

確率論的統計力学モデルの臨界現象と lace expansion *

原 隆 (名大多元数理, hara@math.nagoya-u.ac.jp)

概要

統計力学的確率論モデル (self-avoiding walk, percolation, lattice trees and animals) の臨界現象と、その解析手段としての lace expansion についての review を行う。

(お断り) 例年になく講演者の体調が悪く、講演自体も予定の 2/3 くらいしかできませんでした。その後も体調不良が続く、この報告も不本意なものとならざるを得ませんでした。このような事情のため、基本的な事実を羅列するにとどめ、詳細は他の文献を参照して頂くことになります。講演の題材、特にレース展開と平均場的な臨界現象の詳細については参考文献の [1, 2] をご覧下さい。

1 臨界現象の概要

確率論的統計力学モデルの臨界現象をまず、概観しよう。大筋としては古典強磁性スピン系の示す臨界現象に類似のものであるが、モデル毎に異なった臨界次元が示唆されるなど、モデルに固有の面白い側面が見られる。

1.1 格子のお約束

この講演では、 d -次元正方格子: $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_j \in \mathbb{Z}\}$. 上のモデルを考える。格子の元 $x \in \mathbb{Z}^d$ は サイト、サイトのペアを ボンド と言うが、特に以下の 2 通りのボンドを考える:

- nearest-neighbour (n.n.) model: $b = (x, y)$ with $|x - y| = 1$.
- spread-out model: $b = (x, y)$ with $0 < |x - y| \leq L$ for some $L > 1$.

ボンドの集合を Ω で表すことにする¹.

1.2 Self-Avoiding Walk (SAW)

n -step の Self-Avoiding Walk (SAW) とは

- 順序づけられた $n + 1$ 個のサイトの集合 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n))$ で、
- 隣り合った点がボンドになっており: $(\omega(j), \omega(j+1)) \in \Omega$ ($0 \leq j < n$),
- 自分自身と交わらない (self-avoiding constraint) $\omega(i) \neq \omega(j)$ for $i \neq j$

ものである (基本文献は [2]). Walk のステップ数は $|\omega|$ で表す。最後の条件が重要であり、これがなければ普通のランダムウォークである。

*基研研究会「確率モデルの統計力学」2003 年 12 月 17 日

¹この 2 通りのモデルを考える理由は以下の通り: 我々の解析手段 (lace expansion) が非力なため、spread-out model は完全に解析できるが n.n. model は解析できない場合が往々にして起こる。臨界現象に関しての「常識」に従えば、両者は同じ universality class に属すると思われるので、spread-out model に関する厳密な結果から、n.n. model に関する同様な結果の 傍証 を得ようと言うのである。もちろん、この両者が同じ universality class に属すること自身は証明されておらず、以上の理屈はあくまで補助的なものであることは忘れてはならない

見たい量. 我々が興味を持つのは、以下に代表されるような量である：

- x から y へ, n ステップで行く SAW の数: $c_n(x, y) \equiv \#\{\omega : x \rightarrow y, |\omega| = n, \text{SAW}\}$.
- 原点から出発する n ステップ SAW の数: $c_n \equiv \#\{\omega : 0 \rightarrow \bullet, |\omega| = n, \text{SAW}\} = \sum_x c_n(0, x)$
- 平均二乗距離 (mean square displacement: n ステップ SAW の端点同士が平均してどのくらい離れているか): $\ell_n \equiv \langle |\omega(n)|^2 \rangle_n^{1/2}$. ここで $\langle \dots \rangle_n$ は原点から出発するすべての n ステップ SAW 全体についての期待値を表す (各 SAW には同じ重みを与えて).

