

マーキング ネットワークにおけるある下界について

水野 響 (Hibiki Mizuno), 増田 一寿 (Kazuhisa Masuda), 岩田 茂樹 (Shigeki Iwata)

(電気通信大学 情報工学科)

1 あらまし

Floyd[1, p.230] により, (6,6)-マーキング ネットワークの最小比較器数は 16 以上であることが知られていたが, 本稿ではそれが 17 であることを証明する。

2 はじめに

あらかじめソートされた m 個の要素 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ と n 個の要素 $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ とを入力とし, $m+n$ 要素のソートされた数列 $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{m+n}$ を出力するネットワークを (m, n) -マーキング ネットワークという ([1, p.230])。 (m, n) -マーキング ネットワークを構成するのに必要な最小比較器数を $M(m, n)$ とする。Batcher[2] は *odd-even* 法により, (m, n) -マーキング ネットワークの最小比較器数の上限を示した。また, Yao and Yao[3] は, $M(2, n) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$ を, Miltersen, Paterson, and Tarui[4] は, $M(n, n) = n \log n + O(n)$ を示した。これらにより, $M(1, 1) = 1, M(2, 2) = 3, M(3, 3) = 6, M(4, 4) = 9, M(5, 5) = 13, M(7, 7) = 21$ は既に知られていたが, $M(6, 6)$ に関しては $16 \leq M(6, 6) \leq 17$ が知られているだけだった。本稿では $M(6, 6) = 17$ を証明する。 (m, n) -マーキング ネットワークにおいて, 入力 $z_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ である水平の線 (入力線) を *line z_i* と呼ぶ。また, 上端が *line z_i* で, 下端が *line z_j* (ただし, $z_i, z_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ かつ *line z_i* は *line z_j* より上にあるものとする) の比較器 (comparator) を $[z_i : z_j]$ と書く。 $\uparrow z_i$ は比較器の上端が *line z_i* かまたはそれより上であることを示し, $\downarrow z_i$ は比較器の下端が *line z_i* かまたはそれより下であることを示し, 比較器を表すのに $[\uparrow z_i : \downarrow z_j]$ の書き方もできるものとする。 (m, n) -マーキング ネットワーク N を図示したとき, N の入力線が上から順に $z_1, z_2, \dots, z_i, x_k, y_l, z_{i+1}, \dots, z_{m+n-2}$ (または $z_1, z_2, \dots, z_i, y_l, x_k, z_{i+1}, \dots, z_{m+n-2}$ の順で, $z_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\} - \{x_k, y_l\}$ かつ $1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n$ のとき, *line x_k* , *line y_l* からなるサブネットワークには, 比較器 $[x_k : y_l]$ (または $[y_l : x_k]$, 各々) が存在する。これを N の必須比較器 (essential comparator) という。必須比較器でない比較器を選択比較器 (selective comparator) という。

さらに (m, n) -マーキング ネットワークの入力線が上から順に *line z_1* , *line z_2* , $\dots$, *line z_{m+n}* (ただし, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n\}$) であるとき, このネットワークの入力 Z を $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_{m+n} : p(z_1, z_2, \dots, z_{m+n}) \rangle$ で表す。ただし, $p(z_1, z_2, \dots, z_{m+n})$ は $z_1, z_2, \dots, z_{m+n}$ の大小関係を示す条件である。

(m, n) -マーキング ネットワーク N に 2 個の比較器 α, β が存在して, α の上端 (または下端), β の上端 (または下端) が N 上の同一の水平線上にあり, α が β より入力側に近い方にあるとき, $\alpha \prec \beta$ と書く。

