の固有状態は断熱的に変化するので、線幅が広がるにつれて横方向の運動量 $\hbar k_y$ は減少する。つまり滑らかに広がるホーン状の部分を通過することによって進行方向に垂直な運動量が抑えられ、運動量ベクトルはより前方に集中することになる。

**ホール抵抗の消失(quenching of Hall resistance)** : メゾスコピックな試料においてホール効果を測定する場合、図9に示したような十字路での電子のふるまいが重要となる。図9には十字路における典型的な電子のビリヤード軌道がいくつか示されてい

る。この図からわかるように、電子の軌跡は十字路の形状の詳細に敏感に依存する。特に図9(b)のように、細線部分から十字路部分へ移るところが滑らかに変化している場合、前述のコリメーション効果のために、前方への集束が起こり、直角方向の細線に流れる電流が抑制されるために、低磁場におけるホール効果の消失が起こる。さらに極端な図9(c)のような場合には、負のホール抵抗さえ観測され得る。

#### 4. 磁気輸送現象と量子ホール効果

##### 4.1 ランダウ量子化

電子系に強磁場をかけると磁場に垂直な面内の運動はランダウ量子化されて離散的スペクトルとなる。ランダウ量子化の効果はドハース・ファンアルフェン振動など一連の磁気量子振動現象として現れ、金属のフェルミ面を探る有力な手段を提供している。2次元電子系に一樣な垂直磁場 $B$ をかけた場合を考えよう。ランダウゲージをとってベクトルポテンシャルを $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ と表すと、固有エネルギーは $\epsilon_N = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$  ( $\omega_c = \frac{eB}{m}$ )、となる。 $N$ はランダウ指数である。 $y$ 方向の波動関数は平面波であり、その波数とサイクロトロン中心座標とは $X = -\ell^2 k_y$ の関係がある。 $x$ 方向の波動関数は $X$ を中心とする調和振動子のそれである。

2次元電子では $z$ 方向の運動の自由度がもともたないため、垂直磁場によるランダウ量子化によってエネルギー Spektrum は0次元化する。指数 $N$ のランダウサブバンドに含まれる状態は $(N + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ のエネルギーをもっている。各ランダウサブバンドには、サイクロトロン運動の中心座標 $X = -\ell^2 k_y$ をどこに置くかという自由度に対応して、単位面積あたり $(eB/h)$ 個の状態が含まれている。ランダムポテンシャルが存在しない理想的な系ではこれらはエネルギー的に縮退しており、状態密度は $\delta$ 関数である。現実の系ではランダムポテンシャルのために図10に示したように、状態密度に有限の幅が生じる。

##### 4.2 量子ホール効果

古典的なホール抵抗率が

$\rho_{xy} = B/ne$  で与えられることは良く知られている。 $\nu$  番目のランダウ準位までちょうど詰まった状態は $n = \nu(eB/h)$  であるから、

これを代入すると $\rho_{xy} = (h/e^2)(1/\nu)$ を得る。

これだけならば、 $n$ と $B$ が特別の関係にあるときに、 $\rho_{xy}$ が特別の値になるということを行っているに過ぎない。量子ホール効果の驚くべき点は、 $n$ と $B$ のこの特別な関係から若干外れたところでも $\rho_{xy}$ が $h/e^2$ の整数分の1という量子化された値に留まるということにある。実際の実験では電子数一定で磁場を変化させることのほうが多いが、その場合にはある有限の磁場の範囲にわたって $\rho_{xy}$ が $h/e^2 = 25813\text{k}\Omega$ の整数分の1に量子化された一定値(ホールプラトー)をとり、同時に $\rho_{xx}$ はゼロとなる。量子ホール抵抗は少なくとも7桁以上の精度で $h/e^2$ に等しいことが実験的に確認されており、現在では逆に量子ホール抵抗を用いて抵抗標準を定義することが国際的に定められている。複雑な散乱過程によって決まっているはずの電子輸送係数がこのように物理定数だけで書ける普遍的な値をとることは驚きである。

量子ホール抵抗が物質の詳細に依らない普遍定数になるとすれば、それは極めて一般的な議論から導き出されるはずである。先に述べたように、 $\nu$ 番目のランダウサブバンドまでちょうど詰まっているときには、

$$\sigma_{xy} = \nu(e^2/h)$$

である。問題はフェルミ準位がそこからずれた場合である。図10に示されているように、ランダウサブバンドの状態密度はランダムポテンシャルの影響で有限の幅をもっている。サブバンドの端の方に位置する状態はポテンシャルの山または谷に局在した状態である。この系においてフェルミ準位を変化させて行くことを想定する。フェルミ準位が局在状態にある限りは伝導度の対角成分 $\sigma_{xx}$ はゼロでありホール伝導度は量子化値に留まる。

