

## マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル (2)

北 村 良 介

### APPLICATION OF A MARKOV PROCESS TO A MECHANICAL MODEL OF GRANULAR MATERIALS (2)

By Ryosuke KITAMURA

#### Synopsis

In the previous paper the author proposed a mechanical model of particulate materials as a Markov process and explained the concepts of the potential barrier and the potential slip plane which are introduced in the proposed model. Furthermore, the strain of particulate materials was defined by using the change of contact angles at the contact points of particles and the discontinuous motion of particles.

In this paper the results of shearing tests obtained by the modified triaxial apparatus which is designed and constructed, and can generate three different principal stresses are presented. The results of numerical experiments which are carried out by using the proposed model are also presented. From both results it is shown that the proposed model can versatily follow the mechanical behaviours of particulate materials such as sands with complicated stress paths including the stress reverse and repeated loading.

#### 1. 序

筆者は砂質土のような形状、大きさが不規則である粒子が複雑な粒子構造を呈している粒状体の構成関係、特に応力～ひずみ関係を微視的な立場から誘導していく試みを行ってきた。前報<sup>1)</sup>では粒状体を構成している個々の粒子の運動が確率過程の1つであるマルコフ過程に従うものとした粒状体の力学モデルを提案し、その理論的背景となっているマルコフ過程、ポテンシャル障壁の概念、潜在すべり面の概念、粒状体のひずみの定義などについて詳述し、豊浦砂を用いた側圧一定、排水三軸圧縮試験を行うことによってモデルの妥当性を示してきた。

本報では、前報発表以後に試作修正三軸装置を用いて種々の応力経路をもつせん断試験を行った結果と、提案している力学モデルを用いた数値実験結果を示す。そして、これらの結果を比較、検討することによりモデルの妥当性、および、粒状体の変形機構を微視的な立場から統一的に解明していく場合に、提案している力学モデルが非常に有効なモデルであることを明らかにする。

#### 2. マルコフ過程

前報では粒状体の変形過程にマルコフ過程を適用する必然性についての説明が不足していたので、この章では前報の補足的な説明を行いたい。

マルコフ過程を数式化すると次式ようになる。

$$P(x, y; t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z; t, u) P(z, y; u, s) dz \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $t < u < s$ ,

$P(x, y; t, s)$  : 時刻  $t$  で  $x$  という状態のものが、時刻  $s$  で  $y$  という状態になる遷移確率。

**Fig. 1** は粒状体内に存在する無数の粒子の任意の隣接する2粒子をとり出したものである。粒状体の変形はこれらの2粒子の相対的な運動を粒状体全体で平均化したものと考えられる。今, **Fig. 1** に示すように, 上の粒子が下の粒子に対して右, あるいは左へ運動する確率を  $a_{ji}$  とする。ここに,  $a_{ji}$  は外作用のある1つの変化により  $i$  という状態から  $j$  という状態へ変化する遷移確率である。提案している力学モデルでは状態変数(確率変数)として粒子接点角を採用しているので,  $a_{ji}$  はある接点において接点角が  $i$  から  $j$  へ変化する確率をあらわしている。粒状体内の各接点での接点角を離散的な  $n$  個の状態に分割すれば, 外作用の変化による接点角の変化は次に示す遷移確率行列  $[\alpha]$  によってあらわされる。

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに,  $\sum_{j=1}^n a_{ji} = 1$

外作用の変化も離散的な段階に分割できるものとすれば(わかりやすい例として応力制御型の三軸試験がこれに相当する), 外作用が第1段階から第  $m$  段階 ( $m \geq 2$ ) に変化した時の粒状体全体での接点角の変化をあらわす遷移確率行列  $[\alpha]_{1 \rightarrow m}$  は次式であらわされる。

$$[\alpha]_{1 \rightarrow m} = \prod_{k=1}^{m-1} [\alpha]_{m-k} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ここに,  $[\alpha]_k$ : 外作用が第  $k$  段階から第  $(k+1)$  段階へ変化した時の粒状体全体での接点角の変化をあらわす遷移確率行列。

