

垂直型3層チャンネル配線アルゴリズムについて

九工大情報工学科 永松正博 (Masahiro Nagamatsu)

1. まえがき

LSIのマスクパターンのレイアウト設計における配線手法のうち、チャンネル割当法⁽¹⁾ (channel assignment method) と呼ばれる手法は、配線を大域的配線(global routing) とチャンネル配線(channel routing) の二段階に分けて行うものである。大域的配線では、大まかに各配線がどのチャンネル(配線のための通路)を通るかを決定し、チャンネル配線では、各チャンネル内の配線の詳細を決定する。チャンネル配線においては、要求される配線を最も少ないトラック数(チャンネル幅)で実現しなければならない。このチャンネル配線問題には、付加される条件等によりいくつかの型があるが、多くがNP完全であることが知られている⁽²⁾。

チャンネル配線の手法は、トラック、もしくは、ネットごとに配線を行うもの⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁴⁾ と、コラムごとに配線を行うもの⁽⁵⁾⁽⁶⁾ の二種類がある。前者を水平型、後者を垂直型と呼ぶことにする。チャンネル配線問題を困難なものにしているのは、各ネットの端子の位置関係により生じるネット間の制約条件であり、この制約条件を解消し、かつ、使用するトラック数を減少させるには、幹線(各ネットの配線の水平線分)を分割しなければならない。垂直型の手法は、水平型の手法に比べ、この幹線分割が自然に行われるという長所を持つ。

3層チャンネル配線問題に関しては、すべてのネットが上側端子1個と下側端子1個からなる2端子ネットである任意のチャンネルを、チャンネル密度に等しい本数のトラックで配線するアルゴリズムが知られている⁽⁷⁾。このアルゴリズムは、ネットの個数をNとす

ると、配線に $O(N^2)$ の時間を要する。本論文では、すべてのネットが2端子ネットである任意のチャンネルを、チャンネル密度に等しい本数のトラックで配線する垂直型3層チャンネル配線アルゴリズムを示す。このアルゴリズムは $O(N \cdot \log_2 N)$ の時間で配線を行う。また、このアルゴリズムは3端子以上のネットがあるようなチャンネルに対しても適用することができ、任意のチャンネルを $2 \times (\text{チャンネル密度}) - 1$ 本のトラックで配線する。またこれより、2層チャンネル配線問題において、任意のチャンネルが $4 \times (\text{チャンネル密度}) - 3$ 本のトラックで配線可能であることを示すことができる。

2. 定義と準備

2. 1 チャンネル

チャンネルは、無向グラフ $G=(V, E)$ で表わされる。ここで

$$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$$

$$V_0 = \{ \langle c, 0, 1 \rangle \mid 1 \leq c \leq L \}$$

$$V_1 = \{ \langle c, t, p \rangle \mid 1 \leq c \leq L, 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$$

$$V_2 = \{ \langle c, W+1, 1 \rangle \mid 1 \leq c \leq L \}$$

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$$

$$E_0 = \{ (\langle c, 0, 1 \rangle, \langle c, 1, p \rangle) \mid 1 \leq c \leq L, 1 \leq p \leq Z \}$$

$$E_1 = \{ (\langle c, t, p \rangle, \langle c+1, t, p \rangle) \mid 1 \leq c \leq L-1, 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$$

$$\cup \{ (\langle c, t, p \rangle, \langle c, t+1, p \rangle) \mid 1 \leq c \leq L, 1 \leq t \leq W-1, 1 \leq p \leq Z \}$$

$$\cup \{ (\langle c, t, p \rangle, \langle c, t, p+1 \rangle) \mid 1 \leq c \leq L, 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z-1 \}$$

$$E_2 = \{ (\langle c, W+1, 1 \rangle, \langle c, W, p \rangle) \mid 1 \leq c \leq L, 1 \leq p \leq Z \}$$

である。ただし、 c, t, p は整数値を取る。

L, W, Z は、それぞれ、チャンネルの長さ、幅、層の個数と呼ばれる。頂点 $\langle c, t, p \rangle$ は、3次元空間上の、 x 座標が c 、 y 座標が t 、 z 座標が p の位置に置かれているとする。ただし、 E_0, E_2 に属する辺は y 軸に平行であると見なす。 $z=p$ である平面を層 p 、

$x=c$ である平面をコラム c 、 $y=t$ である平面をトラック t と、それぞれ、呼ぶ。チャンネルの幅 W を、トラック数とも呼ぶ。(図 1)

2. 2 ネット

V_0 に属する頂点を下側端子、 V_2 に属する頂点を上側端子と呼ぶ。コラム c の上側端子を $\text{top}(c)$ 、下側端子を $\text{bot}(c)$ で表わす。互いに連結される端子の集合をネットと呼び、 n 個の端子からなるネットを n 端子ネットと呼ぶ。ネットに $1, 2, \dots, N$ と番号を付け、各端子がどのネットに属するかを関数 $\text{net}: V_0 \cup V_2 \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$ で表わす。 $\text{net}(v)=0$ のときは、端子 v はどのネットにも属さない。このような端子を空端子と呼ぶ。 $1 \leq e \leq N$ なる各 e に対して、 $|\{v | \text{net}(v)=e\}| \geq 2$ であると仮定する。上側端子と下側端子が共に空端子でないコラムを 2 端子コラム、どちらか一方のみが空端子であるコラムを 1 端子コラム、共に空端子であるコラムを 0 端子コラムと呼ぶ。