より一般に、ゲージ不変性を用いた議論やwinding numberの保存を用いた議論によって、

フェルミ準位が局在状態にある限りは $\sigma_{xy}$ が $e^2/h$ の整数倍の一定値をとり続けることが証明されている。しかし現実の実験系において存在する端の効果や電流分布の不均一性や非平衡性などがホール抵抗の量子化値にどのような影響を与えるかなど未解決の問題が残されている。

#### 4.3 エッジ状態 (edge state)

強磁場中の電子は小さな半径のサイクロトロン運動を行ないながら、等ポテンシャル線に沿ってドリフト運動する。試料の端のところでは閉じこめポテンシャルが急峻に立ち上がっているため、端に沿って伝播する電子の状態が存在する。これがエッジ状態で、古典的描像でのスキッピング運動に対応する。図11は強磁場におけるホール効果測定の状態を示したものである。強磁場下ではバルクの状態はランダムポテンシャルの極大または極小のまわりに局在してしまい、電流を運ぶことのできる伝播モードとしてはエッジ状態のみが残る。エッジ状態は試料の片側の端に局在していて、それぞれ一方向にのみ電流を運ぶことができる。逆向きの電流を運ぶエッジ状態は試料の反対側の端にあってマクロな距離だけ離れているので、電子の後方散乱はほとんど完全に抑制される。試料の同じ側のエッジ状態も、閉じこめポテンシャルが比較的緩やかであれば、互いに空間的に離れているのでエッジ状態間の散乱は起こりにくい。チャンネル間散乱が完全に抑制され、各チャンネルが独立に電流を運ぶ状況は断熱的輸送(adiabatic transport)と呼ばれる。ゼロ磁場ないしは弱磁場における断熱的輸送は量子ポイントコンタクトのようなメソスコピックスケールにおいてのみ見られる現象であるが、強磁場下のエッジ状態ではマクロな距離にわたって断熱的輸送が起こる。

このようなエッジ状態の考え方に立つと、量子ホール効果を次のように記述することができる。図11はホールバー試料におけるエッジ状態とバルク状態を模式的に示したものである。図11(c)は図11(b)のある横断面のエネルギー図である。各曲線は各ランダウ指数  $N$  の状態のエネルギーを表

している。フェルミ準位にかかるバルク状態は一番上のランダウサブバンドの状態であるがそれらは局在していて、エッジ状態のみが広がった状態となっている。エッジ状態はフェルミ準位以下にあるバルクのランダウサブバンドと一対一の関係にある。つまりエッジチャンネルの本数は、フェルミ準位以下にあるバルクのランダウサブバンドの数と同じである。

以下の議論では、各端子はそこにつながっているエッジチャンネルと透過確率1で電子をやりとりするような「理想的電極」とであると仮定する。電極Aの化学ポテンシャルが $\mu_A$ であるとするところから出るチャンネルには各々 $(2e/h)\mu_A$ の電流が供給される。また電極に入る電流は反射されることなくすべて吸収されるものとする。これらの条件は、各電極端子において局所的な熱平衡が達成されるものと仮定したことに相当する。そこで各端子における電流の収支を考えると次のような連立方程式が立てられる。

$$\begin{cases} I_S = \frac{2e}{h}(N\mu_S - N\mu_L) \\ I_R = \frac{2e}{h}(N\mu_R - N\mu_S) \\ I_D = \frac{2e}{h}(N\mu_D - N\mu_R) \\ I_L = \frac{2e}{h}(N\mu_L - N\mu_D) \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $N$ はエッジチャンネルの数である。 $I_S = -I_D = I$ ,  $I_R = I_L = 0$  という条件を用いると、 $\mu_S = \mu_R$ ,  $\mu_D = \mu_L$  となり、ホール抵抗は

$$\rho_{xy} = \frac{e(\mu_R - \mu_L)}{I} = \frac{1}{N} \frac{h}{2e^2} \quad (13)$$

と求められる。この場合の縦抵抗 $\rho_{xx}$ はゼロとなる。

以上の議論からわかるように、強磁場での4端子測定における縦抵抗 $\rho_{xx}$ とホール抵抗 $\rho_{xy}$ の違いは電極配置のトポロジカルな関係のみに依っている。電流端子対と電圧端子対が試料の端に沿って交互に並ぶならば、測定されるのはホール抵抗であり、それ以外の配置では縦抵抗が測定される。

