

Weakly coupled diffusion system について

山口昌哉, 電高惟倫, 三村昌泰.

生態学, 化学反応論, および物性論の一部(超伝導)の理論的研究に登場する方程式系は一般的に以下のような形である。 $u(x, t) = {}^t(u_1, \dots, u_N)$, $f(u) = {}^t(f_1, \dots, f_N)$ として

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A \Delta u + f(u) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

ただし, $A = (a_{ij})$ は $N \times N$ 行列である。この記事では, 上のような系が非線型発展方程式の中び一ツリ典型となり, ここには数学的な研究を進展させる余地があることを示したい。目標は上の初期値問題の解が $t \rightarrow +\infty$ においてどのような挙動をとるか, その挙動が初期値とどのようにかわるかが判明することが, 学問的に興味のあることであるが,

(1) の形の系の特別なものについては、我々のうちの一人、三村の抗原抗体反応を扱った論文[1]、および今回の研究会での大内氏の報告[2]、と更に三村、中岡の報告[3] において或る程度まで取扱われている。この研究をふくむような一般論が建設できなにか？というのが我々の願望である。ごく一般的に直ちにわかることは、 $f(u)$ に対するごく軽い条件(たとえば *local lipschitz*) のもとでの局所的な(1)の解の存在であるが、それ以上、上の目的に近づくためには、 $f(u)$ に対する条件を適当に課して、大局的な解の存在、一意性、更に非負の初期値に対して解も非負となること、および解の有界性をうち建てて行く必要がある。このような方向をめぐっての研究は外国にもある(主としてポーランド)がその一般化の方向は少なからず形式的であって、上記三村の導いた方程式系は、その研究に含まれない。(例えば *Malak, Szarsky, MacNab, Wazewski* およびその門下の大量の論文を見よ、*Ann. Pol.*)

しかし問題のなっかしさを示すために次のような典型的な方程式系の列をあげて見よう、いずれも非負の初期値に対して考へることにしよう。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}$$

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}$$

$$(I_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases} \quad (I_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}$$

$$(=) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -uv \end{cases}$$

$$(I_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = uv \end{cases}$$

(K), (H) については $0 \leq u(t, x) \leq \sup_x u_0(x)$, $0 \leq v(t, x) \leq \sup_x v_0(x)$

(P) については $0 \leq u(t, x) \leq \sup_x [u_0(x) + v_0(x)]$, $0 \leq v(t, x) \leq \sup_x [u_0(x) + v_0(x)]$, が成り立つ, この等号を特殊な場

合として含むような一般論は建設できるが, (=), (H) を一例として含むようなものはむづかしいのである。ただし(=)についても(H)についても, a priori estimate は得られる。

このことは次のようにして見られる。(1)にっ"こ"を代"て"してお"う。あらためて

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u v & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -u v & (2) \end{cases}$$

$$\text{今 } u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$$

$$\sup_x u_0(x) = \overline{u_0}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \geq 0$$

$$\sup_x v_0(x) = \overline{v_0}$$

とする, ただし $v_0(x)$ は台は有界であると仮定する。

(この仮定を除いては結果はまた判らない) そのとき

$\varepsilon > 0, \delta > 0$ が存在して,

$$0 \leq u(t, x) \leq \overline{u_0} e^{\overline{v_0} \left(\frac{e^{\delta \varepsilon}}{\delta} \right)}$$

$$0 \leq v(t, x) \leq \overline{v_0}$$

が成立する。(非負の初期値に対し, 解が $0 \leq u(t, x)$
 $0 \leq v(t, x) \quad \forall t \geq 0$ はどんな方法でも簡単に示せる)

証明

(1) の方程式を u のみの方程式とみて補助方程式を考へる

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1, \quad u_1(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

比較定理より $u_1(x, t) \leq u(x, t) \quad \forall t \geq 0, x \in R^n$
 である。

ここで $u_0(x) \neq 0$ を固定すると, $v_0(x)$ の Δ に $\lambda = \lambda_1$ である x について $u_1(x, t) \geq \delta \quad (t \geq \varepsilon > 0)$ であることは明らかである。一方

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ を と け ば } \\
 v(x, t) &= v_0(x) e^{-\int_0^t u(x, \tau) d\tau} \\
 &\leq v_0(x) e^{-\int_0^t u_1(x, \tau) d\tau} \\
 &\leq v_0(x) e^{-\int_\varepsilon^t u_1(x, \tau) d\tau} \\
 &\leq v_0(x) e^{-\delta(t-\varepsilon)} \leq v_0 e^{-\delta(t-\varepsilon)} = w(t)
 \end{aligned}$$