$\text{colr}(e)$ で、ネット e に属する端子の x 座標の最大値を、 $\text{coll}(e)$ で最小値を表わす。

各 e に対して、 $\text{coll}(e) < \text{colr}(e)$ であると仮定する。 $\{\text{colr}(e) | 1 \leq e \leq N\}$ の最大値を L_1 とする。チャンネル配線においては、一般に、配線のための領域が L_1 よりもさらに右側に出る。この出る長さは最大で $[N/2]$ であるが、通常、種々の発見的な手法で小さくできる⁽⁶⁾。本論文では、 $L_1 + [N/2] \leq L$ であると仮定する。

関数 $\text{stav}: V_0 \cup V_2 \rightarrow \{n, l, b, r\}$ を次のように定義する。

$$\text{stav}(v) = \begin{cases} n & \text{net}(v)=0 \text{ の場合} \\ l & \text{net}(v) \neq 0, (v \text{ の } x \text{ 座標}) = \text{colr}(\text{net}(v)) \text{ の場合} \\ b & \text{net}(v) \neq 0, \text{coll}(\text{net}(v)) < (v \text{ の } x \text{ 座標}) < \text{colr}(\text{net}(v)) \text{ の場合} \\ r & \text{net}(v) \neq 0, (v \text{ の } x \text{ 座標}) = \text{coll}(\text{net}(v)) \text{ の場合} \end{cases}$$

l, r, b は、それぞれ、端子から配線が、左、右、左右に延びることを意味する。コラム c に対して、 $\text{stac}(c) = (\text{stav}(\text{bot}(c)), \text{stav}(\text{top}(c)))$ と定義する。図 1 に示すチャンネルの場合、 $\text{stac}(1) = (r, r)$, $\text{stac}(2) = (r, l)$, $\text{stac}(3) = (b, n)$, $\text{stac}(4) = (l, l)$ である。

実数値 x に対して、 $d(x) = |\{e | \text{coll}(e) \leq x \leq \text{colr}(e)\}|$ と定義する。コラム c に対して、

$d(c)$ をコラム c の密度、 $d(c+0.5)$ をコラム c とコラム $c+1$ の間の密度と呼ぶ。 $\max\{d(c) \mid c=1, 2, \dots, L\}$ を C チャンネル密度と呼び、 dc と書く。 $\max\{d(c+0.5) \mid c=1, 2, \dots, L-1\}$ を S チャンネル密度と呼び、 ds と書く。図1に示すチャンネルの場合、 $d(1)=2, d(1.5)=2, d(2)=3, d(2.5)=2, \dots$ であり、 $dc=3, ds=2$ である。単にチャンネル密度という場合は S チャンネル密度を意味する。

[補題1] $ds \leq dc \leq ds+1$ である。また、 $d(c)=ds+1$ であるならば、 $stac(c)=(l, r)$ か (r, l) である。 ■

2.3 チャンネル配線

チャンネル配線とは、次の条件1を満足するように、関数 net の定義域を $V_0 \cup V_1$ から $V \cup E$ に拡張することである。

[条件1] $1 \leq e \leq N$ なる各 e に対して、 $V_e = \{v \mid v \in V, net(v)=e\}$, $E_e = \{a \mid a \in E, net(a)=e\}$, $G_e = (V_e, E_e)$ と定義する。次の①および②が成立する。

- ① 各 e に対して、 G_e は G の連結な部分グラフである。
- ② 各 e, f ($e \neq f$) に対して、 $V_e \cap V_f = \emptyset$ である。また、チャンネルを z 軸方向に透視した場合、 G_e の辺と G_f の辺が重なることはない。 ■

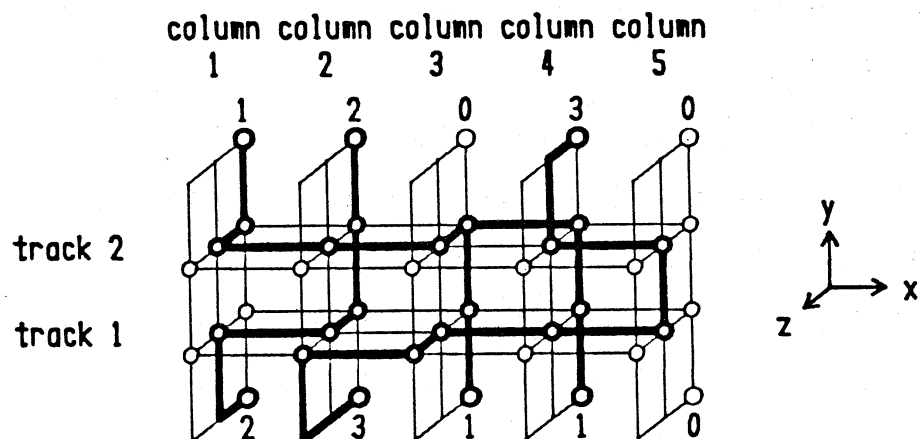


図1 チャンネルとチャンネル配線

グラフ G_e がネット e の配線を表わす。グラフ G_e の道（長さ 1 以上）で、直線上にあるものを線分という。線分のうちで、真に他の線分の一部でないものを、セグメントという。頂点 v_1, v_2 を端点とするセグメントを $v_1 \sim v_2$ と書く。 x, y, z 軸に平行なセグメントを、それぞれ、水平セグメント、垂直セグメント、スルーホールと呼ぶ。チャンネル配線が可能であるためには、明らかに、 ds 本以上のトラックが必要である。チャンネル配線の例を図 1（図 1 の太線）に示す。