また, これらの母関数に相当する量として, 以下も考える (これらは $0 \leq p < p_c \equiv 1/\mu$ で定義される, μ は以下で定義):

- x から y への 2 点関数: $G_p(x, y) \equiv \sum_n c_n(x, y) p^n = \sum_{\omega: x \rightarrow y} p^{|\omega|}$
- 帯磁率 (命名はスピン系との対応に由来): $\chi_p \equiv \sum_{n \geq 0} c_n p^n = \sum_{\omega: 0 \rightarrow \bullet} p^{|\omega|} = \sum_x G_p(0, x)$
- 相関距離: $\xi_p \equiv -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log G_p(0, n e_1)}$ (e_1 は 1 軸方向の単位ベクトル)

Connective Constant. $m+n$ ステップの SAW を n ステップのところで切ると n ステップの SAW と m ステップの SAW になるが, n ステップの SAW と m ステップの SAW をつないでも $m+n$ ステップの SAW になるとは限らない (互いに交わるかもしれない). 従って $c_{n+m} \leq c_n c_m$ が成り立ち, この $\log$ をとると, subadditive な数列の一般論から $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)^{1/n} = \mu$ なる定数 μ が存在することがわかる (この μ を *connective constant* という).

臨界現象に関する予想. 統計力学的における古典スピンモデルなどと同じく, これらの量の臨界現象については以下のような予想があった.

- 臨界指数 $\gamma, \nu, \eta, \dots$ が存在して

$$c_n \sim A \mu^n n^{\gamma-1}, \quad (\ell_n)^2 \sim D n^{2\nu}, \quad (n \nearrow \infty) \quad (1.1)$$

$$\chi_p \approx (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \xi_p \approx (p_c - p)^{-\nu}, \quad (p \nearrow p_c) \quad (1.2)$$

$$G_{p_c}(0, x) \approx |x|^{-(d-2+\eta)} \quad (|x| \nearrow \infty) \quad (1.3)$$

- 臨界指数は *universal* である (モデルの詳細によらない: 今の場合なら n.n. model でも spread-out model でも同じ). μ, A, D は, もちろん universal ではない.
- 臨界指数は $(2-\eta)\nu = \gamma$ のような スケーリング則 を満たす.
- 上方臨界次元 d_c があり, d_c より高次元では臨界指数は「簡単な値」(平均場の値)になる.
- 臨界指数の予想値は, 例えば γ なら, 4 次元以上で 1, 3 次元で 1.162, 2 次元で $\frac{43}{32}$.

以上の「予想」はどのくらい厳密に証明されているのかについては以下の定理がある². まず, 高次元では「平均場の」臨界指数が見られることについて:

定理 1.1 ([3, 4, 5, 6, 7])

- 5 次元以上の n.n. SAW と spread-out SAW では, $\gamma = 1, \nu = 1/2$ である.
- 十分に高次元の n.n. SAW, または 4 次元よりも上の spread-out SAW (ただし L は次元に応じて大きくとる) においては, $\eta = 0$ である.

² 2 次元の系についての最近の進歩は著しいものがあり, 講演者の手に負えるものではない. そのため, この講演では, 2 次元の系に関する結果は一切言及しない. 「以下の結果」という場合も, これ以外に 2 次元の結果は色々あるはずだ, とご理解頂きたい

次に, SAW のスケーリング極限については以下がある.

定理 1.2 ([8, 5]) 5次元以上の n.n. SAW と spread-out SAW のスケーリング極限は ブラウン運動 である (詳しくは以下参照).

上のスケーリング極限 (連続極限) を正確に言うとは以下ようになる. まず n 歩の SAW_ω をとり, SAW の各点 $\omega(i)$ を $n^{-1/2}$ に縮めた ものを折れ線でつないで $X_n(t)$ を作る:

$$X_n\left(\frac{j}{n}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \omega(j), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n); \quad \text{それ以外の } 0 < t < 1 \text{ は折れ線でつなぐ.}$$

$\mathbb{R}^d$ -値の連続関数 (sup norm) の全体を $C_d[0, 1]$ で表す. すると, $C_d[0, 1]$ 上の有界関数 f に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(X_n) \rangle_n = \int f dW$$

が成り立つ. ここで dW は $C_d[0, 1]$ 上の Wiener measure である (ただし, 拡散係数は D). つまり, このように作った X_n の全体は, ブラウン運動に 法則収束 する.

なお, SAW の上方臨界次元は $4 = 2 + 2$ と予想・解釈される (2 節参照).

