

三次元の孤立商特異点の解消について.

京大 数研 藤木 明

複素多様体 X に有限群 G が作用する時, 商空間 X/G が正規解析空間の構造を持つことが知られる. $\dim X = 3$ の場合には, X/G の特異点の解消を, G の作用と利用して構成しうる. この note ではこれを述べる.

基本的には, 次の場合である. G を位数 n の巡回群とし, その generator g が, 複素 3 次元空間 $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$ に,

$$(1) \quad g: (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (e_n z_1, e_n^p z_2, e_n^q z_3) \quad (n, p) = (n, q) = 1$$

$0 < p, q < n$, τ が作用するとする. ここで, $e_n^p = \exp \frac{2\pi i p}{n}$.

$N_{n,p,q} = \mathbb{C}^3/G$ とおくと, これは原点に対応する点 P で孤立特異点を持つ.

定 理 1

$N_{n,p,q}$ の解消, $f: \tilde{X} \longrightarrow N_{n,p,q}$ で次の性質を持つものが存在する.

1) $\tilde{X}$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,2}$ で次の性質を満たすものが存在する.

$$1) \quad U_i \cong \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(u_i, v_i, w_i)$$

2) $f^{-1}(P) = \Theta$ とおくと, $\Theta \cap U_i$ の既約成分は, (1) の同型の意味で, U_i の座標平面, 正しくは $U_i = 0$ に一致する。

1) $\mathbb{C}^3(Z_1, Z_2, Z_3)$ に, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ $i=1, 2, 3$, で作用する^{*)} 自己同型 A_0 は, $N_{n, \mathbb{C}}$ の自己同型 A を誘導するが, これが $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ に拡張し, (i.e. $\tilde{X}$ の自己同型 $\tilde{A}$ が存在して $f^* \tilde{A} f = A f(x)$, $\forall x \in \tilde{X}$ が成立する) 各 U_i で, (1) の同型の意味で, $(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)})$, $\alpha_\mu^{(i)} \in \mathbb{C}^*$ $i=1, 2, \mu=1, 2, 3$, で作用する。

2) (本質的に上の 1) 2) により) $\Theta = \bigcup_{i=1}^t \Theta_i$ を既約成分への分解とする時, ① Θ_i は非特異有理曲面 for $i=1, \dots, t$ ② $\Theta_i \cap \Theta_j \neq \emptyset$ (for $i \neq j$) $\Theta_i \cap \Theta_j \cong \mathbb{P}^1$ かつ, 交わりは transversal. ③ $\Theta_i \cap \Theta_j \cap \Theta_k \neq \emptyset$, for $i \neq j \neq k \neq i$, なら, それらは一点で transversal に交わる. ④ 異なる 4 つの Θ_i は, 交わりは 11. ⑤ $\Theta_i \neq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\neq \Sigma_2$ (正しくは Σ_n は degree n の Hirzebruch 曲面) ⑥ $\pi_1(\Theta) = \{e\}$ (基本群)

) 一般に $\mathbb{C}^3$ への action が $(Z_1, Z_2, Z_3) \mapsto (\alpha_1 Z_1, \alpha_2 Z_2, \alpha_3 Z_3)$ $\alpha_i \in \mathbb{C}^$ で表される時, これを $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と表す。

これを群 G の位数に関する帰納法で証明するためには situation を今少し一般にする必要があるが, ここではそれは述べずに, その際に上の situation を群 G の位数が p と q の場合に帰着する方法を述べる。すなわち, 複素空間 X_1 と正則写像 $\chi: X_1 \rightarrow X_2$ で次の性質を持つものを構成する。: X_2 の 3 枚の開被覆 $\{U_0, U_1, U_2\}$ が存在し, $U_0 \cong \mathbb{C}^3$, $U_1 \cong \tilde{U}_1/H_1$, $U_2 \cong \tilde{U}_2/H_2$ となる。こゝ

で, $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ は複素多様体, $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ は各々位数 p, q の巡回群である。