3 準備

補題 1. $M(m+2, n+1) \geq M(m+1, n) + 3 \quad (m, n \geq 1)$

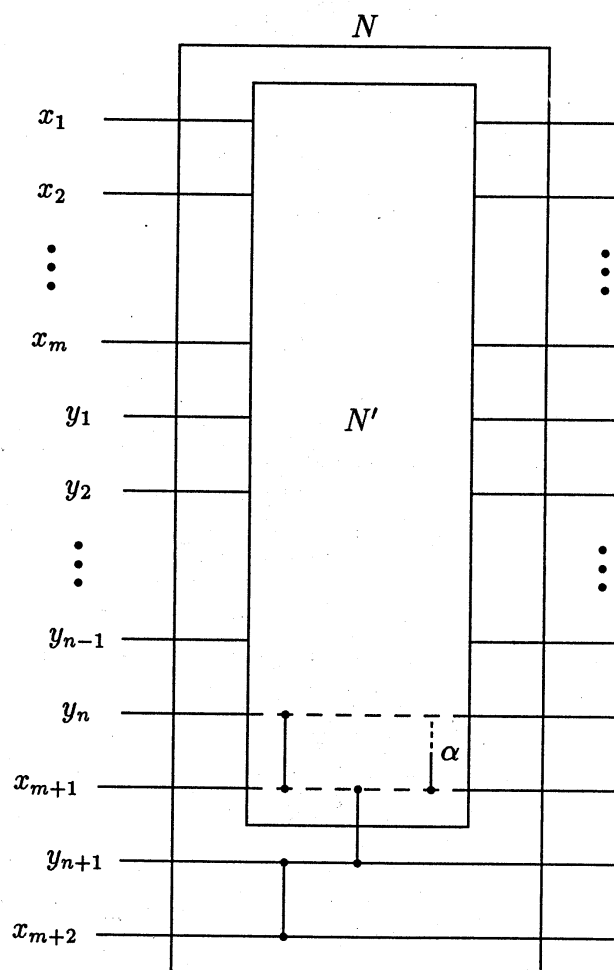


図 1 $(m+2, n+1)$ -マージング ネットワーク

証明. $m, n \geq 1$ とする。Floyd [1] より $M(m+2, n+1) \geq M(m+1, n) + 2$ が成立する。 $M(m+2, n+1) = M(m+1, n) + 2$ と仮定し、 $M(m+1, n) + 2$ 個の比較器で構成される $(m+2, n+1)$ -マーキング ネットワークを N とする。また、 N の入力線を上から順に $lines\ x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n, x_{m+1}, y_{n+1}, x_{m+2}$ とする。 N には必須比較器 $[x_{m+1} : y_{n+1}]$, $[y_{n+1} : x_{m+2}]$ が存在する。また、 N から下の 2lines を除いた $(m+n)$ lines からなるサブネットワーク N' 上に $M(m+1, n)$ 個の比較器が存在するので、 N にはこれ以上の比較器は存在しないことになる。 $x_{m+1} \leq y_n$ となる入力を考えれば、 $[y_n : x_{m+1}] \prec [x_{m+1} : y_{n+1}] \prec [\uparrow y_n : x_{m+1}]$ である。ところが、 N' は $M(m+1, n)$ 個の比較器で構成されるが、 N' 中の比較器 $[\uparrow y_n : x_{m+1}]$ は要素の交換が起きない。すなわち N' から $[\uparrow y_n : x_{m+1}]$ を取り除いたネットワークも $(m+1, n)$ -マーキング ネットワークとなり、 $M(m+1, n) - 1$ 個の比較器で構成される。これは $(m+1, n)$ -マーキング ネットワークの最小比較器数が $M(m+1, n)$ であることと矛盾する。よって補題は証明された。(証明終)

系 1. $M(4, 3) = 8$

証明. Batcher により、 $M(4, 3) \leq 8$ が既にわかっている。[5] により、 $M(3, 2) = 5$ なので、補題 1 より $M(4, 3) = 8$ が得られる。

補題 2. 3 個の比較器で構成される $(2, 2)$ -マーキングネットワークは 1 通りであり、図 2 に示す。

証明. 入力線が上から順に、 x_1, y_1, x_2, y_2 の $(2, 2)$ -マーキング ネットワークを N とし、 N の必須比較器を $A = [x_1 : y_1]$, $B = [y_1 : x_2]$, $C = [x_2 : y_2]$ とする。 N の入力線が $\langle x_1, y_1, x_2, y_2 : y_1 < y_2 < x_1 < x_2 \rangle$ のとき、要素 x_1 は、最終的に $line\ x_2$ へ移動するので、 $A \prec B$ かつ $C \prec B$ となる。従って、3 個の比較器で構成される $(2, 2)$ -マーキング ネットワークは図 2 に示す 1 通りである。(証明終)

