

自由表面をもつ二層流体中に 底面物体により励起される非線形波動

京都大学大学院工学研究科 細井 聖也 (Seiya Hosoi)
花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)
Graduate School of Engineering, Kyoto University

1 はじめに

鉛直方向に密度勾配がある流体は成層流体と呼ばれ、地球上には大気や海洋など多くの成層流体が存在している。そのため、成層流体中に発生する自由表面波や内部重力波の挙動を調べることは、大気や海洋の挙動を知る上で重要である。本研究では成層流体を単純化したモデルとして、自由表面を持つ二層流体を考え、底面に置かれた物体によって波が励起される系を考える。

従来、自由表面を持つ二層流体では、2つのモードの波が存在することが線形理論により示されている [1]。本研究では、位相速度の速いモードを fast mode、遅いモードを slow mode と呼ぶこととする。各モードの波の位相速度と一様流の速度が釣り合う場合には共鳴が起こり、底面物体付近の振幅が大きくなる現象が見られる。

これまでに、振幅の大きな孤立波等に適用できる理論として、長波長近似を行うことにより非線形効果を考慮した弱非線形理論が提案されている。弱非線形理論の代表的な方程式としては forced Korteweg-de Vries (fKdV) 方程式があり、自由表面を有する二層流体系の KdV 方程式 (fKdV 方程式の外力項を 0 とした式) に関する研究 [1]、fKdV 方程式の数値解を用いて二層流体の界面変位を調べた研究など [2]、多くの既往研究が存在する。しかし、強非線形 (fully nonlinear) である Euler 方程式を解いた研究はほとんど存在しない。また、連続密度成層流体中の内部流線の変位を求めるための KdV 方程式を導出した研究 [3] もあるが、底面物体が無い場合についてであり、KdV 方程式を実際に解くことによる適用性の確認も行われていない。

本研究では Euler 方程式を用いた数値計算により、自由表面をもつ二層流体中に底面物体により励起された界面波及び水面波の特性を調べる。また、fKdV 方程式の解と Euler 方程式の解を比較することにより、弱非線形理論の適用性を検証する。

2 支配方程式および境界条件

本研究では、自由表面を有する鉛直二次元の二層流体が一様流速 U で流れる系を考える (図 1)。非圧縮、非粘性の二層流体の運動は以下に示す連続の式と Euler 方程式に支配されている。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 - g \hat{z}, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 - g \hat{z}. \quad (2.2b)$$

ただし、 $\mathbf{u} = (u, w)^T$ は速度ベクトル、 $\hat{z}$ は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している。また、添え字の 1 は上層の流体、2 は下層の流体を表す。

次に境界条件について述べる．まず，底面上では境界層の発達を抑えるためスリップ条件を採用する．上流端の速度は $\mathbf{u} = (U, 0)$ の一様流とする．

自由表面，密度界面上では力学的境界条件と運動学的境界条件が課される．力学的境界条件はその面上における応力のつり合いを意味し，自由表面の場合は以下のように表される．

$$p_1 = p_0. \quad (2.3)$$

ここで， p_0 は大気圧である．

運動学的境界条件は，面上の流体粒子が自由表面と共に運動することを表す．自由表面の鉛直変位を $f_s(x, z, t)$ とすると，自由表面の運動学的境界条件は，

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f_s}{\partial x} = w_1, \quad (2.4)$$

となる．

同様に，密度界面の力学的境界条件及び運動学的境界条件は，密度界面の鉛直変位を $f_i(x, z, t)$ として，

$$p_1 = p_2, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} = w_1, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + u_2 \frac{\partial f_i}{\partial x} = w_2. \quad (2.6b)$$

となる．密度界面の運動学的境界条件に関しては，本研究では，2 式の辺々の差をとった，

$$(u_1 - u_2) \frac{\partial f_i}{\partial x} = w_1 - w_2, \quad (2.7)$$

を速度の境界条件として用いた．

なお，本研究では底面に以下の関数で与えられる物体を設置する．

$$h(x) = h_0 \text{sech}^2(0.3x/D). \quad (2.8)$$

ここで D は初期の全体の深さである．また，本研究では $h_0/D = 0.005$ で固定する．

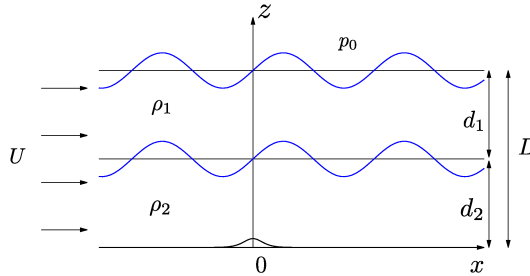


図 1: 系の概略図と記号の定義．

3 弱非線形理論

底面物体の上を過ぎる非粘性二層流体流れの界面波を表す式として, forced Korteweg-de Vries(fKdV)方程式がある.