さらにこの時 X_2 の singular locus T は T_1 と T_2 の disjoint union となる。

ただし T_1 (resp T_2) は U_1 (resp U_2) の singular locus である。^{*}

(証明) 3次元 t -空間 $\mathbb{C}^3(t)$ から $\mathbb{C}^3(z)$ への被覆写像 φ を

$$(2) \quad \varphi: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (z_1, z_2, z_3) = (t_1, t_2^p, t_3^q)$$

で定義すれば, この被覆変換群 H は $H \cong H_1 \oplus H_2$ $H_1 = \{h_1\}, H_2 = \{h_2\}$

$$(3) \quad \begin{cases} h_1: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, e_p t_2, t_3) \\ h_2: (t_1, t_2, t_3) \longmapsto (t_1, t_2, e_q t_3) \end{cases}$$

と表される。よって $N_{H, \mathbb{C}^3} \cong \mathbb{C}^3(t)/G \cdot H$ 。

ただし G は $\mathbb{C}^3(t)$ への action は (e_n, e_n, e_n) で定義する。 G の

action は φ と equivariant, i.e. $g \cdot \varphi = \varphi \cdot g$ 。 $\sigma: \mathcal{W}_0 \rightarrow \mathbb{C}^3(\frac{t}{z})$ を原点を

a monoidal 変換とすると, もろろ $\mathcal{W}_0$ は $\mathbb{P}^2$ 上の line bundle $\mathcal{L}$, hyperplane

bundle の inverse と同型。 $\mathcal{W}_0$ への G の action, (G, H_1, H_2 の action は

自然に $\mathcal{W}_0$ へそれだけ拡張される。) の下で $\mathcal{W}_0/G$ は $\mathbb{P}^2$ 上の

degree $(-n)$ の line bundle と同型。これを $\mathcal{W}$ とする。 $\pi: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{P}^2$ を射影

とし, $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{P}^2$ の同次座標と見え, $t_i \neq 0$ と定められる open set を

V_i とする。 $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ $i=1, 2, 3$, とおけば, $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^3 V_i$ $V_i \cong \mathbb{C}^3$ が成り

立つ。 V_i の自然な座標に関して, H_1, H_2 の作用は次の形をとる。

$$(4) \quad \begin{cases} & V_1 & V_2 & V_3 \\ h_1 & (1, e_p, 1) & (e_p^n, e_p^{-1}, e_p^{-1}) & (1, 1, e_p) \\ h_2 & (1, 1, e_q) & (1, 1, e_q) & (e_q^n, e_q^{-1}, e_q^{-1}) \end{cases}$$

^{*}) $\dagger$ は proper modification になるようにとる。

ここでも $p=8$ なら、容易にわかるように $V_2/H, V_1/H$ の解消は、2次元の場合のそれに帰着され、 V_1/H は非特異だから、これにより、 W/H の非特異化 $f_{20}: \widehat{W}_H \rightarrow W/H$ が得られ、 W/H から $N_{W/H}$ の自然な写像とこれとを合成すれば、 $N_{W/H}$ の resolution が得られる。これは [2] で構成されたものと一致する。さて $p=8$ の場合の結果を利用して、 V_2/H の resolution を explicit に構成し、これを今 $Y_2: Z_2 \rightarrow V_2/H$ と表わす。 Z_2 は、 $2s+1$ 個、for some $s \geq 0$ の間被覆 $\{U_0, W_k^{(2)}, W_k^{(3)}, k=1, \dots, s\}$ で覆われ、(cf [2]) Z_2 に拡張された H_2 の作用は各 $W_k^{(i)}, U_0$ で次の形をとることが確かめられる。

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1, 1, e_8) & \text{on } W_k^{(2)} \\ (e_7^{-\mu_k}, e_8^{\mu_{k+1}}, e_8^{-1}) & \text{on } W_k^{(3)} \\ (1, 1, e_8) & \text{on } U_0 \end{array} \right. \quad \text{for some } \mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{Z}$$

この式から、 Z_2/H_2 の singular locus は、compact。さらに、 V_3 から同様に構成した Z_3 に対し、 $V_1/H \cup Z_2/H_2 \cup Z_3/H_1$ が、1つの複素空間を定義することがわかる。これを X_1 とおき、 $U_0 = V_1/H, U_1 = Z_2/H_2, U_2 = Z_3/H_1, \tilde{U}_1 = Z_2, \tilde{U}_2 = Z_3, \check{H}_1 = H_1, \check{H}_2 = H_2$ とおけばよい。この時 singular locus に因する statement は満たされている。morphism f_2 は自然に構成される。p.e.d.