3. すべてのネットが 2 端子ネットであるチャンネルに対して

3 層チャンネル配線に関しては、次のことが知られている。

〔命題 1〕⁽⁷⁾ トラック数が ds であり、かつ、すべてのネットが、上側端子 1 個と下側端子 1 個からなる 2 端子ネットであるチャンネルは配線可能である。 ■

本節では、垂直型 3 層チャンネル配線アルゴリズム CHROUTER を使用することにより、トラック数が ds であり、かつ、すべてのネットが 2 端子ネットであるチャンネルは配線可能であることを示す。

垂直型チャンネル配線アルゴリズムは、左側のコラムより順に、コラムごとに配線を進めていく。以下、CHROUTER を PASCAL 風に記述する。2. 3 節で述べたように、チャンネル配線とは $V \cup E$ の各要素に対して関数 net の値を決定することであるが、簡単のため、ここでは V の各要素に対する関数 net の値の決定の方法のみを記述する。 E の各要素に対する関数 net の値の決定の方法は、これより容易に分かる。CHROUTER においては、 V の要素 $\langle c, t, p \rangle$ に対する関数 net の値 $net(\langle c, t, p \rangle)$ は 3 次元の配列 $net[c, t, p]$ で表現されており（以後、 net は配列を意味する）、CHROUTER の実行前には、 $net[c, 0, 1], net[c, W+1, 1]$ ($1 \leq c \leq L$) は各端子が属するネットを示しており、 $net[c, t, p]$ ($1 \leq c \leq L, 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z$) はすべて 0 である。なお、本節を通して、 $W=ds, Z=3$ である。

[アルゴリズム CHROUTER]

```

procedure CHROUTER;
var f:array[0..W+1] of 0..N; q:array[0..W+1] of 0..Z;
    t:0..W+1; c:0..L;
    procedure COLROUTER(c:1..L);
        begin ..... end;
    begin
    for t:=1 to W do begin f[t]:=0;q[t]:=0;end;
    c:=0;
    repeat
        c:=c+1;
        q[0]:=0;q[W+1]:=0;f[0]:=net[c,0,1];f[W+1]:=net[c,W+1,1];
        COLROUTER(c);
    until (L1≤c)and(f[t]=0 for all t (1≤t≤W));
    end;

```

COLROUTER(c)はコラムcの配線を行う。すなわち、 $\{ \langle c, t, p \rangle \mid 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$, $\{ \langle c, t, p \rangle, \langle c+1, t, p \rangle \mid 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$, $\{ \langle c, t, p \rangle, \langle c, t+1, p \rangle \mid 0 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$, $\{ \langle c, t, p \rangle, \langle c, t, p+1 \rangle \mid 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z-1 \}$ の各要素に対して、関数netの値を決定する。一般的に垂直型チャネル配線アルゴリズムはこの形をしており、COLROUTER(c)の実行の直前の時点における配線の状態は以下のようにになっている。

コラムc-1までの配線が完了している。さらに、コラムc-1からコラムcにどのように配線が渡されるか(すなわち、 $\{ \langle c, t, p \rangle, \langle c+1, t, p \rangle \mid 1 \leq t \leq W, 1 \leq p \leq Z \}$ の各要素に対する関数netの値)が、配列f[t], q[t] ($0 \leq t \leq W+1$)により次のように表わされている。

$1 \leq t \leq W$ なる各 t に対して、

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{トラック } t \text{ において、コラム } c-1 \text{ よりネット } e \text{ の配線が} \\ \text{層 } p \text{ を通り渡される場合} & \dots\dots\dots f[t]=e, q[t]=p \\ \text{トラック } t \text{ において、コラム } c-1 \text{ より渡される配線が} \\ \text{ない場合} & \dots\dots\dots f[t]=0, q[t]=0 \end{array} \right.$

$f[0]=\text{net}[c, 0, 1], q[0]=0$

$f[W+1]=\text{net}[c, W+1, 1], q[W+1]=0$

$1 \leq e \leq N$ なる各 e に対して、 $nt(e) = |\{t \mid 0 \leq t \leq W+1, f[t]=e\}|$ と定義する。

CHROUTERは、水平方向の配線はできるだけ層2に行い、垂直方向の配線は層1および層3に行く。CHROUTERによる各ネットの配線パターンは、 z 軸方向に透視した場合、図2に示す8個のいずれかである。(文献(7)のアルゴリズムの配線パターンはこれらに修正を加えたものも含む。)図3にCHROUTERによる配線の例を示す。各コラムの垂直セグメントのうちで、それから左隣のコラムにのみ配線が延びている(スルーホールを一個介してもよい)ものを「垂直セグメント、同様に、右隣のコラムにのみ配線が延びているものを「垂直セグメントと呼ぶ。「垂直セグメントのうちで、一方の端子が下側端