D を水深, a を振幅, h_0 を底面物体高さ, L を水平方向の長さスケールとし,

$$\alpha = \frac{a}{D}, \quad \beta = \frac{D}{L}, \quad \gamma = \frac{h_0}{D}. \quad (3.1)$$

とする. α は水深と波の振幅の比, β は波の波長と水深の比, γ は水深と底面物体高さの比を表している.

$$\alpha \sim \beta^2 \sim \gamma^{\frac{1}{2}} \ll 1, \quad (3.2)$$

とし, さらに $U \simeq c_{\pm}$ と仮定すると, 界面変位 f_i に関する fKdV 方程式

$$p_{1\pm} f_{it} + p_{2\pm} f_{ix} + p_{3\pm} f_i f_{ix} + p_{4\pm} f_{ixx} = \frac{1}{2} h_x, \quad (3.3)$$

$$p_{1\pm} = 1 + \frac{\rho_1 d_1 d_2 / D^2}{\rho_2 (c_{\pm}^2 / gD - d_1 / D)^2}, \quad (3.4)$$

$$p_{2\pm} = p_{1\pm} \left(1 - \frac{c_{\pm}}{U} \right), \quad (3.5)$$

$$p_{3\pm} = -\frac{3}{2} \frac{c_{\pm}}{U} \left[\frac{D}{d_2} + \frac{\rho_1 d_1 d_2 / D^2}{\rho_2 (c_{\pm}^2 / gD - d_1 / D)^3} \right], \quad (3.6)$$

$$p_{4\pm} = -\frac{1}{6} \frac{c_{\pm}}{U} \left[\frac{d_2^2}{D^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d_1}{D} \frac{d_2}{D} \left\{ 3 + \frac{3d_1/D}{(c_{\pm}^2 / gD - d_1 / D)^2} + \frac{d_1^2 / D^2}{(c_{\pm}^2 / gD - d_1 / D)^3} \right\} \right], \quad (3.7)$$

が導出される. 水面変位 f_s は界面変位 f_i の定数倍であり,

$$f_s = \frac{c_{\pm}^2 / gD}{c_{\pm}^2 / gD - d_1 / D} f_i, \quad (3.8)$$

から求められる. ここで,

$$c_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} gD \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{d_1}{D} \frac{d_2}{D} (1 - \rho_1 / \rho_2)} \right)} \quad (3.9)$$

は長波長の線形波の位相速度である. d_1, d_2 はそれぞれの層の初期の厚さであり, $d_1 + d_2 = D$ である.

式 (3.3) は添え字 + の式と添え字 - の式の 2 式が存在し, それぞれ fast mode と slow mode に対応している. 本研究では $U = c_+$ と $U = c_-$ の 2 通りの場合について計算を行っている. $U = c_+$ の時は fast mode の波が主に励起されるため, 添え字 + の式を波面予測に用い, $U = c_-$ の時は添え字 - の式を用いることとする.

4 数値計算法

4.1 Euler 方程式の数値解法

4.1.1 数値計算法

Euler 方程式の解法には、MAC(Marker and Cell) 法を用いた。本研究では、2 次元の境界適合格子を用い、計算ステップ毎に自由表面、密度界面形状を求め、波面に合わせて格子点を配置し直す。計算点の移動は鉛直方向のみとする。

空間微分の離散化には、Euler 方程式 (2.2) の対流項以外は、2 次精度の中心差分を用いた。Euler 方程式 (2.2) の対流項は、数値粘性の効果をできるだけ小さくするためと、数値的安定性の両方の観点から、3 次精度の風上差分を適用した [4]。

また、Euler 方程式 (2.2) の時間微分には 2 次精度の Adams-Bashforth 法を、自由表面及び密度界面（運動学的境界条件 (2.4), (2.7)）の時間微分には、2 次精度の Crank-Nicolson 法を用いた。計算手順は以下ようになる。

1. $t = n\Delta t$ の速度場 $\mathbf{u}^n$ の値を用いて、Euler 方程式 (2.2) の発散をとることにより得られる圧力の Poisson 方程式から圧力場 P^n を求める。
2. 圧力場 P^n の値を用いて、Euler 方程式 (2.2) から $t = (n+1)\Delta t$ における速度場 $\mathbf{u}^{n+1}$ を求める。
3. 自由表面上の $\mathbf{u}^{n+1}$ を用いて、運動学的境界条件 (2.4) から $t = (n+1)\Delta t$ の自由表面変位 f_s^{n+1} を求める。同様に、密度界面上の $\mathbf{u}^{n+1}$ を用いて、式 (2.6) から密度界面の変位 f_i^{n+1} を求める。
4. f_s^{n+1} と f_i^{n+1} に合わせて格子点を配置し直す。

上記の手順を繰り返し、流れ場の時間発展を計算する。

時間刻み幅は $U\Delta t/D = 2 \times 10^{-4}$ とした。

4.1.2 計算格子

本研究では、自由表面及び密度界面の形状を精度よく計算するため、境界適合格子を用いた。用いた計算格子の例を図 2 に示す。図 2 は $d_2/D = 0.6$ の計算に用いた格子である。また、初期時刻における底面物体付近の計算格子の拡大図を図 3 に示す。計算領域全体での格子点数は x 方向に 10000 点、 z 方向に 200 点である。