上の証明の detail は、 ν に、induction の完全な遂行は、座標の explicit な計算によってなされる。同様の方法で、 X の次元に関する帰納法を加えることにより、 $\dim X > 3$ の場合にも定理 1 に

対応する事実を証明できることがほぼ確実である。

次に定理 1 を $\mathbb{C}^*$ -action を持つ特異点の解消に應用する。 L を、非特異曲面 S 上の line bundle とし、 $\sigma: \mathbb{C}^* \times L \rightarrow L$ を L の自然な $\mathbb{C}^*$ -action とする。 G を $\text{Aut}_0 L$ の有限部分群で、 σ と可換なものとする。(ここで $\text{Aut}_0 L$ は L の自己同型群を表す。) 今 $X = L/G$ が 0-section の image の外では、特異点を持たないとする。

Theorem 2

X の解消 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ で 次の性質を満たすものが存在する。

1) $\tilde{X}$ の $\mathbb{C}^*$ -action が存在し、(denoted by $\tilde{\sigma}$) $f \cdot \tilde{\sigma}(x) = \sigma(f(x))$ for $\forall x \in \tilde{X}$ が成立する。ここで $\tilde{\sigma}$ は L の $\mathbb{C}^*$ -action σ により誘導された X の $\mathbb{C}^*$ -action。

2) T は X の singular locus とし、 $f(T) = \Theta = \bigcup_{\alpha=1}^t \Theta_\alpha$ 。 Θ_α irreducible, とおくと、
 ① Θ_α は、非特異線織面
 ② $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \neq \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$ なら、 $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta$ は非特異曲面で、 Θ_α と Θ_β の交わりは transverse。
 ③ $\Theta_\alpha \cap \Theta_\beta \cap \Theta_\gamma \neq \emptyset$ for $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ なら、それは有限個の点で transverse に交わる。
 ④ どの Θ_α も 1 点を共有しない。

略証) T に属する点 x に対し、任意に $s \in \pi^{-1}(x)$ をとる。ここで π は自然な商写像 $L \rightarrow X$ 。 L の 0-section を同じく S で表すと、仮定より $s \in S$ 。 G_s は s の stability group とすると、 $\forall g \in G_s$ は、 S 上の L の fibre の近傍で、 L の ~~群~~ ^面 ~~面~~ ^面 trivialization に対応し、(これを $\varphi|_L \rightarrow \mathbb{C} \times U$, $U \ni s$ で表す。) 次、形 $\tilde{\sigma}$ を作用する。 i.e. $S \in \varphi^{-1}(x)$ に対応する

3 fibre coordinate とする時, $g: \zeta \mapsto \alpha(g)\zeta$, $\alpha(g) \in \mathbb{C}^*$. 従って, $G \rightarrow \mathbb{C}^*$ は準同型を $g \mapsto \alpha(g)$ で定義すれば, G は cyclic group の small group による extension であることがわかる. 従って, π の ^{近傍} 近傍は, $D^3/G(x)$ と同型である. ここで D^3 は 3次元の polycylinder, $|z_i| < 1, i=1,2,3$. $G(x)$ はこれに作用する有限巡回群. $D^3/G(x)$ の特異点の解消は, 群 $G(x)$ の位数に関する帰納法により, 定理 1 に着帰される. 各点 x の近傍に対して構成した resolution が 1 つの複素多様体 $\tilde{X}$ を得ることをみるために次の lemma が必要である.