1.3 Lattice Trees and Lattice Animals (LTLA)

Lattice tree (LT) と lattice animal (LA) は, SAW と percolation の中間にあるようなモデルである. Lattice animal とは単に連結したボンドの集合を指す. また, lattice tree とは閉じたループのない lattice animal (つまり, tree の構造を持ったもの) を指す.

我々が見たいものは

- a_n, t_n : n 個のボンドからなる LA と LT の数 (ただし, 原点を含む)
- ℓ_n : *radius of gyration* (回転半径; SAW の ℓ_n に相当)

などである. SAW の時と同様に, subadditivity から $(t_n)^{1/n} \rightarrow \lambda$ となるような λ が存在することがわかる. 更に SAW の時と同様に,

$$t_n \sim A' \lambda^n n^{-1-\gamma}, \quad (\ell_n)^2 \sim D' n^{2\nu} \quad (n \nearrow \infty) \quad (1.4)$$

などが期待される. 実際, 以下が証明されている.

定理 1.3 ([9]) 十分高次元の n.n. LT, および 8 次元より上の spread-out LT (ただし L は次元に応じて大きくとる) においては, $\gamma = 1/2, \nu = 1/4$ である.

スケーリング極限については, SAW の場合は $n^{-1/2}$ であったが, LT は $n^{-1/4}$ でスケールする.

定理 1.4 ([10]) 大きさ n の LT を $n^{-1/4}$ でスケールすると, その分布は *Integrated Super-Brownian Excursion (ISE)* と呼ばれるものに収束する.

上方臨界次元の予想は $d_c = 8 = 4 + 4$ である (2 節参照).

1.4 Percolation

今までのモデルはいわゆる「高温相」しか持たなかった。Percolation は「低温相」を持つ点で、古典スピン系などとの類似性が高い。Percolation は以下のように定義される（基本文献は [11]）。まず、格子の各ボンドに、確率変数 n_b を ($0 < p < 1$ はパラメーター)

$$n_b = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p \text{ で}) \quad \text{— occupied と言う} \\ 0 & (\text{確率 } 1-p \text{ で}) \quad \text{— vacant と言う} \end{cases}$$

となるように置く。ただし、 n_b は互いに独立にとる。

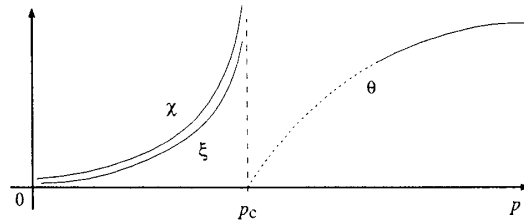
更に、各ボンドの n_b の状態が決まったところで、2つのサイト x, y について、 x と y が occupied bonds でつながれているとき、 x と y は連結されている (connected) といい、 $x \rightarrow y$ と書く。また、サイト x について、 $C(x)$ (connected cluster of x) を、 x に連結されているサイトの全体として定義する。以上の定義の下に、 n_b の分布について平均した量として、以下を定義する：

- 2点関数： $\tau_p(x, y) \equiv \mathbb{P}[x \rightarrow y]$
- 帯磁率： $\chi_p \equiv \sum_y \tau_p(x, y) = \langle |C(0)| \rangle_p$ 。これは原点でのクラスターサイズの期待値でもある ($|C|$ は集合 C 内のサイトの数)。
- 相関距離： $\xi_p \equiv -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \tau_p(0, n e_1)}$ (e_1 は1軸方向の単位ベクトル)。
- Percolation density: $\theta_p \equiv \mathbb{P}[|C(0)| = \infty]$ 。

このモデルでは以下が証明されている ([11] 参照)： $d > 1$ で、臨界確率 $p_c < 1$ が存在して、

- $p < p_c$ は「高温相」である [$\tau_p(x, y) \leq C e^{-m|x-y|}$; $\chi_p, \xi_p < \infty$, $\theta_p = 0$]; 「高温展開」の手法により証明。
- $p > p_c$ は「低温相」である [$\theta_p > 0$, $\chi_p = \infty$]; パイエルスの議論により証明。
- $p \nearrow p_c$ で、 χ_p, ξ_p は発散する。