再び (1) と 比較する方程式

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2 w(t), \quad u_2(x, 0) = u_0(x) \quad (4)$$

を 考 へ る ば

$$u(x, t) \leq u_2(x, t)$$

が 証 明 可 能 である。

$$u_2 e^{-\int_0^t w(\tau) d\tau} = u_3(x, t)$$

とかく $u_3(x, t)$ は次の方程式を満たす,

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \Delta u_3, \quad u_3(x, 0) = u_0(x)$$

これについて $0 \leq u_3(x, t) \leq \bar{u}_0$ はよく知られているから,

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{\bar{v}_0 \left(\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right)} e^{-\bar{v}_0 \frac{e^{\delta(t-t)}}{\delta}} \bar{u}_0$$

が成立し, 自明の $0 \leq v(x, t) \leq \bar{v}_0$ とあわせて上記の結果を得る。

尚: の結果が best であるかどうか, (i) と (ii) に述べた結果が成立する望みがあるのかどうか未だ判明してはいない。

次に一般論であるが, それは以下のように定式化できる。

* の方程式について次のような3つの仮定をおく,

[仮定1] u の空間 R^N の中に A 枚の超曲面 $\{u \in R^N, V_\alpha(P_\alpha u) = 0\}$

$\alpha = 1, 2, \dots, A$, $P_\alpha u = {}^t(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_{s_\alpha}})$ のかこむ空でないコンパクト集合 $S = \bigcap_{\alpha=1}^A \{u \in R^N, V_\alpha(P_\alpha u) \leq 0\}$ がある。

[仮定2] $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_{\alpha_2} = \dots = \lambda_{\alpha_{s_\alpha}} = \mu_\alpha$

[仮定3] 正数 δ_0 があつて $0 \leq \delta \leq \delta_0$ なる任意の δ に対

して集合 $\bigcup_{\alpha=1}^A \{u \in R^N; V_\alpha(P_\alpha u) = \delta, V_\beta(P_\beta u) \leq \delta (\beta \neq \alpha)\}$ 上

$$(i) \quad \left(\frac{\partial^2 V_\alpha(P_\alpha u)}{\partial u_{\alpha_i} \partial u_{\alpha_j}} \right) \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha(P_\alpha u)}{\partial u_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(u) \leq \kappa \delta \quad (\exists \kappa \geq 0)$$

結論 以上の仮定の α と $u_0(x) \in S$, $\forall x \in R^n$ なる任意の初期値に対して $u(x, t) \in S \quad \forall t \geq 0, x \in R^n$ なる $(*)$ の解は一意的に存在する。

証明 は $\alpha = 1$ は大域解は既にあるものとして, S から出発して常に S 内にあまする α とを証明することによって行う。連結集合 $[0, \infty)$ の部分集合 e を次のように定義する

$$e = \{ t \in [0, \infty) ; u(x, t) \in S \text{ for } \forall x \in R^n \}$$

そして e が空でないこと, 閉集合であること, および開集合であることを示せば $e = [0, \infty)$ となつて上のことの証明になる。まず空でないことは $t = 0$ において $u(x, 0)$ は S に入るからあきらかである。次に閉であることは $u(x, t)$, $V_\alpha(P_\alpha u)$ の連続性と S のコンパクト性よりあきらかである。残るのは開であることである。すなわち $T > 0$ があつて $[0, T)$ 上のすべての t について $u(x, t) \in S$ を示せばよい。

$$M = \max_{\alpha} \sup_{0 \leq t \leq T} V_{\alpha}(P_{\alpha} u) \quad \text{とある,}$$

$$V_{\alpha}(P_{\alpha} u_0) \leq 0 \quad \text{であるから } T \text{ と } t \text{ の和は } \infty \text{ である}$$

$$M \leq \delta_0 / 3e \quad \text{とある, } r \geq 1, a \geq 2\pi\mu_{\alpha} \quad (\forall \alpha)$$

$$, b > K \text{ は定数 } r, a, b \in \mathbb{R}, W_{\alpha} = V_{\alpha}(P_{\alpha} u) -$$

$$= \frac{M}{r^2} (1 + |x|^2 + at) e^{bt} \quad \text{とある, } W_{\alpha}(x, 0) < 0$$