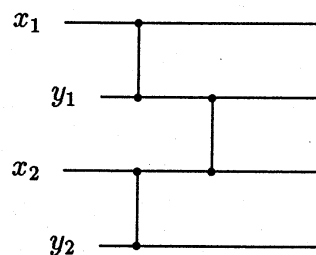
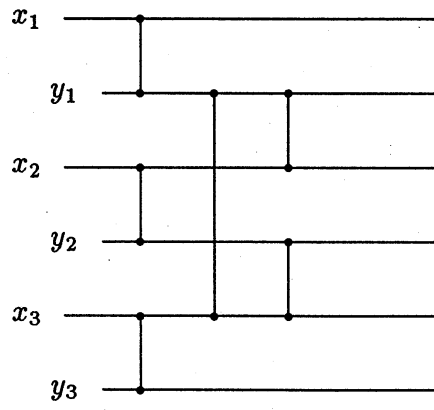


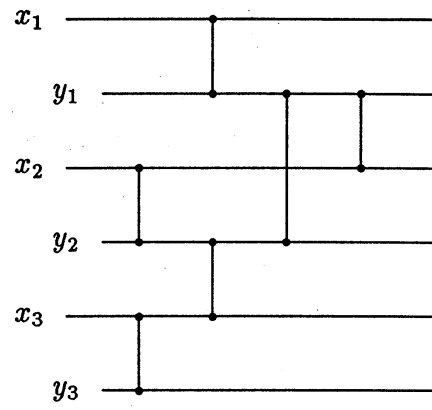
図 2 3 個の必須比較器で構成される $(2, 2)$ -マーキング ネットワーク

補題 3. 6 個の比較器で構成される $(3, 3)$ -マーキングネットワークは 4 通りであり、図 3 に示す。

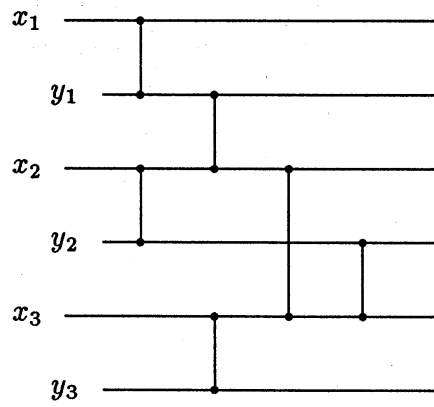
証明. 入力線が上から順に、 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ で、比較器数が 6 の $(3, 3)$ -マーキングネットワークを N とする。 N には 5 個の必須比較器 $[x_1 : y_1]$, $[y_1 : x_2]$, $[x_2 : y_2]$, $[y_2 : x_3]$, $[x_3 : y_3]$ と 1 個の選択比較器が存在する。 N の 3 個のサブネットワーク、 $lines\ x_1, y_1, x_2, y_2$ で構成されるサブネットワーク (1), $lines\ y_1, x_2, y_2, x_3$ で構成される N のサブネットワーク (2), $lines\ x_2, y_2, x_3, y_3$ で構成されるサブネットワーク (3), に着目すると、これらはすべて、 $(2, 2)$ -マーキングネットワークだとわかる。選択比較器が $[x_1 : y_3]$ のとき、補題 2 より、 $lines\ x_1, y_1, x_2, y_2$ で構成されるサブネットワークと、 $lines\ y_1, x_2, y_2, x_3$ で構成されるサブネットワークのうち、少なくとも 1 個が $(2, 2)$ -マー



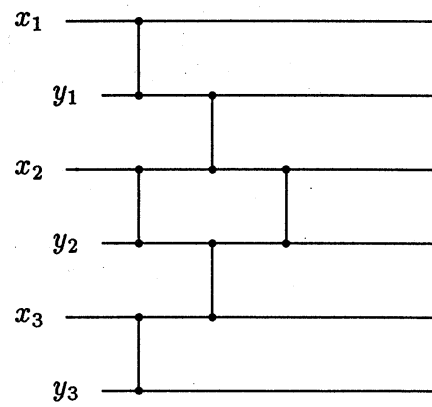
(a)



(b)



(c)



(d)