以上を模式的に表すと以下のようなになる。 p_c での θ の連続性は一般の次元では証明されていない。



問題は $p \approx p_c$ 近辺での臨界現象であるが、以下が予想されていた。

$$\chi \approx (p_c - p)^{-\gamma}, \quad \xi \approx (p_c - p)^{-\nu}, \quad \frac{\langle |C(0)|^2 \rangle_p}{\langle |C(0)| \rangle_p} \approx (p_c - p)^{-\Delta} \quad (p \nearrow p_c) \quad (1.5)$$

$$\theta_p \approx (p - p_c)^\beta \quad (p \searrow p_c) \quad (1.6)$$

$$\tau_{p_c}(0, x) \approx |x|^{-(d-2+\eta)} \quad (|x| \nearrow \infty) \quad (1.7)$$

$$\mathbb{P}[|C(0)| = n] \approx n^{-1-1/\delta} \quad (p = p_c, n \nearrow \infty) \quad (1.8)$$

この点、厳密な結果は以下のようにになっている。

定理 1.5 ([12, 13, 14]) 十分高次元の n.n. percolation と, 6 次元より上の spread-out percolation では, $\gamma = 1, \nu = 1/2, \beta = 1, \eta = 0, \delta = \Delta = 2$ である.

いくつかの補足

- 低温相の帯磁率の臨界指数 γ' に関する厳密な結果はない—我々の低温相の理解はまだまだ不十分である.
- スケーリング極限は LT と同じように, $n^{-1/4}$ でスケールすると ISE になると思われるが, 技術的困難から不完全な結果しかない [15].
- 上方臨界次元の予想は $d_c = 6 = 4 + 2$ である (2 節参照). ただし, $d_c \geq 6$ は以下のようなハーススケリング不等式から導かれるので, $d_c = 6$ が証明されたと言っても良いだろう.
- ハーススケリング不等式とは, $d\nu \geq 2\Delta - \gamma$ のような臨界指数間の不等式である [16]. ここに平均場の値 ($\nu = 1/2, \Delta = 2, \gamma = 1$) を代入すると $d \geq 6$ がでてくる.

1.5 Oriented Percolation and Contact Processes

これらのモデルも重要であるが, 時間と紙数の制約から詳細は省く. 臨界次元は $4 + 1$ であると思われる. また, $4 + 1$ 次元より上の spread-out oriented percolation については, スケーリング極限が Super-Brownian Motion であることが, Hofstad と Slade により証明されている. Contact process については, Hofstad と Sakai による証明が進行中である.

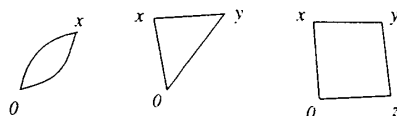
2 一息入れて: Bubble, Triangle, Square

異なるモデルでなぜ d_c が異なるのか, その理由の一端をかいつまんで説明する. 考えているモデルの臨界点での 2 点関数を $G(x, y)$ で表すと, 以下の定理が成立する³.

定理 2.1 それぞれのモデルが「平均場的」な臨界指数 γ の値を示す十分条件は以下の通りである.

$$\begin{aligned} (\text{SAW}) \quad & \sum_x G(0, x) G(x, 0) < \infty \implies \gamma = 1. \\ (\text{Percolation}) \quad & \sum_{x, y} G(0, x) G(x, y) G(y, 0) < \infty \implies \gamma = 1. \\ (\text{LTLA}) \quad & \sum_{x, y, z} G(0, x) G(x, y) G(y, z) G(z, 0) < \infty \implies \gamma = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2 点関数を実線で表すと, 上の諸量 (和の中身) は下図のようになるので, 定理の条件はそれぞれ, bubble condition, triangle condition, square condition と呼ばれる.



さて, 上の定理から, 臨界次元の見当をつけることができる. いま, 臨界次元よりほんの少しだけ高い次元にいとすると, 2 点関数は $G(x) \approx |x|^{2-d}$ と振る舞っているであろう. これを上 bubble, triangle, square diagrams に代入すると, 4, 6, 8 次元より上では有限になることがわかる.

