

Yang-Baxter maps from the discrete KP hierarchy

寛 三郎 (Saburo Kakei)

立教大学理学部数学科

Department of Mathematics, Rikkyo University

Ralph Willox

東京大学大学院数理科学研究科

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

Jonathan J.C. Nimmo

Department of Mathematics, University of Glasgow

1 はじめに

1.1 本研究の動機

(量子)Yang-Baxter 方程式における R 行列は, 通常はベクトル空間 V のテンソル積 $V \otimes V$ 上に作用するものである。Drinfeld は, 集合 X の直積 $X \times X$ の上の写像に対する Yang-Baxter 方程式を研究することを提唱した [1]。すなわち,

$$\begin{array}{ccc} R : X \times X & \rightarrow & X \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (u, v) & \mapsto & (f(u, v), g(u, v)) \end{array} \quad (1)$$

に対して,

$$\begin{array}{ccc} R_{12} : X \times X \times X & \rightarrow & X \times X \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (u, v, w) & \mapsto & (f(u, v), g(u, v), w) \end{array} \quad (2)$$

等とすると, Yang-Baxter 方程式

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (3)$$

を満たす写像を考えるわけである。この性質を持つ写像 R は, “Yang-Baxter 方程式の集合論的解”, または, “Yang-Baxter map” と呼ばれる [2]。

Yang-Baxter map が有理写像であり, しかも係数が正値性を持つ場合には, 超離散極限 [3, 4]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log (e^{A/\epsilon} + e^{B/\epsilon}) = \max \{A, B\} \quad (A, B \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

によって, max-plus 代数 (tropical semi-field) による Yang-Baxter map が得られる。さらに, 超離散化の結果として得られる Yang-Baxter map は, 量子群の結晶基底の理論に現れる「組み合わせ論的 R 行列」と一致することがある。組み合わせ論的 R 行列は, い

いわゆる「箱玉系」[4]の時間発展を記述することが見出されており、このことを利用して、箱玉系のさまざまな拡張がなされている[5, 6, 7]。

これらの研究を、古典可積分系の理論、特に KP 階層の理論の枠組みで眺めなおして、そこに現れる諸概念が、古典可積分系においてどういう役割を果たすかを調べるのが本研究のそもそもの動機であった。すなわち、箱玉系に現れる量子可積分系の構造の対応物を、古典可積分系の中に見出すことを行いたいわけである。そこで、まずは次のことを目標として研究を行った。

- Yang-Baxter map の特殊解、およびそれらの変換までを、(離散)ソリトン理論から理解したい。
- Yang-Baxter map の持つ対称性を(離散)ソリトン理論の観点から理解したい。
- (できる限り)連続極限、超離散極限をとりやすい形で定式化を行ないたい。

これらの目標は今のところ完全には達成されていないが、目標達成のための手段として「離散 KP 階層」の新しい定式化[8]を行ったので、本稿ではそのことを中心に報告する。

1.2 例：離散 KdV 方程式

前節で説明した問題意識をよりはっきりさせるために、ここでは離散 KdV 方程式[9]

$$\frac{1}{u_{n+1}^{t+1}} - \frac{1}{u_n^t} = \delta(u_n^{t+1} - u_{n+1}^t) \quad (5)$$

を例にとって、Yang-Baxter map、および箱玉系との関係を議論しておく。

離散 KdV 方程式と Yang-Baxter map

(5) は、次の連立系に書き換えることができる。

$$u_n^{t+1} = \frac{v_n^t}{1 + \delta u_n^t v_n^t}, \quad v_{n+1}^t = u_n^t (1 + \delta u_n^t v_n^t) \quad (6)$$

この方程式を有理写像 $(u_n^t, v_n^t) \mapsto (u_n^{t+1}, v_{n+1}^t)$ としてとらえるために、パラメータ κ, μ を持つ有理写像 $R(\kappa, \mu)$ を次のように定める：

$$R(\kappa, \mu) : (u, v) \mapsto \left(\frac{v(1 + \mu uv)}{1 + \kappa uv}, \frac{u(1 + \kappa uv)}{1 + \mu uv} \right). \quad (7)$$