一方, マルコフ過程を数式化した(1)式において,  $dt = (s-t)/m$  とすれば次式が導かれる。

$$P(x, y; t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z_1; t, t+dt) \cdot P(z_1, z_2; t+dt, t+2 \cdot dt) \cdots \\ \cdots P(z_{m-1}, y; s-dt, s) dz_1 dz_2 \cdots dz_{m-1} \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

(3)式と(4)式は離散的と連続的のちがいはあるが, 両式は本質的には等価な式であり, **Fig. 1** で示されるような粒子の運動はマルコフ過程に従うことがわかる。

### 3. 試作修正三軸装置を用いたせん断試験

#### 3. 1 従来の3主応力が異なる三軸装置<sup>2)</sup>

土の変形, 強度特性を室内実験によって解明していく際に, また, 設計, 施工に用いる土の諸常数を求めるため, 土の要素試験として通常の三軸試験装置 (conventional triaxial apparatus) が従来からよく用いられてきている。この装置は操作が比較的簡単であり, しかもかなりの精度のデータが得られるが, 供試体内に発生する応力状態が軸対称であり, 常に2つの主応力が等しい状態に限られている。一方, 実際の地盤(例えば, 基礎構造物周辺の地盤など)は一般に3主応力の大きさ, 方向が任意な応力状態にあるものと考えられる。したがって, このような応力状態での土の力学特性を解明していくための室内実験装置として異なる3主応力を発生させることのできる三軸装置(以下, 多軸試験装置 (triaxial apparatus) と称するこ

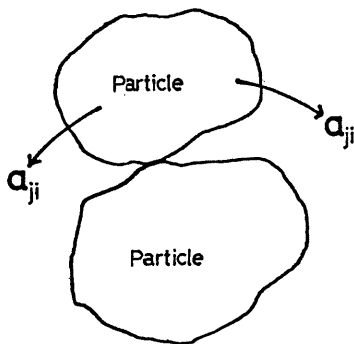


Fig. 1. Relative motion of two particles.

とにする）の開発が必要であり、このような認識のもとに世界各国で種々の多軸試験装置が考案されてきている。今節ではこれらの試験装置について概観することにする。

多軸試験装置は相異なる 3 主応力を発生させる方法によって大きく 3 つに分けることができる。まず、第

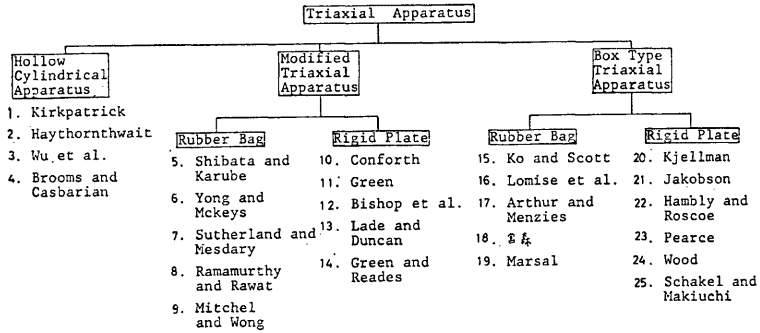


Fig. 2. Triaxial apparatus.

Table 1.