水平方向に関しては、物体付近 ($-100D \leq x \leq 150D$) に格子を集中させ、格子間隔は $(\Delta x)_{\min} = 0.1D$ で一定とする。また、物体の上流側 ($x \leq -100D$) と下流側 ($x \geq 150D$) では、物体から離れるにつれて格子間隔 Δx を徐々に大きくする。鉛直方向に関しては、自由表面 ($z = D$) 付近と密度界面 ($z = d_2$) 付近、および底面 ($z = 0$) 付近に格子を集中させ、最小格子間隔は $(\Delta z)_{\min} = 0.002D$ とする。

4.2 fKdV 方程式の数値解法

fKdV 方程式の空間離散化にはスペクトル法（正弦波展開）を用いた。また、時間積分には、4 次のルンゲクッタ法を用いた。スペクトル法を用いるため、計算領域の両端は周期境界条件とな

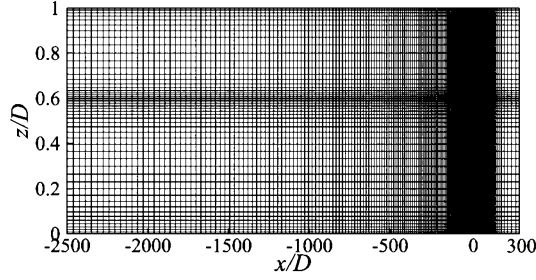


図 2: $d_2/D = 0.6$ の計算に用いた計算格子の全体図。水平方向は 60 本おき，鉛直方向は 4 本おきに格子線を示している。

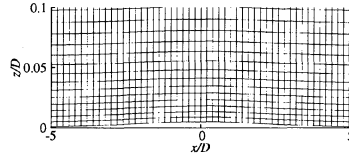


図 3: 初期時刻 ($Ut/D = 0$) における底面物体付近の計算格子 ($h_0/D = 0.005$)。水平・鉛直方向ともに 2 本おきに格子線を示している。

る。計算領域は $-256D \leq x \leq 256D$ とした。 $\Delta x = 0.125D$ (離散点は 4096 点) とし，時間刻み幅は $\Delta Ut/D = 5 \times 10^{-3}$ とした。また，切断波数は 2π とした。

4.3 水面波と界面波の大小関係・パラメータの選択

fKdV 方程式においては (3.8) より，水面変位と界面変位の比 $f_{s\pm}/f_{i\pm}$ は，密度比 ρ_1/ρ_2 及び上下層の厚さ比 d_1/d_2 (あるいは下層の厚さ d_2/D) のみで決まる定数であることがわかる。その値を

$$\frac{f_{s\pm}}{f_{i\pm}} = \frac{c_{\pm}^2/gD}{c_{\pm}^2/gD - d_1/D} \equiv A_{\pm}. \quad (4.1)$$

とおく。ここで，

$$c_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}gD \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{d_1}{D} \frac{d_2}{D} (1 - \rho_1/\rho_2)} \right)}. \quad (4.2)$$

であり，添え字 + は fast mode，添え字 - は slow mode を表す。

(4.1) 式で定義される A_+ 及び A_- を、 d_2/D 及び ρ_1/ρ_2 の関数として等高線図に表したのが図 4 である。

A_+ は d_2/D と ρ_1/ρ_2 の値によらず常に $A_+ > 1$ のため，fast mode では任意のパラメータで $f_{s+} > f_{i+}$ となる。それに対し，slow mode ではパラメータの取り方により $f_{s-} > f_{i-}$ となる場合と $f_{s-} < f_{i-}$ となる場合がある。したがって本研究では，パラメータ d_2/D と ρ_1/ρ_2 の値として， $f_{s-} > f_{i-}$ となる $d_2/D = 0.6$ ， $\rho_1/\rho_2 = 0.1$ ，及び $f_{s-} < f_{i-}$ となる $d_2/D = 0.4$ ， $\rho_1/\rho_2 = 0.8$ の 2 通りを選択した。以下より，それぞれのパラメータでの計算結果について考察する。

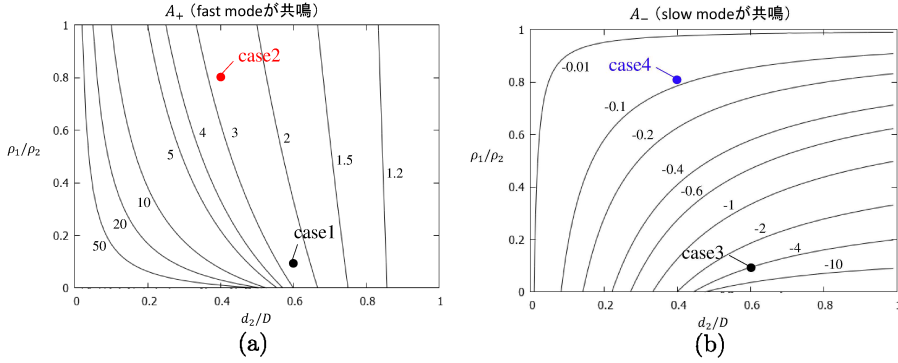


図 4: d_2/D と ρ_1/ρ_2 に対する $A_{\pm}$ の等高線図. (a) A_+ . (b) A_- .