このとき、離散 KdV 方程式(6)は

$$(T_1 u, T_\ell v) = R(\delta, 0)(u, v) \quad (8)$$

としてとらえられる。さらに、(7)の $R(\kappa, \mu)$ が次の(パラメータ付き)Yang-Baxter 方程式を満たすことが、直接計算することにより示される。

$$R_{12}(\lambda_1, \lambda_2) R_{13}(\lambda_1, \lambda_3) R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) R_{13}(\lambda_1, \lambda_3) R_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (9)$$

($\lambda_3 = 0$ とすれば、離散 KdV 写像(8)を含む関係式が得られる。)

上の議論で重要となるのは、(6)における補助場 v_n^t をどのように定めるかである。今の場合には、後述する離散 KP 階層の理論により自然に定められる。

離散 KdV 方程式と箱玉系

離散 KdV 方程式 (5) において, naive な意味で超離散極限をとっても, 発展方程式は得られない。実際, (5) を

$$\frac{1}{u_{n+1}^{t+1}} + \delta u_{n+1}^t = \frac{1}{u_n^t} + \delta u_n^{t+1} \quad (10)$$

と係数が正になるように移項して,

$$u_n^t = e^{U_n^t/\varepsilon}, \quad \delta = e^{-\Delta/\varepsilon} \quad (11)$$

とおいてから超離散極限をとると,

$$\max\{-U_{n+1}^{t+1}, U_{n+1}^t - \Delta\} = \max\{-U_n^t, U_n^{t+1} - \Delta\} \quad (12)$$

なる方程式が得られる。しかしこの場合, $U_n^t, U_{n+1}^t, U_n^{t+1}$ の値が与えられても, U_{n+1}^{t+1} を定めることが一般にはできない。

この困難を解決するために, いったん (6) の形に移って考える。(6) より $u_n^{t+1}v_{n+1}^t = u_n^t v_n^t$ なので,

$$v_n^t = v_{n-k}^t \prod_{j=1}^k \frac{u_{n-j}^t}{u_{n-j}^{t+1}} \quad (13)$$

となる。そこで, $k \rightarrow \infty$ において

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n^t = 1, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} v_n^t = \frac{1}{1-\delta}, \quad \prod_{j=1}^{\infty} \frac{u_{n-j}^t}{u_{n-j}^{t+1}} \ll \infty \quad (14)$$

を要請すると

$$v_n^t = \frac{1}{1-\delta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{u_{n-j}^t}{u_{n-j}^{t+1}} \quad (15)$$

となるので, これを (6) の第 1 式に用いて,

$$u_n^{t+1} = \left\{ \delta u_n^t + (1-\delta) \prod_{k=-\infty}^{n-1} \frac{u_k^{t+1}}{u_k^t} \right\}^{-1} \quad (16)$$

が得られる。この形にしておいてから (11) とおいて超離散極限をとると,

$$U_n^{t+1} = \min \left\{ \Delta - U_n^t, \sum_{j=1}^{\infty} (U_{n-j}^t - U_{n-j}^{t+1}) \right\} \quad (17)$$

なる方程式が得られる。 $\Delta = 1$ とすれば, 高橋・薩摩 [10] によって導入されたソリトン・セルオートマトン (容量 ∞ の箱玉系) に対する差分方程式に他ならない。

(注) 離散 KdV 方程式と高橋・薩摩のソリトン・セルオートマトンとの関係は, 辻本・広田 [11] によって明らかにされた。ここでは, 離散 KdV 方程式と離散 Lotka-Volterra 方程式とを結ぶ Miura 型変換

$$w_n^t = \frac{u_n^t u_{n+1}^t}{1 - \delta u_n^t u_{n+1}^t} \quad (18)$$

を補助場として用いて連立方程式にして、上と同様の議論によって方程式 (17) を導いている。辻本・広田の補助場 w_n^t は、(6) の v_n^t とは別のものであり、Yang-Baxter map は得られないことを注意しておく。

2 離散 KP 階層の差分作用素による定式化

KP 階層に対応する離散方程式の階層は、これまでに様々な手法で扱われてきた [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]。ここでは、差分作用素を用いて定式化を行なう [8]。

$(M+1)$ 次元の格子 $\mathbb{Z}^{M+1}$ の座標を、 $(\ell, \mathbf{m}) = (\ell, m_1, \dots, m_M)$ とする。この格子の上の関数 $f: \mathbb{Z}^{M+1} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、シフト作用素 T_ℓ, T_j ($j = 1, \dots, M$) を次で定める：

$$T_\ell f(\ell, \mathbf{m}) = f(\ell + 1, \mathbf{m}), \quad T_j f(\ell, \mathbf{m}) = f(\ell, \dots, m_j + 1, \dots). \quad (19)$$