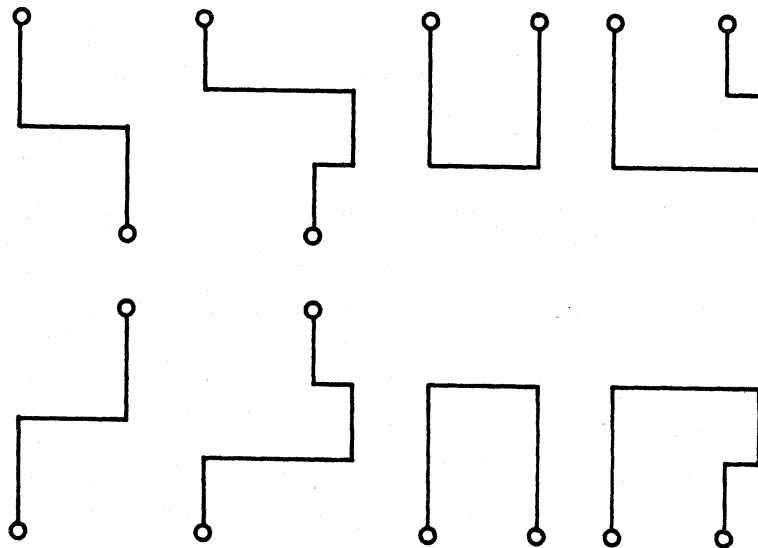


図2 CHROUTERの配線パターン

子であるものをrd垂直セグメント、上側端子であるものをru垂直セグメントと呼ぶ。

COLROUTER を記述する前に、次の性質1が成立することを述べておく。

〔性質1〕 COLROUTER(c)の実行の直前の時点において、以下が成立する。

- ① 各ネットe に対して $nt(e) \leq 2$ である。整数列 $0, 1, \dots, ds+1$ の連続した部分列 $h, h+1, \dots, i$ ($h < i$) において、 $f[h]=f[i] \neq 0$ である場合、この部分列は V区間であるといい、 $[h, i]$ と書く。 共通部分を持たない2個の V区間は互いに素であるという。
- ② 各ネットe に対して、 $nt(e)=1$ ならば $col l(e) \leq c < col r(e)$ であり、逆も成立する。また、 $nt(e)=2$ ならば $col r(e) \leq c$ である。
- ③ コラムc-1 の垂直セグメントは、l垂直セグメント、rd垂直セグメント、ru垂直セグメントのいずれかである。rd垂直セグメント、ru垂直セグメントの端子でない方の端点があるトラックを、それぞれ、rdトラック、ruトラックという。2個以上のl垂直セグメントが存在するならば、それらはすべて同一の層（層1 か層3）にある。同様に、2個のr垂直セグメントが存在するならば、それらは同一の層（l垂直セグメントと異なる層で、層1 か層3）にある。

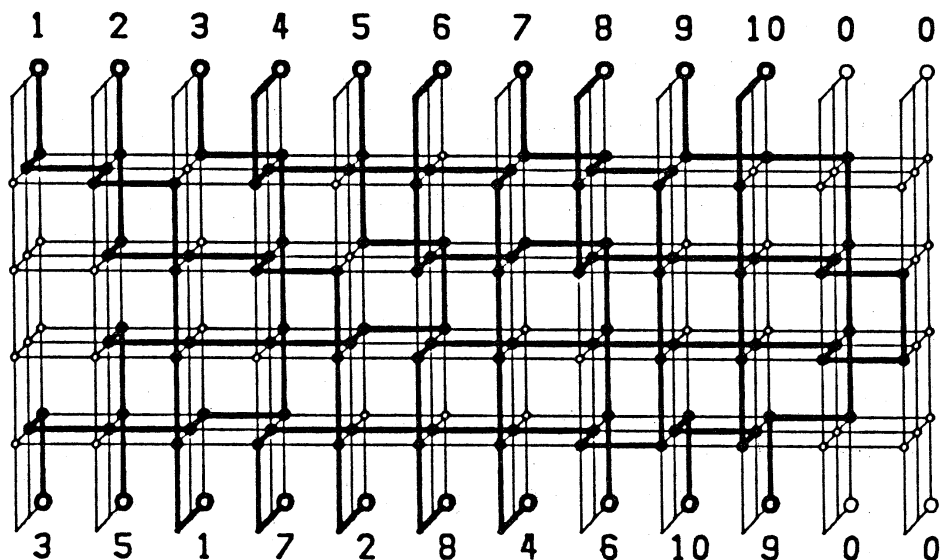


図3 CHROUTERの配線例

④ $|\{t|1 \leq t \leq ds, q[t]=1 \text{ か } 3\}| \leq 1$ である。 $q[t]=1$ か3 であるトラックを特異トラックという。 t が特異トラックである場合、頂点 $\langle c-1, t, q[t] \rangle$ はコラム $c-1$ の r 垂直セグメントの端点である。

⑤ $\langle c-1, r, p \rangle \sim \langle c-1, s, p \rangle (r < s)$ をコラム $c-1$ の任意の r 垂直セグメントとする。 $1 \leq e \leq N$ なる各 e に対して、 $|\{t|1 \leq t \leq ds, r \leq t \leq s, f[t]=e\}| \leq 1$ である。 ■

[手続き COLROUTER]

procedure COLROUTER($c:1..L$);

var V : set of V 区間; $r_1, s_1, r_2, s_2, \dots: 0..ds+1$;

pv: 1..3; ts: 0..ds; t: 0..ds+1;

procedure SINGULAR;

begin

if (特異トラックがある)

then ts:= 特異トラック else ts:=0;

end;

procedure VINTERVAL;

begin;

$V := \phi$;

while (V のいずれの要素とも互いに素である V 区間がある) do

$V := V \cup \{ \text{その } V \text{区間} \}$;