表 1: 各パラメータの値

case	U	ρ_1/ρ_2	d_2/D	$ f_i q_{\pm}/p_{3\pm} $	$A_{\pm}(=f_{s\pm}/f_{i\pm})$	fKdV から予測される波の振幅
1	c_+	0.1	0.6	0.68	$A_+ = 2.407$	水面波 > 界面波
2	c_+	0.8	0.4	0.054	$A_+ = 2.717$	水面波 > 界面波
3	c_-	0.1	0.6	0.26	$A_- = -3.740$	水面波 > 界面波
4	c_-	0.8	0.4	3.0	$A_- = -0.092$	水面波 < 界面波

5 計算結果

5.1 case 1 ($U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$)

まず, $U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$ の場合の, Euler 方程式による数値計算の結果を図 5 に示す. この場合には, 一様流速が fast mode の波の位相速度と釣り合っているため, 共鳴により fast mode の波が励起されている.

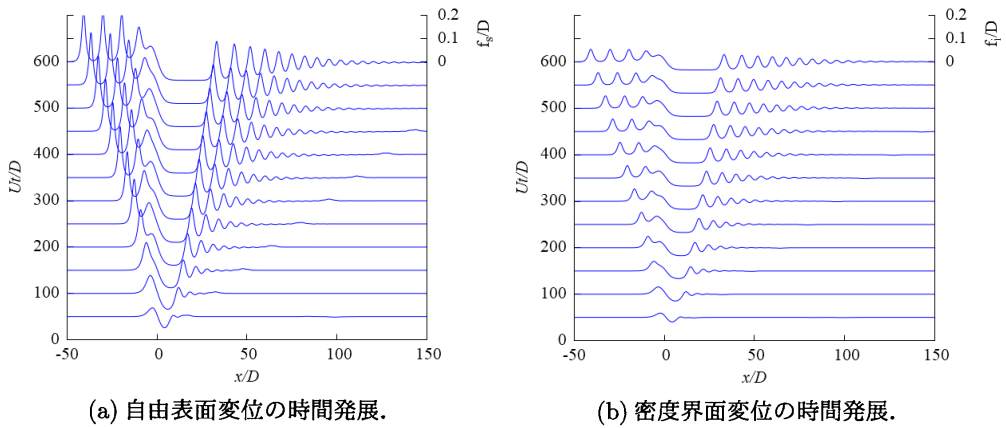


図 5: Euler 方程式の計算結果. ($U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$)

この図より、上流側 ($x < 0$) には周期的に振幅の大きな孤立波が発生しており、底面物体より下流側 ($x > 0$) には窪み領域ができていることが確認できる。また、窪み領域よりさらに下流側には変調クノイダル波と呼ばれる波が発生している。

また、水面変位と界面変位を見比べると、両者は同位相 (f_s, f_i の正負が同じ) であり、界面波の振幅よりも水面波の振幅の方が大きくなっていることが分かる。これは 4.3 で述べた fKdV 方程式による予測と一致する結果である。(fKdV 方程式では $U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$ のとき、 $f_{s+} = 2.407f_{i+}$.)

次に、 $U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$ の場合の、fast mode の fKdV 方程式による数値計算の結果を図 6 に示す。この図より、fKdV 方程式の計算結果でも、孤立波列、窪み領域、変調クノイダル波が発生している。また、上で述べたように、水面波と界面波の関係 (正負、振幅の大小関係) も定性的には Euler 方程式と fKdV 方程式で一致している。

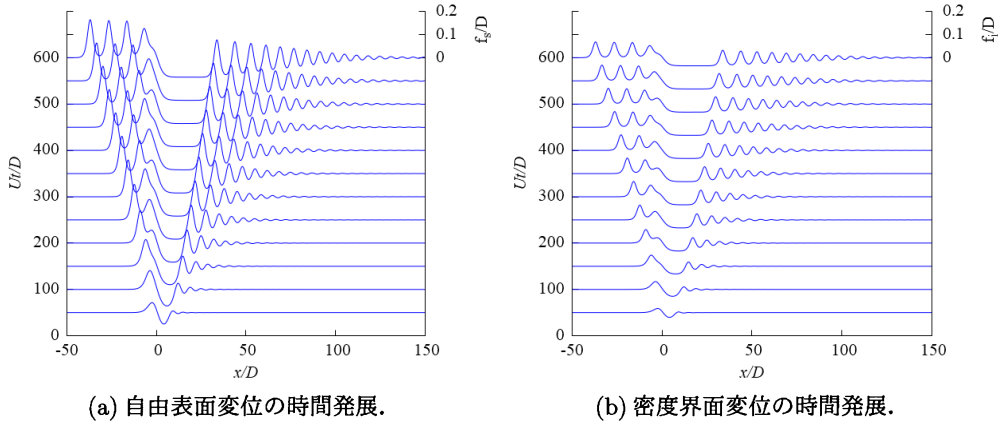


図 6: fast mode の fKdV 方程式の計算結果. ($U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.1, d_2/D = 0.6$)