さらに、

$$\begin{aligned} W(\ell, \mathbf{m}) &:= I + w_1(\ell, \mathbf{m})T_\ell^{-1} + w_2(\ell, \mathbf{m})T_\ell^{-2} + \dots, \\ \bar{W}(\ell, \mathbf{m}) &:= \bar{w}_0(\ell, \mathbf{m}) + \bar{w}_1(\ell, \mathbf{m})T_\ell + \bar{w}_2(\ell, \mathbf{m})T_\ell^2 + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

という作用素を導入し、これらの作用素 $W(\ell, \mathbf{m}), \bar{W}(\ell, \mathbf{m})$ が、次の差分方程式を満たすものとする：

$$\begin{aligned} (T_j \widetilde{W})(1 - \alpha_j + \alpha T_\ell) &= B_j \widetilde{W} \quad (\widetilde{W} = W \text{ or } \bar{W}, j = 1, \dots, M), \\ B_j &= \alpha_j T_\ell + (1 - \alpha_j)u_j, \quad u_j := (T_j \bar{w}_0)/\bar{w}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 α_j ($j = 1, \dots, M$) はパラメータである。

さらに、(形式的)Baker-Akhiezer 関数 $\Psi_\lambda(\ell, \mathbf{m}), \bar{\Psi}_\lambda(\ell, \mathbf{m})$ を

$$\Psi_\lambda(\ell, \mathbf{m}) := W(\ell, \mathbf{m}) \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)^\ell \prod_{j=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{b_j}\right)^{m_j}, \quad (22)$$

$$\bar{\Psi}_\lambda(\ell, \mathbf{m}) := \bar{W}(\ell, \mathbf{m}) \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)^\ell \prod_{j=1}^M \left(1 - \frac{\lambda}{b_j}\right)^{m_j}, \quad (23)$$

で定める。ただし、 $\alpha_j = a/b_j$ ($j = 1, \dots, M$) である。こうすると、 $\Psi_\lambda(\ell, \mathbf{m}), \bar{\Psi}_\lambda(\ell, \mathbf{m})$ は次の線形差分方程式を満たすことが分かる：

$$T_j \Phi(\ell, \mathbf{m}) = \{\alpha_j T_\ell + (1 - \alpha_j)u_j\} \Phi(\ell, \mathbf{m}) \quad (\Phi = \Psi \text{ or } \bar{\Psi}, j = 1, \dots, M). \quad (24)$$

線形方程式 (24) の両立条件より、任意の $j, k = 1, \dots, M$ に対して、ポテンシャル $u_j = u_j(\ell, \mathbf{m})$ が満たすべき非線形差分方程式が得られる [16]：

$$\begin{cases} u_j(T_j u_k) = u_k(T_k u_j), \\ \alpha_j(1 - \alpha_k)(T_j u_k) + \alpha_k(1 - \alpha_j)(T_\ell u_j) = \alpha_k(1 - \alpha_j)(T_k u_j) + \alpha_j(1 - \alpha_k)(T_\ell u_k) \end{cases} \quad (25)$$

こうして得られる差分方程式の階層を、離散 KP 階層と呼ぶことにする。

(注) 線形方程式 (24) の右辺に現れている差分作用素は、 T_ℓ について 1 階である。これを高次にする「高次離散時間発展」を導入することもできるが、今回の議論には必要ないのでここでは深入りしない。

“タウ関数” $\tau = \tau(\ell, \mathbf{m})$ は、(20) の $\bar{w}_0(\ell, \mathbf{m})$ に対して

$$\bar{w}_0(\ell, \mathbf{m}) = \frac{T_\ell \tau}{\tau} \quad (26)$$

とすることによって導入される。このとき、

$$u_j = \frac{T_j \bar{w}_0}{\bar{w}_0} = \frac{\tau (T_\ell T_j \tau)}{(T_\ell \tau) (T_j \tau)} \quad (27)$$

であり、(25) より次の「広田・三輪方程式」が得られる：

$$(b_j - b_k)(T_\ell \tau)(T_j T_k \tau) + (b_k - a)(T_j \tau)(T_\ell T_k \tau) + (a - b_j)(T_k \tau)(T_\ell T_j \tau) = 0. \quad (28)$$