#### 4.4 量子ポイントコンタクトとエッジ状態

前節で述べた量子ポイントコンタクト (QPC) と量子ホール効果には、ともに  $e^2/h$  を単位とする量子化コンダクタンスが現れるが、両者はどのような関係にあるのだろうか？ ホールバーの中央にQPCを置いた図12のような系の量子ホール状態を考えてみよう。

左右のエッジチャンネルのうちランダウ指数の高いほうの何本かはQPCを透過し、残りはQPCのところで反射される。何本のエッジチャンネルが透過になるかは、ゲートバイアスによってQPCのポテンシャル障壁を変えることによって変化する。広い2次元電子の部分のエッジチャンネルの数を  $N$ 、QPCを透過するエッジチャンネルの数を  $M$  とする。先の議論と同様にして次の連立方程式を立てることができる。

$$\begin{cases} -\frac{h}{2e}I = N\mu_6 - N\mu_1 \\ 0 = N\mu_1 - N\mu_2 \\ 0 = M\mu_2 + (N-M)\mu_3 - N\mu_3 \\ \frac{h}{2e}I = N\mu_3 - N\mu_4 \\ 0 = N\mu_4 - N\mu_5 \\ 0 = M\mu_5 + (N-M)\mu_2 - N\mu_6 \end{cases} \quad (13)$$

ポテンシャルの原点は任意であるから  $\mu_4 = 0$  とし、これを解くことにより、2端子抵抗は

$$R_{1,4} = \frac{(\mu_1 - \mu_4)}{eI} = \frac{\mu_1}{eI} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{M}, \quad 4 \text{ 端子縦}$$

$$\text{抵抗は } R_{14,23} = \frac{(\mu_2 - \mu_3)}{eI} = \frac{h}{2e^2} \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{N} \right)$$

となることがわかる。ホール効果については、QPCの同じ側にあるホール端子対で観測されるホール抵抗は

$$R_{14,35} = \frac{(\mu_3 - \mu_5)}{eI} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{N} \text{ というバルクの}$$

ランダウ準位の数を反映するのに対して、QPCを挟んで両側にあるホール端子対で観測されるホール抵抗は

$$R_{14,25} = \frac{(\mu_2 - \mu_5)}{eI} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{M} \text{ となり、QPC}$$

を透過するエッジチャンネルの数を反映す

る。QPCの障壁の高さを適当に選ぶと、透過と反射の境目にあるエッジチャンネルが、QPCを挟んでトンネル効果で弱く結合することにより半透過の状態になる状況も作ることができる。その場合には量子化値からずれた抵抗やホール抵抗が観測される。

#### 5. おわりに

講義ではこの他に分数量子ホール効果や、クーロンブロッケードなどの1電子帯電効果についても触れる予定であるが、既に割り当てられた紙数が尽きてしまったので、このテキストでは割愛させていただく。

#### 参考書

- [1] 長岡洋介, 安藤恒也, 高山一: 「局在・量子ホール効果・密度波」 岩波講座現代の物理学 (岩波書店, 1992)
- [2] 福山秀敏編: 「メソスコピック系の物理」 シリーズ物性物理の新展開 (丸善, 1996)
- [3] 川畑有郷: 「メソスコピック系の物理学」 新物理学シリーズ (培風館, 1997)

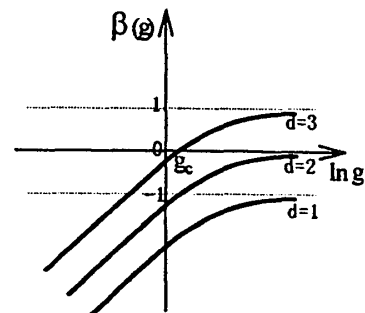


図1:  $\beta$  関数のふるまい。



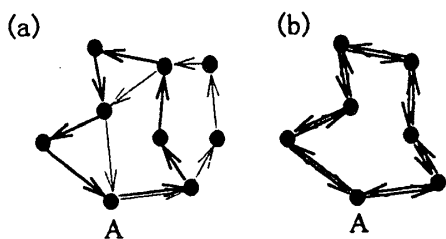


図2：電子波の干渉としてのアンダーソン局在.