$\forall \phi$ のとき、 $V = \{[r_1, s_1], [r_2, s_2], \dots, [r_k, s_k]\}$ ($r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_k < s_k$) であるとする。;

end;

procedure LAYER;

var t: 1..ds;

begin

if ($V \neq \phi$) then

```

begin
  if (ts≠0) then
    begin
      if ( $r_i < ts < s_i$  となる  $i$  がある) then
        pv:=4-q[ts] ..... ①
      else pv:=q[ts]; ..... ②
    end
  else if ( $r_1=0$ ) then pv:=3 (* 1でもよい *)
  else if (net[c-1, $r_1$ ,1]=0かf[ $r_1$ ]) then pv:=1 ..... ③
  else pv:=3; ..... ④
  end
else if (ts≠0) then pv:=q[ts] ..... ⑤
else pv:=3;(* 1でもよい *)
end;

```

```

procedure CHANGE1(t:1..ds);

```

```

begin
  if (net[c-1,t,pv]=0 かf[t]) then
    begin
      if (net[c-1,t,pv]=0) then net[c-1,t,pv]:=f[t]
      else net[c-1,t,2]:=0;
      q[t]:=pv;
      net[c,t,2]:=0; net[c,t,pv]:=f[t];
    end
  end;

```

```

procedure LEFT;

```

```

var r,s:0..ds+1;

```

```

begin
  for each [r,s] in V do
    begin
      for t:=r to s do net[c,t,pv]:=f[r];
      f[r]:=0; q[r]:=0;
      f[s]:=0; q[s]:=0;
    end;
  end;

procedure RIGHT;
var t,t1:1..ds;
begin
  if (f[0]≠0) then
    begin
      t1:=min{t|(1≤t≤ds)and(f[t]=0)};
      for t:=1 to t1 do net[c,t,4-pv]:=f[0];
      f[t1]:=f[0]; q[t1]:=4-pv;
    end;
  if (f[ds+1]≠0) then
    begin
      t1:=max{t|(1≤t≤ds)and(f[t]=0)};
      for t:=t1 to ds do net[c,t,4-pv]:=f[ds+1];
      f[t1]:=f[ds+1]; q[t1]:=4-pv;
    end;
end;

```

```
procedure CHANGE2;
```

```
var t:1..ds;
```

```
begin
```

```
for t:=1 to ds do
```

```
  if (f[t]≠0)and(q[t]≠2)and(net[c,t,2]=0) then
```

```
    begin
```

```
      net[c,t,2]:=f[t];
```

```
      q[t]:=2;
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
begin (* COLROUTER *)
```

```
for t:=1 to ds do
```

```
  if (f[t]≠0) then net[c,t,q[t]]:=f[t]; ..... ①
```

```
SINGULAR;
```

```
VINTERVAL;
```

```
LAYER;
```

```
if ( $\forall \phi$ )and(q[r1]=2) then CHANGE1(r1);
```

```
if ( $\forall \phi$ )and(q[sk]=2) then CHANGE1(sk);
```

```
LEFT;
```

```
RIGHT;
```

```
CHANGE2;
```

```
end;
```

以下、性質1が成立した状態で COLROUTER(c) の実行が開始されたとし、実行される順に手続きを説明してゆく。

まず、①ではコラムc-1より渡された配線を、コラムcに受取る。次に、SINGULARにより、特異トラックがある場合、そのトラックの番号が変数tsに与えられる。次のINTERVALでは、互いに素であるV区間の集合で、極大である(その集合のすべての要素と互いに素であるV区間がない)ものを求め、それを $V = \{[r_1, s_1], [r_2, s_2], \dots, [r_k, s_k]\}$ ($r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_k < s_k$)とする。次に、LAYERにより、変数pvに値1か3が与えられる。後に、LEFTにより、コラムcのl垂直セグメント $\langle c, r_i, pv \rangle \sim \langle c, s_i, pv \rangle$ ($i=1, 2, \dots, k$)が配線され、RIGHTにより、コラムcのr垂直セグメントが層(4-pv)に配線される。LAYERの目的のひとつは、 $ts \neq 0$ である場合、これらの垂直セグメントが $\langle c, ts, q[ts] \rangle$ を通らないようにpvの値を決定することである。①, ②, ③は、この意味において、容易に理解することができる。④, ⑤は、後に述べる補題2が成立するようにするためのものである。

次に、 $V \neq \emptyset$ であり、かつ、トラック r_1 においてコラムc-1より渡された配線が層2を通っている場合、CHANGE1(r_1)により、可能ならば、これを層pvを通るように変更する。また、トラック s_k に対して、同様な操作をCHANGE1(s_k)により行う。この時点において、次の補題2が成立する。

〔補題2〕 $V \neq \emptyset$, $r_1 \neq 0$ かつ $s_k \neq ds+1$ であるならば、トラック r_1, s_k において、コラムc-1より渡される配線のうち少なくとも一方は、層pvを通る。

(証明) まず、 $ts=0$ である場合を考える。この場合、pvの値は④, ⑤において決められる。これは、トラック r_1 において渡された配線を、CHANGE1(r_1)により層pvに変更できるように、pvの値を決定することに他ならない。従って、補題は明らかである。