このことから分かるように、 $(M+1)$ 次元の格子において、各方向 $\ell, m_1, \dots, m_M$ は全て等価である。

3 (1+1)次元系へのリダクション

前節での定式化から $(1+1)$ 次元の離散方程式を得るには、適当なリダクションを行なうことになる。ここでは、 $(M+1)$ 個の離散変数から k 個を選んで、それらを全て 1 ずつ進めたときに τ 関数が不変であるという条件を、“ $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ 個}}$ -reduction” と呼ぶことにする。

3.1 (1,1) リダクション $\Rightarrow$ 離散 KdV 型方程式

(1,1) リダクションを考える場合、次の 2 つの可能性があり得る。

Type I: $M=2$ で (ℓ, m_1+1, m_2+1) を考える $\Rightarrow$ 離散 KdV 方程式

Type II: $M=3$ で $(\ell, m_1, m_2+1, m_3+1)$ を考える $\Rightarrow$ 離散変形 KdV 方程式

どちらの場合も、独立変数としては ℓ, m_1 をとることにする。Type I と Type II の違いは、リダクションを置く変数の中に着目する独立変数が含まれるかどうかにある。それぞれについて、具体的に見ていこう。

3.1.1 Type I: $M=2$ での (1,1) リダクション

この節では $M=2$ として、以下の条件を要請する。

$$\begin{aligned} \tau(\ell, m_1+1, m_2+1) &= \tau(\ell, m_1, m_2), \\ \Psi(\ell, m_1+1, m_2+1) &= \zeta \Psi(\ell, m_1, m_2) \quad (\zeta \in \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (29)$$

この条件の下で $\Phi := T_2 \Psi$ とすると、次の形の Lax 対が得られる：

$$\begin{cases} T_\ell \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_2^{-1})u & \alpha_2^{-1} \\ \alpha_1^{-1}\zeta & (1 - \alpha_1^{-1})u^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}, \\ T_1 \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1)v^{-1} & \alpha_1\alpha_2^{-1} \\ \zeta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (30)$$

両立条件を計算すると、

$$T_1 u = \frac{v}{1 + \delta uv}, \quad T_\ell v = \frac{uv}{T_1 u} \quad \left(\delta = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - 1)}{\alpha_2(\alpha_1 - 1)} \right) \quad (31)$$

となり、(6) の離散 KdV 方程式が得られる。

3.1.2 Type II: $M = 3$ での (1,1) リダクション

この節では $M = 3$ として、以下の条件を要請する。

$$\begin{aligned} \tau(\ell, m_1, m_2 + 1, m_3 + 1) &= \tau(\ell, m_1, m_2, m_3), \\ \Psi(\ell, m_1, m_2 + 1, m_3 + 1) &= \zeta \Psi(\ell, m_1, m_2, m_3) \quad (\zeta \in \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (32)$$

この条件の下で $\Phi := T_2 \Psi$ とすると、次の形の Lax 対が得られる：

$$\begin{cases} T_\ell \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_2^{-1})u & \alpha_2^{-1} \\ \alpha_3^{-1}\zeta & (1 - \alpha_3^{-1})u^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}, \\ T_1 \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1\alpha_2^{-1})v^{-1} & \alpha_1\alpha_2^{-1} \\ \alpha_1\alpha_3^{-1}\zeta & (1 - \alpha_1\alpha_3^{-1})v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (33)$$

両立条件を計算すると、

$$\begin{cases} T_1 u = v \frac{\alpha_1(1 - \alpha_3^{-1}) + (\alpha_1\alpha_3^{-1} - 1)uv}{(\alpha_1\alpha_2^{-1} - 1) + \alpha_1(1 - \alpha_2^{-1})uv}, \\ T_\ell v = \frac{uv}{T_1 u} = u \frac{(\alpha_1\alpha_2^{-1} - 1) + \alpha_1(1 - \alpha_2^{-1})uv}{\alpha_1(1 - \alpha_3^{-1}) + (\alpha_1\alpha_3^{-1} - 1)uv} \end{cases} \quad (34)$$