³この定理はスピン系の臨界現象の解析での同様の研究に端を発しており, Leobowitz, Sokal, Aizenman, Fröhlich, Newman などたくさんの人の成果の結晶であるため, 少数の文献を挙げるのが難しい

(このところの計算には、 $G(x) \approx |x|^{2-d}$ のフーリエ変換が $\hat{G}(k) \approx |k|^{-2}$ と期待されることを、 $\int_{[-\pi, \pi]^d} d^d k \hat{G}(k)^n$ に代入するのがわかりやすい。) これは何の証明にもなっていないが、我々の期待する臨界現象があると思う限り、臨界次元の見当を与えてくれるものである。

SAW の bubble condition の “導出” ここで SAW について、上の bubble condition の証明の一部を紹介する。出発点は帯磁率の微分である。とにかく無心に微分すると：

$$p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p = p \frac{\partial}{\partial p} \sum_x \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} = \sum_x \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} |\omega|$$

$$\approx \sum_{x, y} \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} I[y \in \omega] = \sum_{x, y} \sum_{\substack{\omega_1: 0 \rightarrow x \\ \omega_2: 0 \rightarrow y}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \cap \omega_2 = \{0\}] = \text{avoid} \quad (2.1)$$

となる。右辺の $I[\dots]$ は $\dots$ の条件が満たされていれば 1、そうでないと 0 の indicator である。ここで右辺の indicator を 1 で押さえれば（この種の議論は Lebowitz が 1975 年に行ったものが最初であろう）

$$p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p \leq \sum_{\substack{\omega_1: 0 \rightarrow \bullet \\ \omega_2: 0 \rightarrow \bullet}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} = (\chi_p)^2$$

が得られる。 $\chi_p \approx (p_c - p)^{-\gamma}$ を仮定すると、上から直ちに $\gamma \geq 1$ が得られる。逆向きの不等式は

$$p \frac{\partial}{\partial p} \chi_p = (\chi_p)^2 - \sum_{\substack{\omega_1: 0 \rightarrow \bullet \\ \omega_2: 0 \rightarrow \bullet}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \cap \omega_2 \supsetneq \{0\}] = \text{avoid} - \text{avoid}$$

$$\geq (\chi_p)^2 - \sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 (\chi_p)^2 = (\chi_p)^2 \left[1 - \sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 \right] \quad (2.2)$$

となる。この不等式は、臨界点で $\sum_{z \neq 0} G(0, z)^2 < 1$ であるならば、 $\gamma = 1$ である、ことを主張するものである。Aizenman らはこのような理論を更に深化させて定理 2.1 を得た。□

上の証明を振り返ってみると、bubble condition は、2つの長い SAW が互いを避ける確率がゼロでないための条件として出てきた事がわかる。高次元では SAW は（通常のブラウン運動と同じく）2次元的なものと解釈できるから、2つのウォークが交わらないためには $2 + 2 = 4$ 次元の空間が最低でも必要である。これが SAW の臨界次元が 4 であることの一つの解釈である。

同様の議論は LTLA や percolation に対しても行うことができる。LTLA の場合は 2つの LT や LA が互いをよける条件として square condition が出てくる。この場合、LT や LA が 4次元の物体であると思えば、臨界次元は $4 + 4 = 8$ になる。

Percolation の場合はもう少し話が複雑である。Percolation の確率モデルとしての定義から、triangle condition は一つの percolation cluster が、もう一つのクラスターの背骨（backbone）をよける条件として現れる。クラスターは 4次元の物体であるが、背骨はランダムウォークと同じく、2次元であり、臨界次元は $2 + 4 = 6$ となる。

3 Lace expansion

厳密な結果、定理 1.1–1.5 のすべてのものがレース展開と呼ばれる手法で得られている。レース展開の特徴を粗っぽくまとめると以下の通り。

- レース展開は、モデルの 2 点関数に対する（ある種の）self-consistent な方程式を与える。

- n 次の項の数は、高々 c^n ぐらいである ($c \geq 1$ は定数)。これなら、収束する展開が得られる可能性がある !!