Euler 方程式と fKdV 方程式の解を見比べると、上流、下流ともに波形は似ている。ただし、 $U/D = 600$ のときの、上流側の先頭の孤立波の頂点で f_s, f_i の値を測定すると、fKdV 方程式の f_s は Euler 方程式の約 27 % 小さく、 f_i は Euler 方程式の約 27 % 大きかった。また、 f_s/f_i の値を調べると、Euler 方程式では 4.187、fKdV 方程式では 2.406 であり、fKdV 方程式は Euler 方程式の約 43 % 小さい。振幅が大きい時の Euler 方程式と fKdV 方程式の解の差は、case 4 で特に問題となる高次の非線形効果が原因の可能性がある。実際、表 1 に示した 3 次と 2 次の非線形項の比 ($|q_{\pm} f_i^2 f_{ix}| / (p_{3\pm} f_i f_{ix})| = |f_i q_{\pm} / p_{3\pm}|$) は、case 1 の場合 0.68 であり、3 次の非線形項が無視できないことを示している。

5.2 case 2 ($U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.8, d_2/D = 0.4$)

次に、 $U = c_+, \rho_1/\rho_2 = 0.8, d_2/D = 0.4$ の場合の、Euler 方程式、及び fast mode の fKdV 方程式による数値計算の結果を図 7, 8 に示す。

これらの図より、Euler 方程式、fKdV 方程式共に、case2 の場合の波面も、上流側の孤立波列、底面物体下流側の窪み領域、さらに下流側に変調クノイダル波、といった case1 と同様な特徴を持つ波面であることが確認できる。

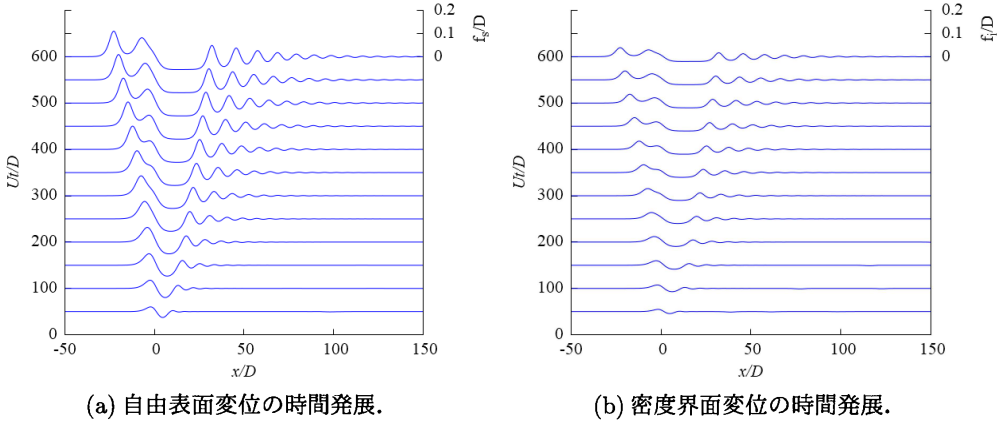


図 7: Euler 方程式の計算結果. ($U = c_+$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$)

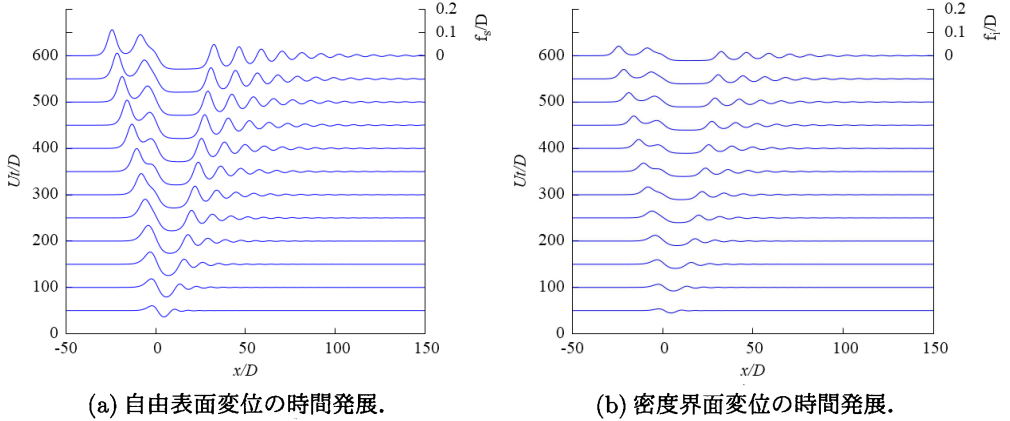


図 8: fast mode の fKdV 方程式の計算結果. ($U = c_+$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$)

case1 の場合と比べて、上流側の孤立波の振幅が小さいため、両方程式の波面がよく一致しており、fKdV 方程式は波面全体にわたって Euler 方程式の数値解をよく予測できていることが確認できる。 $Ut/D = 600$ のときに、上流側の先頭の孤立波の頂点の値を用いて f_s/f_i の値を測定すると、Euler 方程式では 2.831、fKdV 方程式では 2.711 であった。