が得られる。これは、[19] で離散変形 KdV 方程式と呼ばれているものに等価である。また、(7) の $R(\kappa, \mu)$ を用いると、(34) は

$$(T_1 u, T_\ell v) = R\left(\frac{\alpha_3(\alpha_2 - 1)}{\alpha_2(\alpha_3 - 1)}, \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2\alpha_1^2(\alpha_3 - 1)^2}\right)(u, v) \quad (35)$$

と表すことができる。さらに、パラメータに対して適当な条件をおくと超離散極限をとることができて、[20] での「運搬車付き箱玉系」の方程式に一致する。また、上の写像 R は、[7] の Proposition 4.1 の写像の $M = 1$ の場合を、逆超離散化したものとみなすこともできる。

(注) Lax 対 (33) において $\alpha_3 = \alpha_1$ (すなわち $b_3 = b_1$) とすると、Type I の Lax 対 (30) が得られる。すなわち、Type I は Type II の特別な場合としてとらえられる。この“ $\alpha_3 = \alpha_1$ ”という特殊化は、[20] の言葉で言えば運搬車の容量を無限大にとることにあたる。また、同じことであるが、[7] の言葉ではパラメータ κ (κ 重対称テンソル積表現のクリスタルをとることに対応) を ∞ にとることにあたる。

3.2 (1,1,1) リダクション $\Rightarrow$ 離散 Boussinesq 型方程式

(1,1,1) リダクションの場合は, 次の3つの可能性があり得る。

Type I: $M = 2$ で $(\ell + 1, m_1 + 1, m_2 + 1)$ を考える $\Rightarrow$ 離散 Boussinesq 方程式

Type II: $M = 3$ で $(\ell, m_1 + 1, m_2 + 1, m_3 + 1)$ を考える $\Rightarrow$ 離散変形 Boussinesq 方程式

Type III: $M = 4$ で $(\ell, m_1, m_2 + 1, m_3 + 1, m_4 + 1)$ を考える

前節末の(注)でも述べたのと同様に, この場合も, Type I, Type II の方程式は, 最も一般的である Type III のパラメータを特殊化することでとらえられる。そこで, 以下ではまず Type III から扱うことにする。

3.2.1 Type III: $M = 4$ での (1,1,1) リダクション

この節では $M = 4$ として, 以下の条件を要請する。

$$\begin{aligned} \tau(\ell, m_1, m_2 + 1, m_3 + 1, m_4 + 1) &= \tau(\ell, m_1, m_2, m_3, m_4), \\ \Psi(\ell, m_1, m_2 + 1, m_3 + 1, m_4 + 1) &= \zeta \Psi(\ell, m_1, m_2, m_3, m_4) \quad (\zeta \in \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (36)$$

この条件の下で, $\Phi := T_2 \Psi$, $\Theta := T_2 T_3 \Psi$ とすると, 次が得られる:

$$\begin{cases} T_\ell \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_2^{-1})u_1 & \alpha_2^{-1} & \\ & (1 - \alpha_3^{-1})u_2 & \alpha_3^{-1} \\ \alpha_4^{-1}\zeta & & (1 - \alpha_4^{-1})u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix}, \\ T_1 \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1 \alpha_2^{-1})v_1 & \alpha_1 \alpha_2^{-1} & \\ & (1 - \alpha_1 \alpha_3^{-1})v_2 & \alpha_1 \alpha_3^{-1} \\ \zeta \alpha_1 \alpha_4^{-1} & & (1 - \alpha_1 \alpha_4^{-1})v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (37)$$

この(37)の両立条件を考えるのであるが, それを解く際に $(u, v) \mapsto (T_1 u, T_\ell v)$ という写像ととらえるか, $(u, T_\ell v) \mapsto (T_1 u, v)$ ととらえるかで話が違ってくる。前者の場合は一意的に解けて,

$$\frac{T_1 u_j}{u_j} = \frac{(a - b_{j+2})u_{j+1} - (b_1 - b_{j+2})v_{j+1}}{(a - b_{j+1})u_j - (b_1 - b_{j+1})v_j}, \quad \frac{T_\ell v_j}{v_j} = \frac{(a - b_{j+2})u_{j+1} - (b_1 - b_{j+2})v_{j+1}}{(a - b_{j+1})u_j - (b_1 - b_{j+1})v_j} \quad (38)$$