図3 6個の比較器で構成される(3,3)-マーキング ネットワーク

ジング ネットワークを構成できなくなる。選択比較器 $[x_1 : y_3]$ は (2, 2)-マージング ネットワークを構成するのに役に立たないことに注意する。従って、選択比較器が $[x_1 : y_3]$ のときは、(3, 3)-マージング ネットワークを 6 比較器で構成できない。同様に、選択比較器が $[y_1 : y_3], [x_2 : y_3], [y_2 : y_3]$ かまたは $[x_3 : y_3]$ のときも (3, 3)-マージング ネットワークを 6 比較器で構成できないことが示せる。

対象性から、選択比較器が $[x_1 : x_3], [x_1 : y_2], [x_1 : x_2]$ かまたは $[x_1 : y_1]$ のときも同様に (3, 3)-マージング ネットワークを 6 比較器で構成できない。

選択比較器が $[y_1 : x_2]$ のときを考える。 $line x_2, y_2, x_3, y_3$ で構成されるサブネットワークが、(2, 2)-マージング ネットワークなので、 $[x_2 : y_2] \prec [y_2 : x_3]$ となる。ここで、 N の入力 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 : x_1 < x_2 < x_3 < y_1 < y_2 < y_3)$ を考えると、 N は (3, 3)-マージング ネットワークなので、要素 x_3 は最終的に $line x_2$ に移動する。ところが、 $line y_2$ に接続している比較器は $[x_2 : y_2]$ と $[y_2 : x_3]$ のみで、 $[x_2 : y_2] \prec [y_2 : x_3]$ となっているので、要素 x_3 は $line x_2$ へ移動できない。これは N が (3, 3)-マージング ネットワークということと矛盾する。同様に、選択比較器が $[y_2 : x_3]$ のときも、(3, 3)-マージング ネットワークを 6 比較器で構成できないことが示せる。

残りの場合、つまり選択比較器が $[y_1 : y_2], [x_2 : x_3], [y_1 : x_3]$ かまたは $[x_2 : y_2]$ のときは、4 通りすべての場合に各々 1 個だけ、図 3 で示される 6 比較器で構成される (3, 3)-マージング ネットワークが存在する。詳細部分については、読者の皆様の手に委ねることとする。(証明終)

補題 4. 8 個の比較器で構成された (4, 3)-マージング ネットワークを N とし、 N の入力を上から順に $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4$ とする。 N に必須比較器 $A = [y_3 : x_4]$ と、選択比較器 $\alpha = [\uparrow y_3 : x_4]$ とが存在するとき、 $\alpha \prec A$ である。

証明. $A \prec \alpha$ とする。 N の入力要素の中で最大のものは y_3, x_4 のいずれかであるので、必須比較器 A によって、 y_3, x_4 のうち大きい方が $line x_4$ へ移動する。従って、選択比較器 α は要素の交換が起きない比較器である。すると、選択比較器 α の存在の有無に関わらず、 N は (4, 3)-マージング ネットワークとなるので、(4, 3)-マージング ネットワークは 7 個の比較器で構成できることになる。これは系 1 と矛盾する。(証明終)

4 結果

本節では、主定理の $M(6, 6) = 17$ を示す。

定理 . $M(6, 6) = 17$

証明. Floyd [1], Batcher [2] により、 $16 \leq M(6, 6) \leq 17$ であることは既に判明している。よってここでは $M(6, 6) = 16$ と仮定する。16 個の比較器で構成される (6, 6)-マージング ネットワークを N とし、 N の入力を上から順に $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_6, y_6$ とする。すると N には 11 個の必須比較器と、5 個の選択比較器が存在する。 $N_1(N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$ を N の上から 5 本の入力線 (N の下から 7 本の入力線, N の上から 7 本の入力線, N の下から 5 本の入力線, N の上から 6 本の入力線, N の下から 6 本の入力線, 各々) で構成される N のサブネットワークとする。 N_1, N_4 は各々、(3, 2)-, (2, 3)-マージング ネットワークであり、 N_2, N_3 は各々、(3, 4)-, (4, 3)-マージング ネットワークであり、 N_5, N_6 は両方とも (3, 3)-マージング ネットワークである。従って、Yao and Yao[3] により N_1 と N_4 は 5 個以上の比較器を持ち、 N_2 と N_3 は 8 個以上の比較器を持つ。仮定と Floyd [1] により、 N_1 は 5 個の比較器を持ち、 N_2 は 8 個の比較器を持ち、 $line x_3$ と $line y_3$ 間には 3 個の比較