5.3 case 3 ($U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2/D = 0.6$)

続いて、 $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2/D = 0.6$ の場合の、Euler 方程式による数値計算の結果を図 9 に示す。

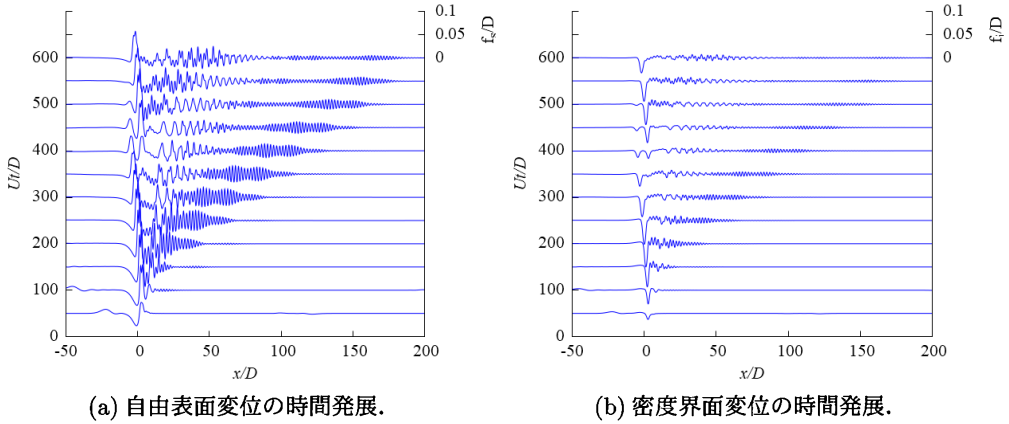


図 9: Euler 方程式の計算結果. ($Fr = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2/D = 0.6$)

case3 のパラメータは case1 と比べて一様流速の値のみが変わっており, case3 では一様流速が slow mode の波の位相速度と釣り合っているため, 共鳴により slow mode の波が励起される.

図 9 より, case 3 の波面は他のパラメータの場合とは大きく異なり, 上流側への振幅の大きな波の伝播, 下流側の窪み領域や変調クノイダル波などの, 他の case で確認できた特徴が全て見られない.

水面変位と界面変位を見比べると, 両者は逆位相 (f_s, f_i の正負が逆) であり, 界面波の振幅よりも水面波の振幅の方が大きくなっていることが分かる. これは fKdV 方程式による予測と一致する結果である. (fKdV 方程式では $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2/D = 0.6$ のとき, $f_{s-} = -3.740 f_{i-}$.)

次に, $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$ の場合の, slow mode の fKdV 方程式による数値計算の結果を図 10 に示す.

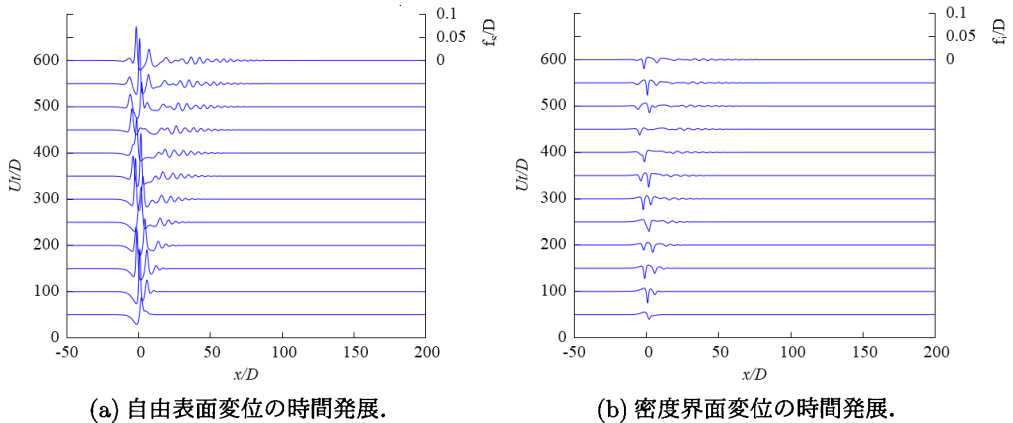


図 10: slow mode の fKdV 方程式の計算結果. ($U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.1$, $d_2/D = 0.6$)

fKdV 方程式の解は, 下流に伝播している短波長な波の振幅などは Euler 方程式と大きく異なっ

ているが、長波長の波についてはおおよそ似た形状を示しており、他の case と大きく異なった特徴の波面が現れることは予測できている。

このように case3 では他のパラメータの場合と異なる波面となる理由は、fKdV 方程式を用いて以下のように考察される。

fKdV 方程式の各係数は (3.4) ~ (3.7) で表される。 $Fr = c_{\pm}$ の共鳴状態のとき、 $p_{2\pm}$ は 0 である。また、 $p_{1\pm}$ 及び $p_{4\pm}$ については、 ρ_1/ρ_2 と d_2/D の値にかかわらず常に $p_{1\pm} > 0$ 、 $p_{4\pm} < 0$ である。しかし $p_{3\pm}$ に関しては、fast mode では常に $p_{3+} < 0$ であるが、slow mode では ρ_1/ρ_2 と d_2/D の値によって正負が変わりうる。実際、この後に述べる case4 の場合は fast mode と同様に $p_{3-} < 0$ だが、case3 では $p_{3-} > 0$ となる。