Lemma

X を 3次元の V -manifold, $\{U_\alpha, G_\alpha\}$ が対応する X の被覆とする. G_α を有限群とし, $\tilde{U}_\alpha \subset \text{polycylinder}$ とし, Theorem 1 の 1.1.2. 次の系で構成される resolution $\tilde{Q}_\alpha: (\tilde{U}_\alpha/G_\alpha) \rightarrow U_\alpha/G_\alpha$ とすると, $\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \cap \tilde{U}_\beta/G_\beta \neq \emptyset$ in $\tilde{X}$ となる. (通部分で, 一致する). (by abuse of language everywhere) 略証) G_α は small group を含んだ 11 とし, α と β の U_α の原点は U_β , $\beta \neq \alpha$ に含まれた 11 とし, α と β の U_α の原点は U_β , $\beta \neq \alpha$ に含まれた 11 とし, α と β の U_α の原点は U_β , $\beta \neq \alpha$ に含まれた 11 とし, α と β の U_α の原点は U_β , $\beta \neq \alpha$ に含まれた 11 とし. 従って $\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \cap \tilde{U}_\beta/G_\beta$ の singular locus は, $D^3/G \times D$, (D^3 2次元の polycylinder, D unit disc の内部) と local に同型. $\tilde{Q}_\alpha$ は D^3/G の minimal resolution $\times \text{id}_D$ であり. 一方これは, $D^3/G \times 0, (0 \in D)$, を support とする. 適当に ideal の sheaf の blowing up である. blowing up は $\tilde{Q}_\alpha$ のとり方に無関係だから $\tilde{Q}_\alpha$ と $\tilde{Q}_\beta$ は一致する.

p.e.d. q.e.d.

Remark n -次元の場合 (たとえば 3次元) の Theorem 1 の resolution は.

非特異中心の有限回の monoidal 変換に分解できることが言える
 は、同じ lemma は高次元でもその analogy を持つ。しかしこれは正
 か $L \equiv 0$ // $\pi^* L$ を negative とすれば、 $\pi(S)$ exceptional。

Corollary 3 $Y \subset X$ において $\pi(S)$ を contract して得られる anal. space
 とする時、これは isolated singularity with $\mathbb{C}^*$ -action であり、この resolution
 で 定理 2 の 1) と 2) ③ ④ を満たすものが存在する。条件
 ① は、1) の $\mathbb{Q}$, say $\mathbb{Q}_1$ を除いて非特異線維面、~~と~~ という条件が
 おきかえられる。

Corollary 4 3次元の polycylinder D^3 に有限群 G が作用し、 D^3/G が原
 点に対応する点で isolated singularity を持つ時、この resolution

$f: X \rightarrow X$ で 定理 1 の 1) 2) と 4) を満たすものが存在する。

略証) $G \subset GL(3, \mathbb{C})$ と考えよう。 $P: W \rightarrow D^3$ は原点での monoidal
 変換とする。 G の action は W の action に extend する。 W は $\mathbb{P}^2$ の
 line bundle の $\mathcal{O}$ -section の G 倍と同一視されるから Corollary 3 の証明
 方法が適用しうる。この際 $\pi(S) \cong \mathbb{P}^2/G$ でこれは rational。

$f[\pi(S)]$ が nonsingular になる事等は、定理 1 の除の計算による。

Remark. もっと一般に、他の有限群 H が D^3 に act している時、
 この X の action を f induce するものは、 H -equivariant resolution が
 存在する。

例) 系 3 の例として、Brieskorn variety の resolution が可能であ
 る。実際、 $z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + z_3^{a_3} = 0$ かつ、 $\sum a_i = 4$ とおけば

explicitに resolution を construct する 方法がある。(c.f. [7]) T と π は π から K が topological sphere であり resolution の結果 π の surfaces すべて rational に $\mathbb{P}^3$ に π がある。この時は π の記号 $\pi(S) = \mathbb{P}^2$ とする。