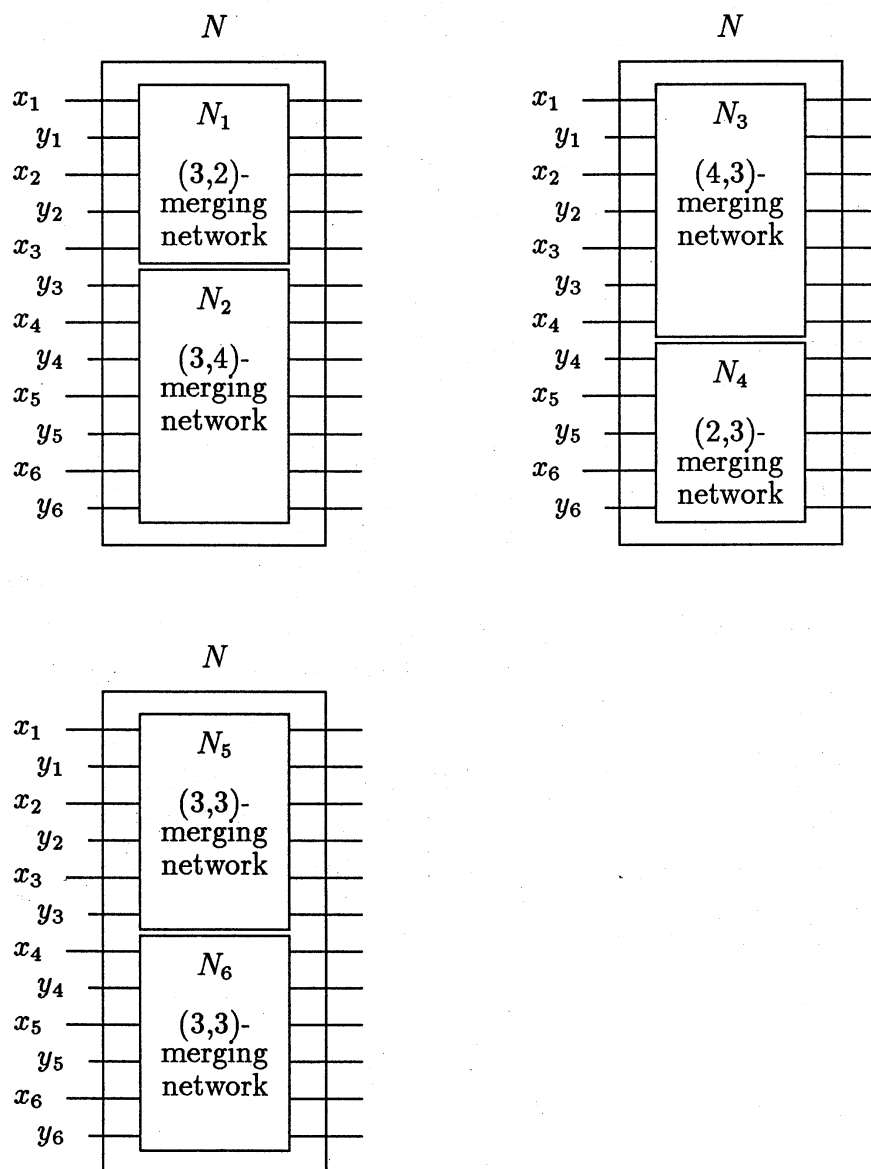


図4 N とそのサブネットワーク

器があるとがわかる。ここで $Z_1 = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_6, x_6 : y_1 < y_2 < \dots < y_6 < x_1 < x_2 < \dots < x_6 \rangle$ を N の入力としたとき、次の性質 1, 2, 3 が成立する。

性質

- (1) N の入力が Z_1 のとき、 $line\ x_3, line\ y_3$ 間には 3 個の比較器が存在し、それらの比較器により N_1 側から N_2 側へ要素 x_1, x_2, x_3 が移動し、 N_2 側から N_1 側へは要素 y_3, y_4, y_5 が移動する。
- (2) N の入力が Z_1 のとき、 $line\ x_4, line\ y_4$ 間には、3 個の比較器が存在し、それらの比較器により N_3 側から N_4 側へ要素 x_2, x_3, x_4 が移動し、 N_4 側から N_3 側へは要素 y_4, y_5, y_6 が移動する。
- (3) N の入力が Z_1 のとき、 $line\ y_3, line\ x_4$ 間には、3 個または 4 個の比較器が存在し、それらにより N_5 側から N_6 側へ要素 x_1, x_2, x_3 が移動し、 N_6 側から N_5 側へは要素 y_4, y_5, y_6 が移動する。