すなわち、case3 の場合は他の case に比べて fKdV 方程式の非線形項の係数の符号だけが反転していることになる。ここで、fKdV 方程式において p_{3-} の正負が反転した (p_{3-} が $-p_{3-}$ に置き換わった) 場合を考えると、

$$p_{1-}f_{it} + \{-p_{3-}\}f_i f_{ix} + p_{4-}f_{ixxx} = \frac{1}{2}h_x, \quad (5.1)$$

である。この式を変形すると、

$$p_{1-}\{-f_{it}\} + p_{3-}\{-f_i\}\{-f_{ix}\} + p_{4-}\{-f_{ixxx}\} = \frac{1}{2}\{-h_x\}. \quad (5.2)$$

これは底面物体と自由表面変位が反転していることを表している。つまり case3 のように $p_{3-} > 0$ となるようなパラメータの場合の解は、底面がくぼんでいる場合の波面を上下反転したものと一致する。実際に図 10 は、先行研究での負の底面物体の場合の fKdV 方程式の数値解と類似している [5]。

図 11 に、 $p_{3-} = 0$ を表す曲線を示す。この曲線の左側の領域では $p_{3-} < 0$ であり、case4 のパラメータはここに含まれている。一方斜線部で表される曲線の右側の領域では $p_{3-} > 0$ となるため、 ρ_1/ρ_2 と d_2/D の値がこの領域内に含まれる場合に、負の底面物体の場合の fKdV 方程式の数値解と類似した結果が得られると予測される。

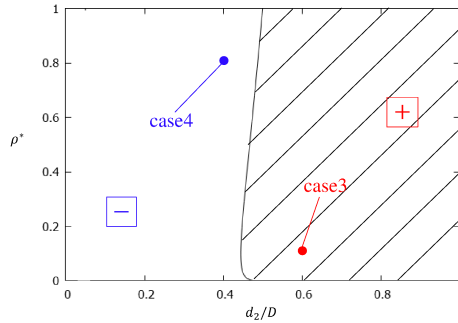


図 11: $p_{3-} = 0$ を表す曲線、及び $p_{3-} < 0$ (空白部分)、 $p_{3-} > 0$ (斜線部分) となる領域を示した図。

5.4 case 4 ($U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$)

続いて、 $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$ の場合の、Euler 方程式による数値計算の結果を図 12 に示す。

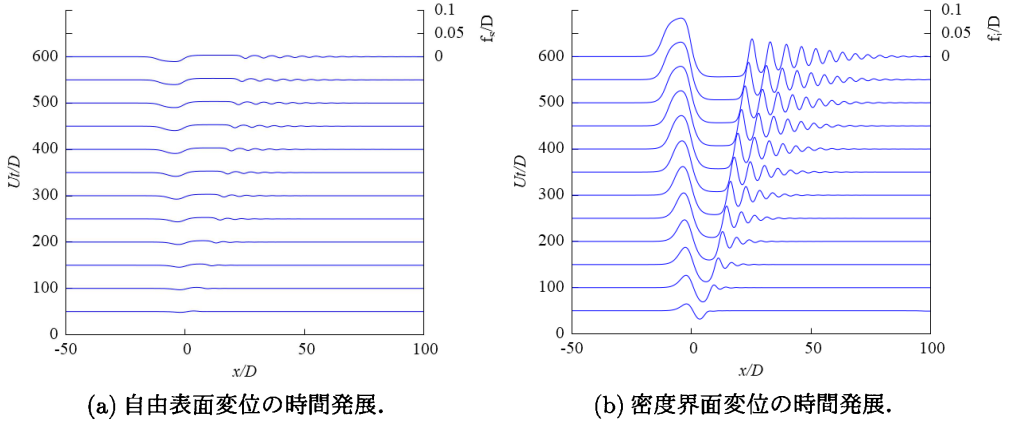


図 12: Euler 方程式の計算結果. ($U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$)

図 12 より, 下流側に発生する窪み領域と変調クノイダル波については, case1, 2 と同様であることが分かる. しかし, それらの場合と大きく異なる点として, 上流側の周期的に発生する孤立波の代わりに, 物体のすぐ上流側から途切れずに台形状に伸びていく波が発生している.

また, 水面変位と界面変位を見比べると, 両者は逆位相 (f_s, f_i の正負が逆) であり, 水面波の振幅よりも界面波の振幅の方が大きくなっていることが分かる. これは fKdV 方程式による予測と一致する結果である. (fKdV 方程式では $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$ のとき, $f_{s-} = -0.0920 f_{i-}$.)