最後に簡単な Brieskorn variety の resolution の例をあげておく。これは上の定理と関係がある。

例1 $Z_0^{a_0} + Z_1^{a_1} + Z_2^{a_2} + Z_3^{a_3} = 0$ の resolution, $f: \tilde{V}_a \rightarrow V_a$ π 次。性質を扱うことが存在。 $f^*(p) = \Theta_0 \cup \dots \cup \Theta_r$ と既約成分に分けるとき (i) Θ_i は $\mathbb{P}^2$ の l 枚の branched covering π の branch locus C は $\mathbb{P}^2$ 内 π の $(Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{P}^2$ の同次座標と π) $Z_1^a + Z_2^a + Z_3^a = 0$ で定義される非特異曲線。 $\Theta_i \cong \mathbb{P}^1$ -bundle over C $i=1, \dots, r$ 。 $\Theta_i \cap \Theta_{i+1} \cong C$ $i=0, \dots, r-1$ 。

(ii) $\Theta_i \cap \Theta_0 = \bar{C}$ とおくと $N_{\Theta_i/\tilde{V}_a} \cong -\frac{a'p+1}{a'a_0'}[C]$, $N_{\Theta_i/\tilde{V}_a}|_{F_i} \cong -b_i H_{F_i}$ $(i=1, \dots, r)$ が成り立つ。ここで $l = (a_0, a)$ $a_0 = a_0' l$ $a = a' l$ 。 p' は $-(a'p+1) \equiv 0 \pmod{a_0'}$ $0 < p' < a_0'$ により決まる数。 b_i は $\pi = a_0'$ と p から Hirzebruch [7] の algorithm により決まる数。ただし p は $p \equiv -a' \pmod{a_0'}$ $0 < p < a_0'$ により決まる数。 F_i は $\mathbb{P}^1$ -bundle Θ_i の任意の fibre。 N は normal bundle。

(a) $l=1$ のとき $\Theta \cong \mathbb{P}^2$ (ii) から $N_{\Theta/\tilde{V}_a} \cong -\frac{a'p+1}{a_0} H_{\Theta}$ 。ただし H_{Θ} は Θ の hyperplane bundle。よって Θ が π - 種例外曲面 $\leftrightarrow a'p+1 = a_0$
 $\leftrightarrow a|a_0-1$

(b) $l=1$ のとき $b_i = 2$ $\leftrightarrow a-1|a_0$ 。従って Θ が π - 種例外曲面かつ $b_i = 2$ $\leftrightarrow a_0 = (sa-1)(a-1)$ 。 $s=1, 2, 3, \dots$ 。

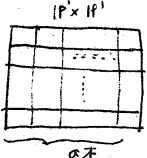
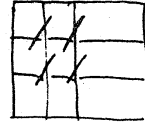
(c) $a=2$ の時, 1) d が奇数の時 $a)$ より $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^2$ が一種例外曲面。
 $\Theta_0 \cong \Sigma_2$ ($i=1, \dots, 5$) と $b_1=2$ 。2) d が偶数の時, $\Theta_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\Theta_0 \cong \Sigma_2$ ($i=1, \dots, 5$)
 と $b_1=2$ 。 $N_{\Theta_0/\tilde{V}_a} = -[\bar{C}]$, $\bar{C}$ は Θ_0 の diagonal である。 Θ_0 は一種例外曲
 面。 $b_1=2$ より Θ_0 を contract すれば次に Θ_1 が一種例外曲面になる。
 以下順次 Θ_i を contract すると最後に $\mathbb{P}^1$ が残る。 (ii) の場合
 を除き Θ_0 が ruled surface, ($\mathbb{P}^1$ -bundle) になるのはこの場合しかないので、
 ようして Θ_0 が curve に contract できるのはこの場合しかないので。

(d) $a \neq 0$ の時, $n=1$ の時, $f(0) = \Theta_0$, $N_{\Theta_0/\tilde{V}_a} = -[\bar{C}]$, 実際 $\tilde{V}_a \cong (-[\bar{C}_0])$ の
 line bundle の bundle space)