$line\ x_3$ と $line\ y_3$ の間にある比較器を A, α, β とし、 $A = [x_3 : y_3]$ を必須比較器、 α, β を選択比較器とする。同様に $line\ x_4$ と $line\ y_4$ の間にある比較器を C, γ, δ とし、 $C = [x_4 : y_4]$ を必須比較器、 γ, δ を選択比較器とする。また、必須比較器 $B = [y_3 : x_4]$ とする。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をすべて異なる比較器だとすると、 N_1, N_4 に含まれる比較器が 10 個、 $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ で 7 個の計 17 個の比較器が N に存在することになる。これは仮定に反する。一般性を失わず、 $\alpha = \delta = [\uparrow x_3 : \downarrow y_4]$ と仮定してよい。

命題. $\beta \neq \gamma$

証明. $\beta = \gamma$ と仮定する。すると $\beta (= \gamma) = [\uparrow x_3 : \downarrow y_4]$ である。 N_1 が 5 個の比較器を持っており、 N_2 が 8 個の比較器を持つことから、 $line\ y_3$ と $line\ x_4$ の間には、選択比較器 $\varepsilon = [y_3 : x_4]$ が存在する。

N のサブネットワーク N_3 は 8 個の比較器からなる。このうち $B = [y_3 : x_4]$ であり、かつ $\varepsilon = [y_3 : x_4]$ である。 $\varepsilon < B$ とする。補題 1 の証明を同様にすると、 N_3 ではどの入力に対しても ε ではデータの交換は起きない。よって、 N_3 から ε を除いた 7 個の比較器からなるサブネットワークも (4, 3)-マーキング ネットワークである。これは系 1 と矛盾する。 $B < \varepsilon$ のとしても同様である。(証明終)

命題 1 より $\beta \neq \gamma$ である。よって N には N_1 の 5 個の比較器と N_4 の 5 個の比較器と $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ の 6 個の比較器の計 16 個の比較器が存在し、 $\beta = [\uparrow x_3 : \downarrow y_3], \gamma = [\uparrow x_4 : \downarrow y_4]$ である。性質 (3) より、以下の 3 つの場合が考えられる。

$$(1) \beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [x_4 : \downarrow y_4]$$

$$(2) \beta = [\uparrow x_3 : y_3], \gamma = [y_3 : \downarrow y_4]$$

$$(3) \beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [y_3 : \downarrow y_4]$$

場合 1. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [x_4 : \downarrow y_4]$ のとき

この場合は、 $line\ y_3$ と $line\ x_4$ の間に存在する比較器は B, α, β の 3 本なので、性質 (3) の代わりに次の性質 (3)' が成立する。

性質 (3)'. 入力 Z_1 のとき、 N_5 から N_6 へ移動する要素 x_1, x_2, x_3 と N_6 から N_5 へ移動する要素 y_4, y_5, y_6 は B, α, β を通る。

入力が Z_1 の要素 x_1 は最終的に $line\ x_4$ に移動する。性質 (2) より、 x_1 が C かまたは γ を通って $line\ x_4$ へ移動することはない。

x_1 が B を通って $line\ x_4$ へ移動するとする。 A と B は $line\ y_3$ に端を持つ比較器であるので、 x_1 は A を通ってから B を通るので $A < B$ である。ここで、図 2 を考えると、 x_1 は A の左の位置で $line\ x_3$ に移動できないことがわかる。 x_1 が β を通るとすると、補題 4 より $\beta < B$ である。よって、 β

より右側に $line\ x_4$ に端を持つ比較器が最低 1 個存在する。これは x_1 が β より右側の比較器で移動しないか、 β 以外の比較器で最終的に $line\ x_4$ に移動することを意味する。これは性質 (2), (3)' に反する。従って、この場合では (6,6)-マーキングを 16 個の比較器で構成できない。