特に第2の点はレース展開の大きな特徴なので強調しておきたい。大抵の展開では n 次の項の数が $n!$ くらいになってしまい、収束級数を得るのは全く不可能であるが、レース展開にはこの困難が存在しない⁴。

以下では主に SAW に話を限り、レース展開の手法を少し説明する。

SAW のレース展開の導出。 SAW に対するレース展開の導出をかいつまんで説明しよう。出発点は 0 から x への 2 点関数 $G_p(0, x)$ である。 $x \neq 0$ の場合を考え、0 から x への SAW を、その第一歩で切る：

$$G_p(0, x) = \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} p^{|\omega|} = \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[(0, y) \circ \omega' \text{ は SAW}] = \sum_y \text{ (diagram) } \quad (3.1)$$

ここで、もともと SAW であった ω を $(0, y) \circ \omega'$ と分けたので、全体で SAW であるための条件をつけた。さて、これから inclusion-exclusion を行う。つまり、

$$I[(0, y) \circ \omega' \text{ は SAW}] = I[0 \notin \omega'] = 1 - I[0 \in \omega'] \quad (3.2)$$

であるので、これを (3.1) へ代入する。結果は

$$\begin{aligned} G_p(0, x) &= \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} \{1 - I[0 \in \omega']\} = \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p G_p(y, x) - \sum_{y: (0, y) \in \Omega} p \sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] \\ &= \sum_y \left[\text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

となるが、ここで ω' を ω' が 最初に 0 に来た時点で ω_1 と ω_2 に分ける：

$$\sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] = \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW}] = \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} \text{ (diagram) } \quad (3.4)$$

ややこしくなるので明記しなかったが、上の和では、 ω_1 は終点以外では 0 に来ていない (ω_2 にはそのような制限はない)。ここでまたもや、inclusion-exclusion を行う： $I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW}] = 1 - I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}]$ 。結果として、

$$\sum_{\omega': y \rightarrow x} p^{|\omega'|} I[0 \in \omega'] = G_p(y, 0) G_p(0, x) - \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}] \quad (3.5)$$

を得る。ところで、 $\omega_1 \circ \omega_2$ が SAW でないということは、 ω_1 と ω_2 が 0 以外の点で交わっていることだ。そこで、 ω_2 が ω_1 と、(ω_2 の向きで見て初めて) 交わったところを z とし、 z で ω_2 を更に 2 つに分ける：

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_2: 0 \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_2|} I[\omega_1 \circ \omega_2 \text{ は SAW ではない}] \\ &= \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z \\ \omega_{22}: z \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\} \text{ かつ } \omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW}] \\ &= \sum_z \text{ (diagram) } \end{aligned} \quad (3.6)$$

⁴後で少し説明するように、レース展開の各項にはある種の制限がついている。この制限を取り払うように更に展開を続けると、Schwinger-Dyson 方程式から得られる展開になり、項の数は $n!$ になる

ややこしくなるので、図では互いによける条件の一部しか描いていない。ここでまたもや $I[\omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW}] = 1 - I[\omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW ではない}]$ の形で inclusion-exclusion を行くと、

$$\begin{aligned}
 &= \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\}] G_p(z, x) \\
 &\quad - \sum_z \sum_{\substack{\omega_1: y \rightarrow 0 \\ \omega_{21}: 0 \rightarrow z \\ \omega_{22}: z \rightarrow x}} p^{|\omega_1|} p^{|\omega_{21}|} p^{|\omega_{22}|} I[\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\} \text{ かつ } \omega_{21} \circ \omega_{22} \text{ は SAW ではない}] \\
 &= \sum_z \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \omega_{21} \text{ from } 0 \text{ to } z, \omega_{22} \text{ from } z \text{ to } x, \omega_1 \text{ from } y \text{ to } 0. \\ \text{Diagram 2: } \omega_{21} \text{ from } 0 \text{ to } z, \omega_{22} \text{ from } z \text{ to } x, \omega_1 \text{ from } y \text{ to } 0, \text{ with a dashed line labeled "avoid" between } z \text{ and } x. \end{array} \right] \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

となる。以下これをくり返して行くことで、SAW に対するレース展開が得られる。結果を書くと、

$$G_p(0, x) = \delta_{0,x} + p \sum_y I[(0, y) \in \Omega] G_p(y, x) + \sum_y \Pi_p(0, y) G_p(y, x). \quad (3.8)$$