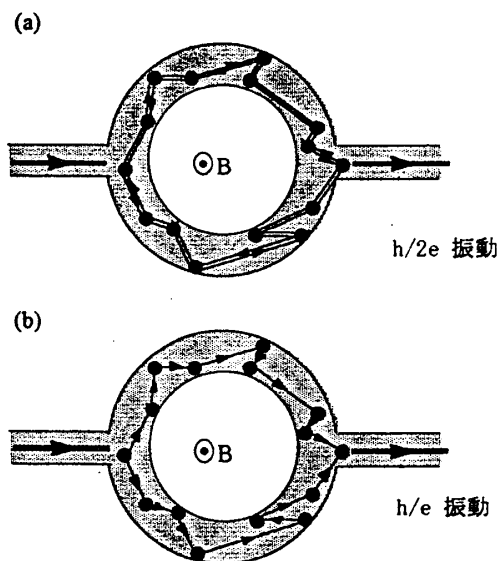


図3：メソスコピックリングにおけるAAS振動とAB振動

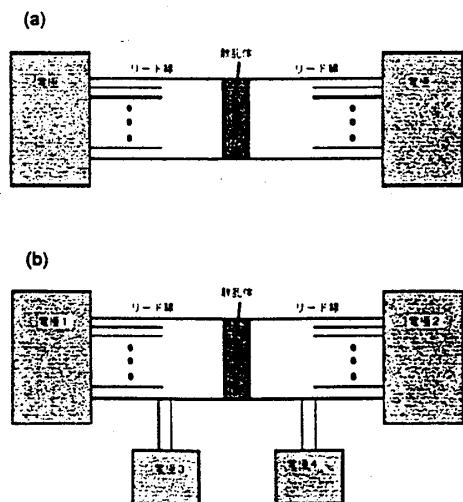


図4：ランダウアー公式を考える際のモデル1次元系.

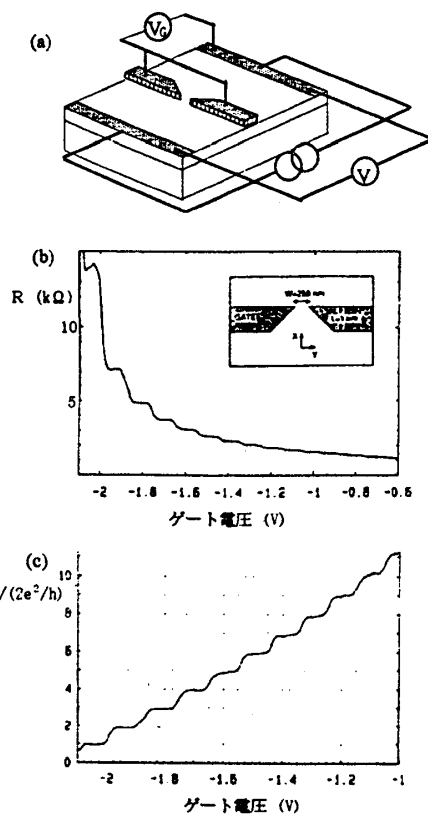


図5：量子ポイントコンタクトと量子化コンダクタンス.

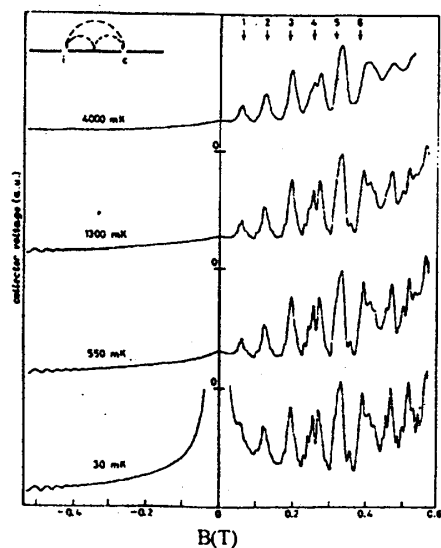
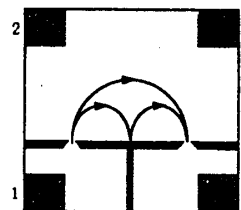


図6：2つのポイントコンタクトを用いた磁気収束の実験.