場合 2. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : y_3], \gamma = [y_3 : \downarrow y_4]$ のとき

場合 1 と対称であり、場合 1 と同様に、 N が (6,6)-マーキングネットワークでないことを示せる。

場合 3. (1) $\beta = [\uparrow x_3 : x_4], \gamma = [y_3 : \downarrow y_4]$ のとき

N_3 は 8 個の比較器を持っているので、補題 4 から $\beta \prec B$ である。再び、 N の入力 Z_1 を考える。要素 x_1 が B を通って $line\ x_4$ へ移動するなら、場合 1 の後半部分の証明と同様に N が (6,6)-マーキングネットワークでないことを示せる。 x_1 が β を通ってから最終的に $line\ x_4$ に移動すると仮定すると、 $\beta \prec B$ なので、 B は入力 Z_1 のときに要素の交換が起きない。性質 (1), (2) より入力 Z_1 のもとでは A, α ともに要素の交換が起こる。 B 以外に A, γ の 2 個の比較器が $line\ y_3$ に接する。従って入力 Z_1 中の x_2 かまたは x_3 は、 A を通ってから γ を通る。従って $A \prec \gamma$ である。また、補題 4 から $\gamma \prec B$ なので $A \prec B$ を得る。

ここで、 $lines\ y_2, x_3, y_3, x_4$ で構成されるサブネットワーク N_7 を考える。 N_7 は (2,2)-マーキングネットワークである。必須比較器 $[y_2 : x_3]$ を D とする。 N_7 には比較器 A, B, D と、場合により β が存在する。 N_5 は 6 比較器の (3,3)-マーキングネットワークなので、補題 3 よりどの場合でも $A \prec D$ である。 $A \prec D, A \prec B, \beta \prec B$ をすべて満たした上で、 A, B, C, β で構成できる (2,2)-マーキングネットワークは (1) $\beta = [x_3 : x_4]$ かつ $D \prec \beta$ 、と (2) $\beta = [y_2 : x_4]$ かつ $\beta \prec D$ の 2 通りの場合がある。これらを図 5 に示す。

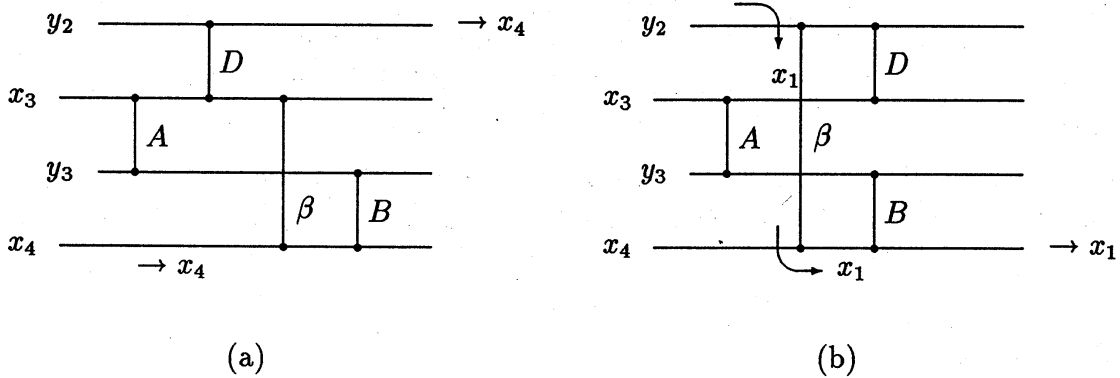
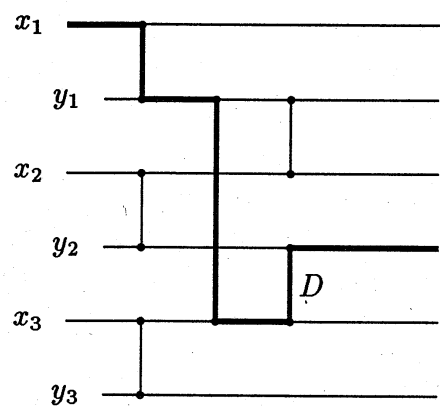