ここで、

$$\Pi_p(0, x) = - \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \text{loop from } 0 \text{ to } 0 \end{array} \delta_{0,x} + \begin{array}{c} \text{Diagram 2: } \text{loop from } 0 \text{ to } x \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3: } \text{triangle with vertices } 0, x, \text{ and another point} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 4: } \text{quadrilateral with vertices } 0, x, \text{ and two others} \end{array} - \dots \quad (3.9)$$

である。図の実線はそのように進む SAW についての和を表す。実際には図の SAW についての和には複雑な制限が付いているが（例：(3.7) の $\omega_1 \cap \omega_{21} = \{0, z\}$ ），これらはすべて各項を小さくする方向に働くので、ここでは省略した。

（補足）

- (3.7) の inclusion-exclusion では ω_{22} への制限は、 ω_{21} からのみ来ており、 ω_1 は関係なかった。このように、切り離す部分への制限を必要最小限に抑えることが、出てくるダイアグラムの種類を押さえ、ひいては項の数を制限することにつながる。
- レース展開のグラフからも $d_c = 4$ が以下のように示唆される⁵。レース展開を用いた解析が有効であるためには、 $\sum_x |x|^2 \Pi(0, x)$ が有限であることが必要である。そこで、 $G_p(x) \approx |x|^{2-d}$ を仮定して (3.9) の各項（に $|x|^2$ をかけたもの）のふるまいを見てみると、第2項以降はすべて、4次元より上でのみ有限であることがわかる（例：第2項は $\sum_x |x|^2 (|x|^{2-d})^3 = \sum_x |x|^{8-3d}$ であり、 $|x|$ の大きいところの寄与は $d > 4$ でないと収束しない）。

SAW のレース展開の解析。 SAW に対するレース展開の解析法をかいつまんで述べる。出発点は (3.8) で、両辺のフーリエ変換をとって $\hat{G}_p(k)$ について解くと、

$$\hat{G}_p(k) = 1 + p|\Omega| \hat{D}(k) \hat{G}_p(k) + \hat{\Pi}_p(k) \hat{G}_p(k) \quad \text{つまり} \quad \hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - p|\Omega| \hat{D}(k) - \hat{\Pi}_p(k)} \quad (3.10)$$

が得られる。ここで $\hat{D}$ は以下の $D(x) \equiv \frac{1}{|\Omega|} I[(0, x) \in \Omega]$ のフーリエ変換で、 $|\Omega|$ は0から出ているボンドの数。 $\Pi_p(x)$ の各項は（制限を取り払うことで） $G_p(x)$ の積や和で押さえることができるので、これは $\hat{G}_p$ に対する、広い意味での self-consistent equation と考えることができる。

次に (3.10) を解くのであるが、もちろん、exact に解くことはできない。しかし、今は臨界点で $G_p(x)$ が simple random walk の2点関数と同じように振る舞うことを示したいのであるから、exact に解けなくても可能性はある。実際、具体的な計算により以下が確かめられる。

⁵以下の議論は、レース展開が有効であるための必要条件によるものであるから、臨界次元に対する数学的な条件には全くなっていない。しかし、経験上、レース展開はかなり効率の良い展開であるので、展開が破綻することには（単なる技法の破綻以上の）本質的な理由があると思いたいのである

- まず $G_p(x) \leq 4S(x)$ であると仮定せよ. ここで $S(x)$ は臨界点における単純ランダムウォークの2点関数である.
- すると, $(S(x))$ の $1/d$ -展開などからわかるように $d \gg 1$ である限り, $\hat{\Pi}$ は非常に小さい.
- しかし, $\hat{\Pi}$ が十分に小さいならば, (3.10) は $G_p(x) \leq 3S(x)$ を意味する.

すなわち, 高次元においては, $G_p(x) \approx S(x)$ は (3.10) の self-consistent な解である事がわかる. これだけでは $G_p(x) \approx S(x)$ が可能な解の一つであると言ったに過ぎないが, 上で $G_p(x) \leq 4S(x)$ が $G_p(x) \leq 3S(x)$ に化けたようなことを用いて努力することにより, 実際に $G_p(x) \leq 3S(x)$ 以外の可能性がないことも証明できる (枚数が尽きてしまった. 詳細は [1, 2] などを参照されたい).