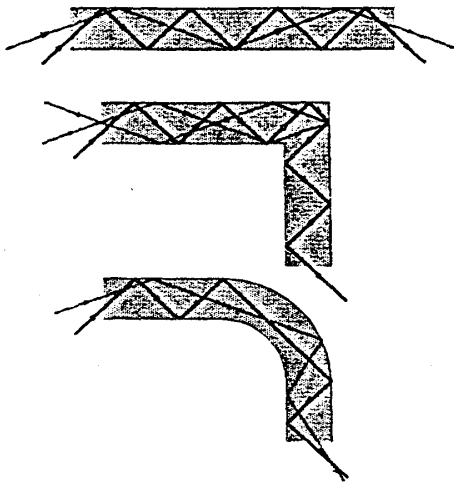


図7：ビリヤードモデルによる曲がり抵抗の説明。

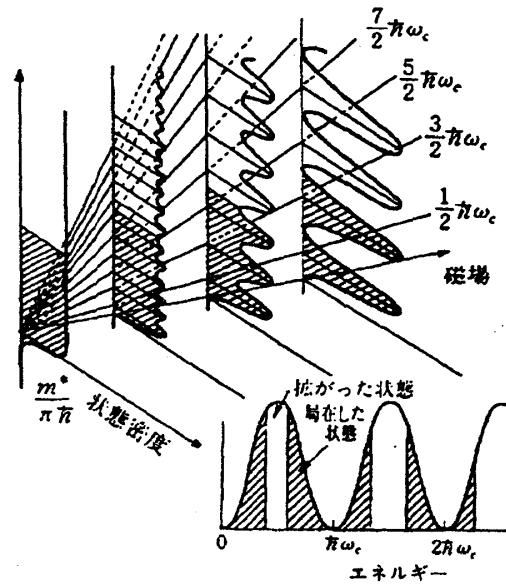


図10：磁場によるランダウ量子化。

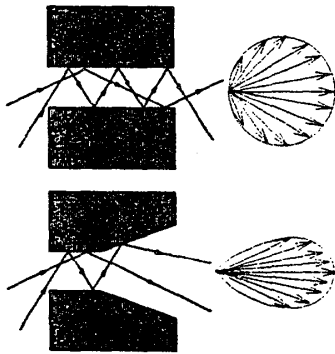


図8：コリメーション

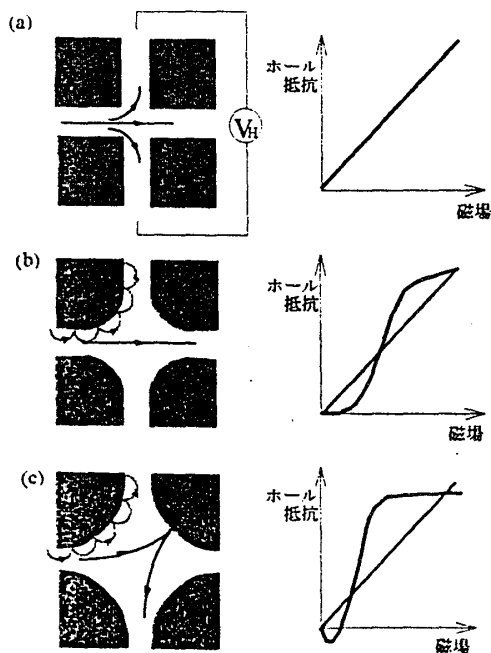


図9：量子細線十字路における電子の軌道。

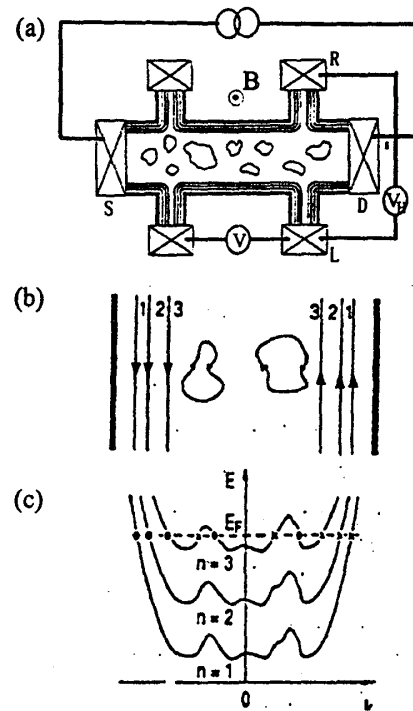


図11：量子ホール効果状態におけるエッジチャンネル。

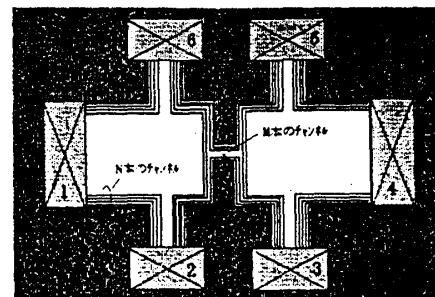


図12：量子ポイントコンタクトとエッジチャンネル