次に, $U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$ の場合の, slow mode の fKdV 方程式による数値計算の結果を図 13 に示す. この図より, fKdV 方程式の計算結果でも, 窪み領域, 変調クノイダル波は発生している. また, 上で述べたように, 水面波と界面波の関係 (正負, 振幅の大小関係) も Euler 方程式と fKdV 方程式で一致している. しかし, Euler 方程式の結果で確認できた, 上流側の台形波が発生しておらず, case1, 2 と同じような周期的孤立波列が励起された.

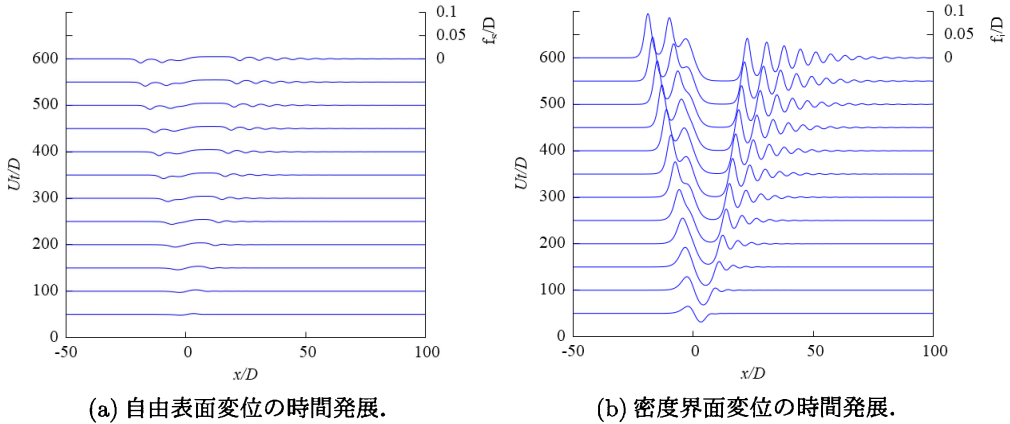


図 13: slow mode の fKdV 方程式の計算結果. ($U = c_-$, $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, $d_2/D = 0.4$)

Euler 方程式の結果にみられる台形状の波面は、fKdV 方程式を拡張し 3 次の非線形項まで含めた、extended forced KdV 方程式 (fEKdV 方程式) の数値解と類似している [2]。そのため、この台形波は fKdV 方程式では無視している高次の非線形項の効果によるものであり、fKdV 方程式では再現できないものである。

3 次の非線形項 ($q_- f_i^2 f_{ix}$ とする) の大きさが 2 次の非線形項 $p_{3-} f_i f_{ix}$ に比べて無視できる場合には、fEKdV 方程式と fKdV 方程式の解はほぼ変わらない。そのため、上記のような解が現れるのは、3 次の非線形項が 2 次の非線形項と同等以上の大きさの場合である。Kakutani & Yamasaki(1978)[1] の (5.5) 式で、 m^* の代わりに $m = d_1/d_2$ を代入した値を q_- の値として用い、2 つの項の比 $(q_- f_i^2 f_{ix})/(p_{3-} f_i f_{ix}) = f_i \times q_-/p_{3-}$ を求めると $-35.90 f_i$ であった。上流の密度界面の振幅は図 12 より ~ 0.1 であるから、 $(q_- f_i^2 f_{ix})/(p_{3-} f_i f_{ix}) \sim 3$ であり、Case 4 では $p_{3-} f_i f_{ix} < q_- f_i^2 f_{ix}$ (2 次の非線形項に比べて 3 次の非線形項が大きい) であることが分かる。

6 結論

自由表面を持つ二層流体において、底面物体により励起される水面波及び界面波を、Euler 方程式及び fKdV 方程式の数値計算によって求め、両者を比較した。

その結果、fast mode の波が共鳴によって励起される場合には、fKdV 方程式によって Euler 方程式の数値解を概ね予測することができた。ただし、振幅が大きいときには、高次の非線形性が原因とみられる差がみられた。一方 slow mode の波が共鳴によって励起される場合に関しては、上流側に孤立波が伝播せず複雑な挙動をする場合について、他のパラメータの場合と比べて大きく特徴が異なる理由を、fKdV 方程式の非線形項の符号の反転を用いて説明できた。また、上流側に台形状に伸びる波形が現れる現象は、3 次の非線形効果によるものであるため fKdV 方程式では予測できず、fEKdV 方程式の必要性が強く示唆された。

参考文献

- [1] Kakutani, T. & Yamasaki, N. 1978 Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Jpn.* **45**, 674-679.
- [2] Melville, W. K. & Helfrich, K. R. 1987 Transcritical two-layer flow over topography. *J. Fluid Mech.* **178**, 31-52.
- [3] Grimshaw, R., Pelinovsky, E. & Poloukhina, O. 2002 Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface. *Nonlinear Processes in Geophysics* **9**, 221-235.
- [4] Kawamura, T., Takami, H. & Kuwahara, K. 1986 Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness. *Fluid Dyn. Res.* **1**, 145-162.
- [5] Grimshaw, R. H. J. & Smyth, N. 1986 Resonant flow of a stratified fluid over topography *J. Fluid Mech.* **169**, 429-464.