次に、 $ts \neq 0$ である場合を考える。トラックtsがrdトラックであるとする(ruトラックである場合も同様に証明できる)。このとき、性質1の⑤より、 $ts < s_1$ である。 $r_1 < ts < s_1$ である場合、性質1の④より $\langle c-1, r_1, q[ts] \rangle$ を垂直セグメントが通っているので、 $\langle c-1, r_1, pv (=4-q[ts]) \rangle$ を通る垂直セグメントはない。従って、 $net[c-1, r_1, pv] = 0$ か

$f[r_1]$ であり、 $\text{CHANGE1}(r_1)$ により、トラック r_1 により渡される配線は層 PV を通るように変更される。従って、補題が成立する。 $r_1 = ts$ である場合、明らかに補題は成立する。 $ts < r_1$ である場合、性質 1 の⑤より、 $\langle c-1, r_1, PV(=q[ts]) \rangle$ を通る ru 垂直セグメントはない。また、性質 1 の③より、これを通る l 垂直セグメントもない。従って、 $r_1 < ts < s_1$ の場合と同様に補題が成立する。 ■

図 4 に $\text{COLROUTER}(c)$ の配線の説明図を示す。(a) は、 $V \neq \phi$ 、 $ts=0$ である場合である。(b), (c), (d) は、 $V \neq \phi$ 、 $ts \neq 0$ 、かつ、トラック ts が rd トラックである場合であり、それぞれ、 $r_1 < ts < s_1$ 、 $r_1 = ts$ 、 $ts < r_1$ である場合である。

以下、LEFT, RIGHT, CHANGE2 の説明を行う。

LEFT は、 $V \neq \phi$ である場合、コラム c の l 垂直セグメント $\langle c, r_i, PV \rangle \sim \langle c, s_i, PV \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, k$) の配線を行う。各 i に対して、性質 1 の②より $\text{colr}(f[r_i]) \leq c$ であり、ネット $f[r_i]$ はコラム c で配線が終わる。 RIGHT は、LEFT 終了の時点において $f[0] \neq 0$ で

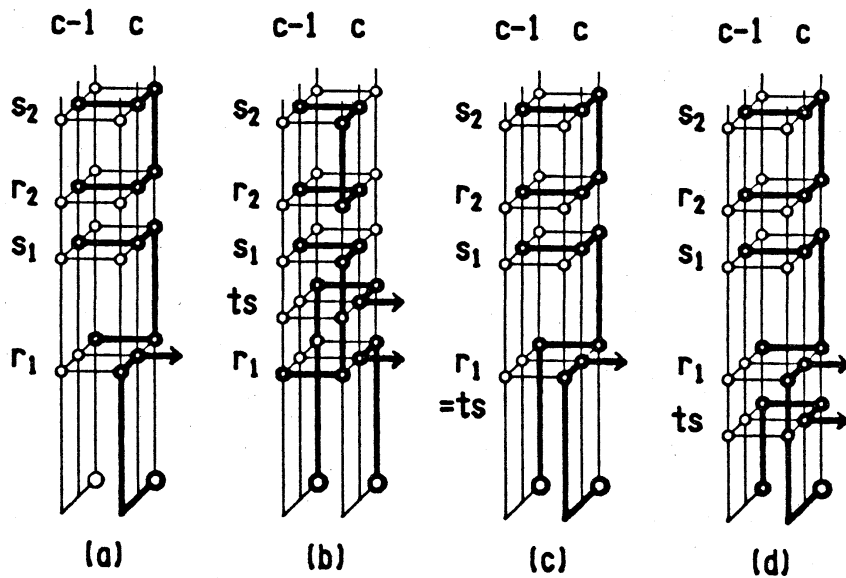


図 4 $\text{COLROUTER}(c)$ の説明図

ある場合、コラム c の rd 垂直セグメントを、また、 $f[ds+1] \neq 0$ である場合、コラム c の ru 垂直セグメントを、それぞれ、層 $(4-pv)$ に配線する。いま、 $f[0] \neq 0$ であるとする。 $V \neq \phi$ である場合、 $f[r_1] = 0$ であるので、 rd 垂直セグメントは必ず配線できる。また、 $V = \phi$ である場合、 $stac(c)$ は (r, r) か (r, n) であり、補題 1 より、 $d(c) \leq ds$ である。従って、性質 1 の ② より、 rd 垂直セグメントは必ず配線できる。同様に、 $f[ds+1] \neq 0$ であるならば、 ru 垂直セグメントが必ず配線できる。また、 V が極大であることより、これらの r 垂直セグメントに対して、再び、性質 1 の ⑤ が成立する。RIGHT 終了の時点において、 $q[t] = 1$ か 3 である（すなわち、コラム $c+1$ に層 1 か層 3 で渡されるようになっている）トラックは、RIGHT により配線された r 垂直セグメントの、端子でない方の端点があるトラックか、トラック ts のいずれかである。CHANGE2 により、可能であるならば、これらを層 2 で渡されるように変更する。変更できないトラックが残るのは、前述の r 垂直セグメントの端点があるトラックが r_1 か s_k である場合であり、補題 2 より、高々 1 個である。

以上の議論より、COLROUTER(c)の実行の直前の時点において性質 1 が成立していれば、COLROUTER(c)は必ず実行することができ、さらに、COLROUTER($c+1$)の実行の直前の時点において、再び、性質 1 が成立する。従って、次の定理が成立する。