LTLA, percolation のレース展開 LTLA や percolation に対するレース展開も同様に導け, それぞれの $\Pi_p(0, x)$ の本質は以下ようになる (記述を簡単にするため, 少し不正確な表式を敢えて書いた. LTLA の展開にはもっと多くのグラフが出てくる. 詳細は [1, 2] などを参照):

$$\begin{aligned}
 (\text{SAW}) \quad & - \underset{0}{\circ} \delta_{0,x} + \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} - \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} + \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \overset{x}{\circ} - \dots \\
 (\text{Percolation}) \quad & \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} - \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} + \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} + \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} - \dots \\
 (\text{LTLA}) \quad & - \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} + \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} - \underset{0}{\circ} \overset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} \underset{x}{\circ} + \dots
 \end{aligned}$$

モデルによって出てくるグラフが異なることが見て取れる. また, $\sum_x |x|^2 \Pi_p(0, x)$ の収束性を (SAW と同様に) 考えると, $d_c = 6, 8$ が示唆される.

4 まとめ

確率論的統計力学モデルの臨界現象についての review を行った. ここ十数年の主な発展は以下のような特徴を持っている.

- 確率論的統計力学モデルの「高次元かつ高温側の臨界現象」はかなり解明された.
- 特に最近, その 連続極限が同定されつつある ことは大きな進歩である.
- 解析にはレース展開の手法が非常に有効であった. レース展開は, それが収束する場面では, 我々が欲しい情報をほとんどすべて与えてくれるので, 強力である. ただし, 展開が収束しなければどうしようもない (この意味で all or nothing).

しかし, 未解決問題も多く残されている.

- 「低温側」の臨界現象は, 厳密なレベルでは全然ダメである.
- 臨界次元以下も歯が立たない. 臨界次元直上 (対数補正があると期待される) ですら, 満足のいく結果はない. この意味ではスピン系よりも劣っている. (ただし, 2次元は conformal invariance の観点から大いに進歩している. ダメなのは3次元以上, 臨界次元以下である.)
- 以上の未解決問題に立ち向かうにはレース展開の本質的な発展, またはくりこみ群などとの併用, といった何らかの breakthrough が必要と原は考える.

参考文献

- [1] T. Hara and G. Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. In G. Grimmett, editor, *Probability and Phase Transition*, Dordrecht, (1994). Kluwer.
- [2] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser, Boston, (1993).
- [3] D.C. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **97**:125–148, (1985).
- [4] G. Slade. The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **110**:661–683, (1987).
- [5] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, **147**:101–136, (1992).
- [6] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Reviews in Math. Phys.*, **4**:235–327, (1992).
- [7] T. Hara, R. Hofstad, and G. Slade. Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high dimensional percolation and related models. *Ann. Probab.*, **31**:349–408, (2003).
- [8] G. Slade. The scaling limit of self-avoiding random walk in high dimensions. *Ann. Probab.*, **17**:91–107, (1989).
- [9] T. Hara and G. Slade. The number and size of branched polymers in high dimensions. *J. Stat. Phys.*, **67**:1009–1038, (1992).
- [10] E. Derbez and G. Slade. The scaling limit of lattice trees in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **193**:69–104, (1998).
- [11] G. Grimmett. *Percolation*. Springer, Berlin, (1989). Second edition has been published.
- [12] T. Hara and G. Slade. Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, **128**:333–391, (1990).
- [13] D.J. Barsky and M. Aizenman. Percolation critical exponents under the triangle condition. *Ann. Probab.*, **19**:1520–1536, (1991).
- [14] T. Hara and G. Slade. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. I. Critical exponents. *J. Stat. Phys.*, **99**:1075–1168, (2000).
- [15] T. Hara and G. Slade. The scaling limit of the incipient infinite cluster in high-dimensional percolation. II. Integrated super-Brownian excursion. *J. Math. Phys.*, **41**:1244–1293, (2000).
- [16] H. Tasaki. Hyperscaling inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.*, **113**:49–65, (1987).