なる関係式が得られる。このことから, 有理写像 $\tilde{R}(a, b_1) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ を, $((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3))$ を次のように移すものとして定める:

$$\tilde{R}(a, b_1) : \begin{cases} u_j \mapsto u_j \frac{(a - b_{j+2})u_{j+1} - (b_1 - b_{j+2})v_{j+1}}{(a - b_{j+1})u_j - (b_1 - b_{j+1})v_j}, \\ v_j \mapsto v_j \frac{(a - b_{j+2})u_{j+1} - (b_1 - b_{j+2})v_{j+1}}{(a - b_{j+1})u_j - (b_1 - b_{j+1})v_j}. \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (39)$$

(37) の両立条件を $(u, T_\ell v) \mapsto (T_1 u, v)$ という写像ととらえる場合には、そのままでは一意的には解けない。そこで、積 $u_1 u_2 u_3, v_1 v_2 v_3$ がそれぞれ保たれるという条件をつけると解は一意に定められ、

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}_j}{u_j} = \frac{\tilde{a}_{j+1}\tilde{a}_{j+2}u_{j+1}u_{j+2} + \tilde{a}_{j+2}\tilde{b}_j u_{j+2}\tilde{v}_j + \tilde{b}_j\tilde{b}_{j+1}\tilde{v}_j\tilde{v}_{j+1}}{\tilde{a}_{j+2}\tilde{a}_j u_{j+2}u_j + \tilde{a}_j\tilde{b}_{j+1}u_j\tilde{v}_{j+1} + \tilde{b}_{j+1}\tilde{b}_{j+2}\tilde{v}_{j+1}\tilde{v}_{j+2}}, \\ \frac{v_j}{\tilde{v}_{j+1}} = \frac{\tilde{a}_{j+2}\tilde{a}_j u_{j+2}u_j + \tilde{a}_j\tilde{b}_{j+1}u_j\tilde{v}_{j+1} + \tilde{b}_{j+1}\tilde{b}_{j+2}\tilde{v}_{j+1}\tilde{v}_{j+2}}{\tilde{a}_{j+1}\tilde{a}_{j+2}u_{j+1}u_{j+2} + \tilde{a}_{j+2}\tilde{b}_j u_{j+2}\tilde{v}_j + \tilde{b}_j\tilde{b}_{j+1}\tilde{v}_j\tilde{v}_{j+1}}, \end{cases} \quad (40)$$

が得られる。ただし $\hat{u}_j = T_1 u_j, \tilde{v}_j = T_\ell v_j, \tilde{a}_j = a - b_{j+1}, \tilde{b}_j = b_1 - b_{j+1}$ ($j = 1, 2, 3$) であり、添え字は mod 3 で考える。そこで、パラメータを書き換えて、有理写像 $R(a, b)$ を、 $((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ を次のように移すものとして定める：

$$\begin{cases} u_j \mapsto u_j \frac{(a - b_{j+1})(a - b_{j+2})u_{j+1}u_{j+2} + (a - b_{j+2})(b - b_j)u_{j+2}v_j + (b - b_j)(b - b_{j+1})v_j v_{j+1}}{(a - b_{j+1})(a - b_j)u_{j+2}u_j + (a - b_j)(b - b_{j+1})u_j v_{j+1} + (b - b_{j+1})(b - b_{j+2})v_{j+1}v_{j+2}}, \\ v_j \mapsto v_j \frac{(a - b_{j+1})(a - b_j)u_{j+2}u_j + (a - b_j)(b - b_{j+1})u_j v_{j+1} + (b - b_{j+1})(b - b_{j+2})v_{j+1}v_{j+2}}{(a - b_{j+1})(a - b_{j+2})u_{j+1}u_{j+2} + (a - b_{j+2})(b - b_j)u_{j+2}v_j + (b - b_j)(b - b_{j+1})v_j v_{j+1}}. \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, \text{ 添え字は mod 3 で考える}) \quad (41)$$

この写像は、幾何クリスタルの理論から得られる Yang-Baxter map [21] において、変数 u, v を適当にスケールしたものである。この $R(a, b)$ に対しても、パラメータ付きの Yang-Baxter 方程式 (9) が成立する。

さらに、(39) の $\tilde{R}(a, b)$ と組み合わせると、

$$\tilde{R}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{R}_{13}(\lambda_1, \lambda_3)R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2, \lambda_3)\tilde{R}_{13}(\lambda_1, \lambda_3)\tilde{R}_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \quad (42)$$