〔定理 2〕 $W=ds$, $Z=3$ であり、すべてのネットが 2 端子ネットであるチャンネルはアルゴリズム CHROUTER で配線できる。 ■

以上、チャンネル配線は $V \cup E$ の各要素にネットの番号を割り付けることであるとしてきたが、実際には、各セグメントに対してその両端点の座標を決めてやればよい。このようにした場合の、本章で述べたアルゴリズムの時間的複雑さについて考える。

コラム 1 からコラム $L-1$ の間には 0 端子コラムはないと仮定する。（コラム 1 からコラム $L-1$ の間においては、0 端子コラムでないコラムに対してのみ COLROUTER を適用すると考えることと同じ。） すべてのネットは 2 端子ネットであるので、 $L-1 \leq 2 \times N$ である。従って COLROUTER が適用されるコラムの個数は高々 $2 \times N + N/2$ である。各コラムにおいて COLROUTER を適用するのに要する時間の内、 l 垂直セグメントと r 垂直セ

グメントの配線に関する時間は各 l 垂直セグメントと r 垂直セグメントに負わせ、その他の時間を各コラムに負わせることにする。各コラムに負わせられる時間は定数で押えられ、従って、コラムに負わせられる時間の総数は $O(N)$ である。V区間の管理および空きトラックの管理に平衡2-3 木を使用し、注意深くアルゴリズムを作ることにより、各 l 垂直セグメントと r 垂直セグメントに負わせられる時間は $O(\log_2 N)$ にすることができる。 l 垂直セグメントと r 垂直セグメントの総数は、図2より高々 $3 \times N$ であり、従って、 l 垂直セグメントと r 垂直セグメントに負わせられる時間の総数は $O(N \cdot \log_2 N)$ である。従って、配線に要する時間は $O(N \cdot \log_2 N)$ である。

5. 一般的なチャネルに対して

前章ではすべてのネットが2端子ネットであるチャネルに対してCHROUTERを適用したが、CHROUTERは本質的には3個以上の端子からなるネットが存在するチャネルに対しても適用できる。そのためには、CHROUTERの記述の若干の変更を要する。3個以上の端子から成るネットが存在する場合、2端子ネットしか存在しない場合と比較して大きく異なるのは次の点である。

① 性質1の①において、 $nt(e) \geq 3$ であるネット e が存在する可能性がある。

② 性質1の②において、 $nt(e) \geq 2$ であっても $c < colr(e)$ である可能性がある。

ネット e に対して $f[i_1] = f[i_2] = \dots = f[i_{nt(e)}] = e$, $i_1 < i_2 < \dots < i_{nt(e)}$ である場合、部分列 $i_1, i_2, \dots, i_{nt(e)}$ のみを V区間 (これをネット e の作る V区間と呼ぶ) と呼ぶことにする。ネット e の作る V区間 v に対して、

$$pr(v) = \begin{cases} nt(e) & \dots \dots \dots c \leq colr(e) \text{ である場合} \\ nt(e)-1 & \dots \dots \dots c < colr(e) \text{ である場合} \end{cases}$$

と定義する。また、V区間の集合 V に対して、

$$pr(V) = \sum_{v \in V} pr(v) \text{ と定義する。}$$

$pr(v) \geq 2$ である V区間 v を強 V区間、 $pr(v) = 1$ である V区間 v を弱 V区間とそれぞれ呼

ぶ。強 V 区間が存在する場合、手続き $VINTERVAL$ によって作られる V 区間の集合 V の要素が 1 個ならばそれは強 V 区間であるように V を作るようにする。

手続き $VINTERVAL$ で選ばれた V 区間の集合 V の中に、 $c < \text{colr}(e)$ であるネット e の作る V 区間が含まれている場合、次に示すように手続き $LEFT$ において、ネット e の配線をコラム $c+1$ に渡さなければならない。 $f[i_1]=f[i_2]=\dots=f[i_{nt(e)}]=e, i_1 < i_2 < \dots < i_{nt(e)}$ であると仮定する。

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{nt}(e) \geq 3 \text{ の場合} \dots \text{トラック } i_2, i_3, \dots, i_{nt(e)-1} \text{ のいずれかにおいて層2 を通} \\ \text{りコラム } c+1 \text{ に渡す。} \\ \text{nt}(e)=2 \text{ かつ } f[j]=0 \text{ である } j(i_1 < j < i_{nt(e)}) \text{ が存在する場合} \dots \text{トラック } j \text{ にお} \\ \text{いて層2 を通りコラム } c+1 \text{ に渡す。} \\ \text{その他の場合} \dots \text{トラック } i_1, i_2 \text{ のいずれかにおいて層2 を通りコラム } c+1 \text{ に渡} \\ \text{す。} \end{array} \right.$

このように変更された $CHROUTER$ を使用することにより、次の定理を示すことができる。

[定理 2] $W=2ds-1, Z=3$ である任意のチャネルは配線可能である。

(証明) 問題となるのは、 $COLROUTER(c)$ の手続き $RIGHT$ において t_1 の存在が保証されるかということである。次の①、②、③、④の場合には必ず存在する。

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{① } COLROUTER(c) \text{ の実行の直前の時点において } f[i]=0 \text{ であるトラック } i(1 \leq i \leq W) \\ \text{が存在する場合 (図 5 (a))} \\ \text{② 手続き } VINTERVAL \text{ によって選ばれた } V \text{ 区間の集合 } V \text{ が、 } pr(V) \geq 2 \text{ である} \\ \text{場合 (図 5 (b))} \\ \text{③ } stac(c)=(r, l) \text{ か } (l, r) \text{ である場合 (図 5 (c))} \\ \text{④ } stac(c)=(n, b), (n, l), (b, n) \text{ か } (l, n) \text{ である場合 (図 5 (d))} \end{array} \right.$