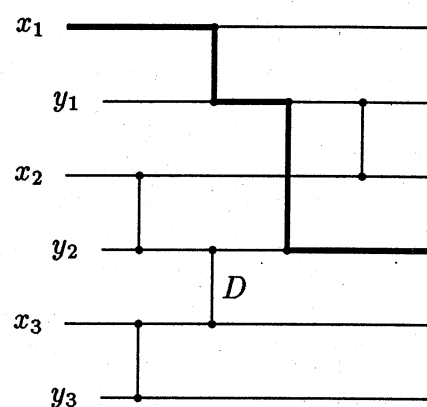
図 5 サブネットワーク N_7

場合 3-1. $\beta = [x_3 : x_4]$ かつ $D \prec \beta$ のとき

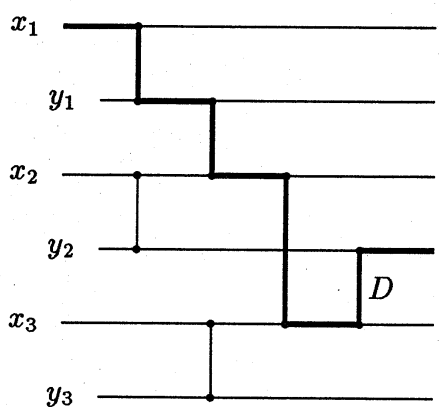
N の入力 $Z_2 = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_6, y_6 : x_1 < x_2 < \dots < x_6 < y_1 < y_2 < \dots < y_6 \rangle$ を考える。このとき、 x_4 は最終的に $line\ y_2$ へ移動する。入力が Z_2 のとき、 x_4 は $line\ x_4$ より下に移動しない。よって、 x_4 は B かまたは β を通る。 x_4 が β を通って上の入力線に移動するなら、補題 3 より $[\uparrow y_2 : x_3] \prec D$ である。 N_5 は 6 個の比較器で構成される (3,3)-マーキングネットワークであることに注意する。すると x_4 は $line\ y_2$ へ移動できない。 x_4 が B を通って上の入力線に移動するなら、補題 3 より、 A 以外に $[\uparrow x_3 : y_3]$ の形の比較器は存在せず、 $A \prec B$ なので x_4 は $line\ x_2$ への移動が不可能になる。従って、この場合 N は (6,6)-マーキングネットワークをとり得ない。



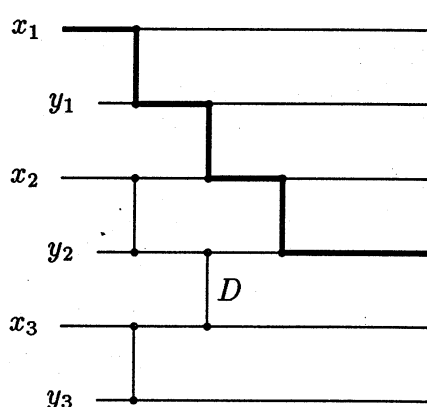
(a)



(b)



(c)



(d)

図6 $(3,3)$ -マージング ネットワーク上で要素 x_1 が line y_2 へ移動する移動経路

場合 3-2. $\beta = [y_2 : x_4]$ かつ $\beta \prec D$ のとき

N の入力 Z_1 を考えると, 要素 x_1 は, 最終的に $line\ x_4$ へ移動する。 x_1 が β を通って $line\ x_4$ へ移動することは既に表示している。 N_5 は 6 個の比較器で構成されている (3,3)-マージング ネットワークなので, 補題 3 より x_1 は比較器 D より左の位置で $line\ y_2$ に移動することはできない。従って, この場合 N は (6,6)-マージング ネットワークとなり得ない。

以上より, (6,6)-マージング ネットワークが 16 個以下の比較器で構成できないことが示された。よって, $M(6,6) = 17$ である。(証明終)

参考文献

- [1] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol.3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley (1973). [2] K.E. Batcher, Sorting networks and their applications, *Proc. AFIPS 1968 SJCC* **32** AFIPS Press (1968), 307-314. [3] A.C. Yao and F.F. Yao, Lower bounds on merging networks, *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976) 566-571. [4] P.B. Miltersen, M. Paterson and J. Tarui, The asymptotic complexity of merging networks, *Proc. 33rd Found. of Comput Science*(1992),236-246. [5] M. Aigner and O. Schwarzkoph, Bounds on the size of merging networks, submitted to a journal.