を満たすことも示される。今の場合は直接計算することでも示されるが、(39) の $\tilde{R}$, (41) の R を図 1 のような矢印で表すことにすると、(42) が成立することは、図 2 により分かる。すなわち、始状態 $(u, v, \hat{w})$ から終状態 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \hat{w})$ にたどり着く経路が 2 つあるということに他ならない。有理写像に対する関係式 (9), (42) は、このように立方体に関する整合性としてとらえると見通しが良いので、“CAC (Consistency Around a Cube)” と呼ばれている [22]。

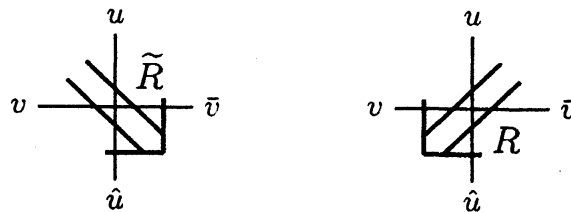


図 1: 写像 R の図示

離散 KP 階層からすると「時間発展」は $\tilde{R}$ と考えるのが自然であるが、それに対する Yang-Baxter 方程式を考える際には、 $\tilde{R}$ だけでなく R も同時に考える必要があることが分かる。

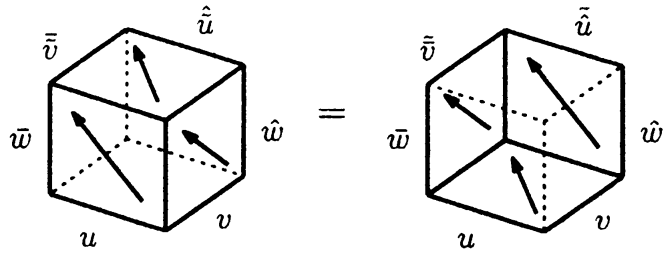


図 2: CAC 条件

3.2.2 Type II: $M = 3$ での $(1,1,1)$ リダクション

この節では $M = 3$ として、以下の条件を要請する。

$$\begin{aligned}\tau(\ell, m_1 + 1, m_2 + 1, m_3 + 1) &= \tau(\ell, m_1, m_2, m_3), \\ \Psi(\ell, m_1 + 1, m_2 + 1, m_3 + 1) &= \zeta \Psi(\ell, m_1, m_2, m_3) \quad (\zeta \in \mathbb{C})\end{aligned}\tag{43}$$

この条件の下で、 $\Phi := T_2 \Psi$, $\Theta := T_2 T_3 \Psi$ とすると、次が得られる：

$$\begin{cases} T_\ell \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_2^{-1})u_1 & \alpha_2^{-1} & \\ & (1 - \alpha_3^{-1})u_2 & \alpha_3^{-1} \\ \alpha_1^{-1}\lambda & & (1 - \alpha_1^{-1})u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix}, \\ T_1 \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1 \alpha_2^{-1})v_1 & \alpha_1 \alpha_2^{-1} & \\ & (1 - \alpha_1 \alpha_3^{-1})v_2 & \alpha_1 \alpha_3^{-1} \\ \lambda & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{bmatrix}. \end{cases}\tag{44}$$

3.1.2 節末の (注) と同様に、この Lax 対は最も一般的な Type III の Lax 対 (33) において $\alpha_4 = \alpha_1$ ($b_4 = b_1$) としたものと一致する。両立条件より得られる差分方程式は (38), (40) で $b_4 = b_1$ としたものに他ならない。

3.2.3 Type I: $M = 2$ での $(1,1,1)$ リダクション

この節では $M = 2$ として、以下の条件を要請する。

$$\begin{aligned}\tau(\ell + 1, m_1 + 1, m_2 + 1) &= \tau(\ell, m_1, m_2), \\ \Psi(\ell + 1, m_1 + 1, m_2 + 1) &= \zeta \Psi(\ell, m_1, m_2) \quad (\zeta \in \mathbb{C})\end{aligned}\tag{45}$$

この条件の下で得られる Lax 対は、上の (44) において、さらに条件 $\alpha_3 = 1$ ($b_3 = a$) を加えたものと一致する。両立条件より、(38) で $b_4 = b_1$, $b_3 = a$ とした差分方程式が得られる。しかし、 $(u, T_\ell v) \mapsto (T_1 u, v)$ という写像を作ろうとしても、Lax 対の両立条件をこの向きに解くことはできない。解けない理由であるが、今の場合は、両立条件から $T_\ell v_2 = u_3$ という関係式が得られるためである。