次に①、②、③、④のいずれでもない場合を考える。③でないことと補題 1 より、 $d(c) \leq ds$ である。②でないことと pr の定義より、各ネット e に対して $nt(e) \leq 2$ であり、さらに $\text{colr}(e) < c$ ならば $nt(e)=0$ である。故に、 $ntsum = \sum_e nt(e)$ とすると、 $ntsum \leq 2d(c)$

である。 c が 2 端子コラムであるとする、①でないことより $2ds-1+2=ntsum$ であり、 $2ds+1=ntsum \leq 2d(c) \leq 2ds$ となり矛盾が生じる。また、 c が 1 端子コラムであるとする、④でないことより、 $ntsum \leq 2(d(c)-1)+1$ であり、 $2ds-1+1=ntsum \leq 2d(c)-1 \leq 2ds-1$ となり矛盾が生じる。従って c は 0 端子コラムであり手続き RIGHT は明らかに実行できる。■

[系 1] $W=2(2ds-1)-1$, $Z=2$ である任意のチャネルは配線可能である。

証明略 ■

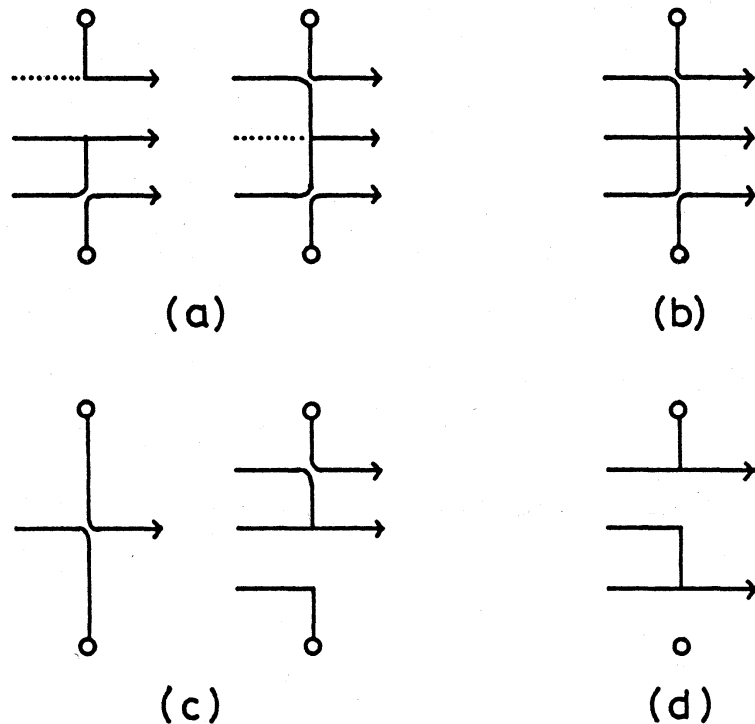


図5 3端子以上のネットが存在する場合の配線

6. むすび

3層チャンネル配線問題に対して、すべてのネットが2端子ネットである任意のチャンネルを、チャンネル密度に等しい本数のトラックで配線する垂直型3層チャンネル配線アルゴリズムを示した。このアルゴリズムは $O(N \cdot \log_2 N)$ の時間で配線を行う。これは従来知られているもの⁽⁷⁾と比較して速く、また考え方も単純であり、さらに、3端子以上のネットがあるようなチャンネルに対しても適用することができるという長所を持つ。このアルゴリズムを使用することにより、3層チャンネル配線問題においては、任意のチャンネルが $2 \times (\text{チャンネル密度}) - 1$ 本のトラックで配線可能であることを示すことができた。またこのことより、2層チャンネル配線問題においては、任意のチャンネルが $4 \times (\text{チャンネル密度}) - 3$ 本のトラックで配線可能であることを示すことができた。

文献

- (1) Hashimoto, A. and Stevens, J. : "Wire routing by optimizing channel assignment within large apertures", Proc. 8th Design Automation Workshop, pp. 155-169 (1971)
- (2) Johnson, D.S. : "The NP-completeness column : An ongoing guide", J. Algorithms, Vol. 3, No. 4, pp. 381-395 (1982)
- (3) Deutch, D.N. : "A 'dogleg' channel router", Proc. 13th Design Automation Conference, pp. 425-433 (1976)
- (4) Yoshimura, T. and Kuh, E. : "Efficient algorithms for channel routing", IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. CAD-1, No. 1, pp. 25-35 (1982)
- (5) 梶谷、石井、下山、金田 : "2セル列2層最小間隔配線アルゴリズム", 信学技法 CAS 79-142 (1980)

- (6) Rivest, R. L. and Fiduccia, C. M. : "A 'greedy' channel router",
Proc. 19th Design Automation Conference, pp. 418-424 (1982)
- (7) Preparata, F. P. and Lipski, W., Jr. : "Optimal three layer channel routing",
IEEE Trans. Computer, Vol. C-33, No. 5, pp. 427-423 (1984)
- (8) Rivest, R. L., Baratz, A. and Miller, G. : "Provably good channel routing
algorithms", in Proc. 1981 Carnegie-Mellon Conf. on VLSI (1981)