$$\text{for } \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ であり, } V_{\alpha}(x, t) \in \{ |x| \leq r \} \times [0, T]$$

$$\text{なる } (x, t) \text{ に対して } W_{\alpha}(x, t) < 0 \text{ が成り立つ 何故な$$

$$\text{らば, } \text{どうなるか? とし, ある番号 } \alpha \text{ について } W_{\alpha}(x_1, t_1) \geq 0$$

$$\text{となる点 } (x_1, t_1) \in \{ |x| \leq r \} \times [0, T] \text{ がある。 } W_{\alpha}(x, t)$$

$$\text{の連続性よりそのような } t_1 \text{ の } \inf (\alpha \text{ について } t) \text{ は } t_0 \text{ とす}$$

$$\text{る。 } \max_{|x| \leq r} W_{\alpha}(x, t_0) = 0 = W_{\alpha}(x_0, t_0) \text{ となる点}$$

$$x_0 \text{ (} |x_0| \leq r \text{) がある。 } \beta \neq \alpha \text{ に対しては } W_{\beta}(x_0, t_0) \leq 0$$

$$\text{である。 } W_{\alpha} \text{ に関する放物型微分不等式をもちいて,}$$

$$(x_0, t_0) \text{ においてこれをあてはめる}$$

$$\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s_{\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial u_{\alpha i}} \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s_{\alpha}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial \mu_{\alpha i}} [\mu_{\alpha i} \Delta u_{\alpha i} +$$

$$f_{\alpha i}(u)]$$

□

$$\begin{aligned}
&= \mu_\alpha \Delta V_\alpha - \mu_\alpha \sum_{i,j=1}^{s_\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i} \partial u_{\alpha_j}} \frac{\partial u_{\alpha_i}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\alpha_j}}{\partial x_k} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial u_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_\alpha}{\partial t} - \mu_\alpha \Delta W_\alpha &= \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} - u_\alpha \Delta V_\alpha - \frac{M}{r^2} [b(1+|x|^2+at) \\
&\quad + a - 2\pi u_\alpha] e^{bt}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} (x_0, t_0) \text{ 附近 } \frac{\partial W_\alpha}{\partial t} \geq 0, \Delta W_\alpha \leq 0 \text{ あり}$$

$$\text{更に } W_\alpha = 0, \quad W_\beta \leq 0 \quad \beta \neq \alpha.$$

$$V_\alpha(P_\alpha u) = \frac{M}{r^2} (1 + |x_0|^2 + at_0) e^{bt_0} \equiv \delta$$

$$(r \geq 1, \quad T \leq \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{r} \leq 3 \leq r, \quad \delta \leq 3eM \leq \delta_0$$

$$V_\beta \leq \delta \quad (\beta \neq \alpha) \quad (t = 0 \text{ かつ } (x_0, t_0) = 0, \dots)$$

2 係定 3 の (i) (ii) が成立し,

$$0 \leq \frac{\partial W_\alpha}{\partial t} - \mu_\alpha \Delta W_\alpha \leq -(b-k)\delta < 0 \quad \text{矛盾.}$$

このように, $\forall \alpha$ について $V_\alpha(P_\alpha u) < \frac{M}{r^2}(1+|x|^2+at)e^{bt}$ が $\{|x| \leq r\} \times [0, T)$ について示された。 (x, t) を固定し, $r \rightarrow +\infty$ とすると $\frac{M}{r^2}(1+|x|^2+at)e^{bt} \rightarrow 0$ となり $V_\alpha(P_\alpha u) \leq 0$ が $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$ について示された。 よって $u(x, t) \in \mathcal{S}'$ である。

証明 おわり.

例. たとえば上の(11.2) については

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -uv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv$$

$$\varphi_1 = u - 1, \quad \varphi_4 = -v$$

$$\varphi_2 = v - 1, \quad \varphi_5 = -u.$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} uv = -uv \leq 0$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

がわかる。

これ以外に例えば, Hodgkin Huxley の方程式系,
超伝導の方程式系等が上の定理を適用できる対象になる。

Nagumo Model の系はこれができない。

文 献

- [1] M. Mimura : Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ
Ser. A vol. 5. No. 1 (1969)
- [2] S. Ôuchi : 縮退した半線型方程式系の iteration
による非負解の構成について。本講義録
- [3] M. Mimura : ある種の化学反応系に関連した半線
A. Nakaoaka : 型楕円型方程式について。本講義録