(注) ここでは詳しく議論しないが、この場合に得られる差分方程式は、Boussinesq 方程式への自然な連続極限を持つ。この場合、離散系のソリトン解は、連続系でのソリトン解に自然に極限移行する。

4 おわりに

今回は、差分作用素を用いた離散KP階層の定式化から、どのような Yang-Baxter map が得られるかを具体的に計算してみた。離散KP階層の reduction として得られる差分ソリトン方程式 (例えば離散KdV方程式) は、 R という写像と組み合わせることで、Yang-Baxter 関係式を満たすことを示した。離散ソリトン方程式と直接対応する写像 $\tilde{R}$ は、Yang-Baxter map の文脈では “companion map” と呼ばれるものである [2]。しかし、3.2.3 節での例のように、図 1 の “ R ” の方向の写像は、必ず構成できるというわけではないようである。このことが一般的にどのような意味を持つのかは、今のところ明らかではない。

Yang-Baxter map の研究においては、ある条件の下での幾何学的な分類理論が完成している [22]。分類に現れる写像が、すべて離散KP階層から得られるものと対応するかどうかは、現時点では不明である。渋川によって導入された “dynamical Yang-Baxter map” [23] も、離散ソリトン系と対応するかどうかは分かっていない。

また、ソリトン・オートマトンの表現論的研究 [5, 6, 7] においては、さまざまな表現に対応する組み合わせ R を用いたオートマトンが構成されており、それらを離散KP階層の立場から再構成することが可能であると期待される。表現論的アプローチに現れる種々の概念 (柏原作用素, KKR 全単射, ...) の対応物を考えることも、興味深い問題であろう。

これらの問題に少しでも解答を与えるべく、現在研究を進めているところである。

参考文献

- [1] V.G. Drinfeld, On some unsolved problems in quantum group theory, *Lecture Notes in Math.* **1510**, Springer, Berlin, 1992, pp.1–8.
- [2] A. Veselov, Yang-Baxter maps: dynamical point of view, *MSJ Memoirs* **17** (2007), 145–167.
- [3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3247–3250.
- [4] 広田良吾・高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版 (2003)
- [5] T. Takagi, Soliton cellular automata, *MSJ Memoirs* **17** (2007), 105–144.
- [6] 国場敦夫・尾角正人・高木太一郎・山田泰彦, Tropical R: 例と応用, 京都大学数理解析研究所講究録 **1429** (2005), 57–69.
- [7] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba., T. Takagi and T. Tokihiro, The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 274–308.
- [8] S. Kakei, R. Willox and J.J.C. Nimmo, to appear in *Glasgow Math. J.* (2008)

- [9] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 1424–1433.
- [10] D. Takahashi and J. Satsuma, A soliton cellular automaton, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990), 3514–3519.
- [11] S. Tsujimoto and R. Hirota, Ultradiscrete KdV Equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998), 1809–1810.
- [12] T. Miwa, On Hirota's difference equation, *Proc. Japan Acad., Ser. A* **58** (1982), 8–11.
- [13] E. Date, M. Jimbo and T. Miwa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 4125–4131.
- [14] F.W. Nijhoff, H.W. Capel, G.L. Wiersma, and G.R.W. Quispel, Bäcklund transformations and three-dimensional lattice equations, *Phys. Lett. A* **105** (1984), 267–272.
- [15] Y. Ohta, R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 1872–1886.
- [16] J.J.C. Nimmo, Darboux transformations and the discrete KP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 8693–8704.
- [17] S. Tsujimoto, On a discrete analogue of the two-dimensional Toda lattice hierarchy, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **38** (2002) 113–133.
- [18] M. Białecki, to appear in *Glasgow Math. J.* (2008)
- [19] 辻本論・広田良吾, 非線形差分方程式の保存量, 京都大学数理解析研究所講究録 **933** (1995), 105–112.
- [20] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) L733–L739.
- [21] P. Etingof, Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation, *Comm. Algebra* **31** (2003) 1961–1973.
- [22] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris, Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach, *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 513–543.
- [23] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), 2199–2221.