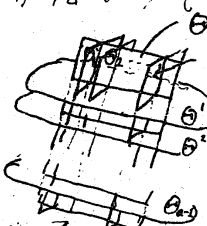
例の証明) $\mathbb{C}^4$ 内の line $L: Z_1=Z_2=Z_3=0$ は V_a と原点のみを共有
 する。 $\sigma: W \rightarrow \mathbb{C}^4$ を L に沿っての monoidal 変換, $\bar{V}_a \subset \sigma^{-1}(L)$ は V_a の pro
 per transform とする。 $\sigma^{-1}(0) \cap \bar{V}_a \cong \mathbb{P}^2$ で, $\sigma|_{\bar{V}_a - \sigma^{-1}(0)}$ は isomorphism である。
 $\bar{V}_a$ の $\mathbb{P}^2$ 上の singularity をはさげばよい。 monoidal 変換の定義から
 $\bar{V}_a$ の方程式は local に $Z_0^a = \sum Z_i^a$, ($i=1, \dots, 5$) は $\bar{V}_a \cap (\sigma^{-1}(Z_0^a + Z_1^a + Z_2^a + Z_3^a + Z_4^a = 0))$
 (local equation) と書ける。 これから Θ_i , $i=0, \dots, 5$ に関する statement が
 得る。 ii) の normal bundle に関して f と $\tilde{V}_a$ は、函数 Z_0 が $\tilde{V}_a$ 上に
 induce する divisor が linearly equivalent to 0 を利用して証明できる。

例 2 $Z_0^a + Z_1^a = Z_2^b + Z_3^b$ $V_{a,b}$ の resolution $f: \tilde{V}_{a,b} \rightarrow V_{a,b}$ が
 次のように構成される。 1) $Z_0=Z_1=0$ による $\mathbb{C}^4$ の monoidal 変換,
 followed by, $Z_2=Z_3=0$ の proper transform の center とする monoidal 変換。 これを
 $\sigma: W_1 \rightarrow V_{a,b}$ とすると, $\sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 。 2) $Z_0^a + Z_1^a = 0, Z_2^b + Z_3^b = 0$ による

対応する $\sigma^{-1}(0)$ 上の ab 個の点 ^{の交点} において, 対応する 2 平面の交わり
 を center とする blowing up を行う. これと σ との合成 $\pi: W_1 \rightarrow V_{a,b}$
 と表すと, $\sigma^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ^{上の} ab 個の点 π monoidal 変換して得られる.

非特異曲面. $\sigma^{-1}(0):$  $\leftarrow \sigma^{-1}(0)$  $a+b$ 本の line

3) W_1 は normalization. π は proper transform に $\mathbb{P}^1$ を, (これは今たまたま交わらないう) $\chi^2 = 5y^2$
 $(n, p) = 1$ type の特異点と生ずる. これによつて $V_{a,b}$ の resolution を得
 る. これは定理 2 で construct した Brieskorn variety の resolution とは異
 なる. 実際 π の方針 (1) は $\sigma^{-1}(0)$ の ab 個の点の連続は 2 次元で $\mathbb{P}^1$ だけ
 は $\mathbb{P}^1$ だけ. $b = a - 1$ の時は上の方針を少し modify して次の絵の
 ような resolution が得られる.

$\pi: \pi \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \theta_i, i=1, \dots, a-2$  $\mathbb{P}^1$ -bundle over $\mathbb{P}^1$
 である. θ_i は同型. θ_i は $\mathbb{P}^1$ 上の line bundle である. θ_i は同型.

これより π と π は $\mathbb{P}^1$ の resolution が全然 unique であることが
 観察できる.

reference

- [1] Hirzebruch-Jänig: Involutions and Singularities; Algebraic geometry. papers
 presented at the Bombay Colloquium. (1978)
- [2] Ueno: On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dim 2. I.
 Singular fibres of the 1st kind. Journal of the Faculty of Science, Sec. I A.
 Vol. 18, No. 1 p. 37-95 (1971)