| Author             | Reference                                              |
|--------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. Kirkpatrick     | Proc. 4th ICSMFE, Vol. 1, 1957, pp. 172-178            |
| 2. Haythornthwaite | Proc. ASCE, Vol. 86, No. SM5, 1960, pp.35-62           |
| 3. Wu              | Proc. ASCE, Vol. 89, No. SM1, 1963, pp. 145-181        |
| 4. Brooms          | Proc. 6th ICSMFE, Vol. 1, 1965, pp. 179-188            |
| 5. Shibata         | Proc. 6th ICSMFE, Vol. 1, 1965, pp. 359-363            |
| 6. Yong            | Proc. 3rd Panam. Conf. SMFE, Vol. 1, 1967, pp. 131-143 |
| 7. Sutherland      | Proc. 7th ICSMFE, Vol. 1, 1969, pp. 391-399            |
| 8. Ramamurthy      | Proc. 8th ICSMFE, Vol. 1, 1973, pp. 339-342            |
| 9. Mitchell        | Can. Geotech., Vol. 10, 1973, pp. 520-527              |
| 10. Conforth       | Geotech. Vol. 14, No.2, 1964, pp. 143-167              |
| 11. Green          | Proc. Roscoe Memorial Symp., 1971, pp. 285-323.        |
| 12. Bishop         | Proc. 8th ICSMFE, Vol. 1, 1973, pp. 57-64              |
| 13. Lade           | Proc. ASCE, Vol. 99, No. SM10, 1973, pp. 793-812       |
| 14. Green          | Geotech., Vol. 25, No. 2, 1975, pp. 333-356            |
| 15. Ko             | Geotech., Vol. 17, No. 1, 1967, pp. 40-57              |
| 16. Lomise         | Proc. 7th ICSMFE, Vol. 1, 1969, pp. 257-265            |
| 17. Arthur         | Geotech., Vol. 22, No. 1, 1972, pp. 115-128            |
| 18. 宮森             | 土木学会論文報告集, No. 255, 1976, pp. 81-91                    |
| 19. Marsal         | Proc. 8th ICSMFE, Vol. 1, 1973, pp. 259-264            |
| 20. Kjellman       | Proce. 1st ICSMFE, Vol. 2, 1936, pp. 16-20             |
| 21. Jakobson       | Proc. 4th ICSMFE, Vol. 1, 1957, pp. 167-171            |
| 22. Hambly         | Proc. 7th ICSMFE, Vol. 2, 1969, pp. 173-181            |
| 23. Pearce         | Proc. Rescol Memoiral Symp., 1971, pp. 330-339         |
| 24. Wood           | Geotech., Vol. 25, No. 4, 1975, pp. 783-797            |
| 25. Schakel        | Proc. 9th ICSMFE, Vol. 1, 1977, pp. 295-300            |

1は中空円筒装置 (hollow cylindrical apparatus) と呼ばれるものである。この装置は中空円筒供試体の側方に異なった内圧、外圧を作用させ、さらに供試体上下端面に軸方向力とネジリ力を与えることにより相異なる3主応力を発生させる装置である。第2の装置は通常の三軸装置のセル内に新たな第3の载荷装置を挿入することにより立方体、あるいは直方体供試体に相異なる3主応力を発生させようとするものである。この装置を修正三軸装置 (modified triaxial apparatus) と称することにする。修正三軸装置はさらに新たな载荷装置としてゴム袋 (flexible rubber bag) を用いたものと剛板 (rigid plate) を用いたものに分けられる。第3の装置は箱型 (box type) と呼ばれるものである。この装置は立方体、あるいは立方体の箱の中にある供試体の各面に力を作用させることにより相異なる3主応力を発生させるものである。この装置も载荷方法とゴム袋を介するものと、剛板を介するものとに分けられる。以上のことをまとめたものが Fig. 2 に示されている。Fig. 2 にはこれらの装置を用いた研究者名が併記されており、文献名が Table 1 にまとめられている。

次にこれらの装置の長所、欠点について簡単に述べることにする。

中空円筒装置は通常の三軸装置では得られない大きなひずみの段階まで実験が可能であり、また交番するネジリ力を比較的簡単に与えることができるため動的な試験によく用いられている。しかし、供試体内に発生する応力、ひずみが通常の三軸装置に比べると非一様になりやすい欠点を有している。

ゴム袋を用いた装置においては修正三軸、箱型いずれの場合にも圧力が一様に伝わるという長所をもっているが、ゴム袋が flexible であるために変形が非一様になりやすく、またゴム袋が膨張して供試体の隣りの面に影響を与えるという欠点を有している。ゴム袋を用いた箱型装置においては変形がゴム袋への液体の出入によって測定されており、砂質土のような粒径の比較的大きな試料ではゴム袋の供試体への貫入量の変化による誤差が生じるものと考えられる。

一方、剛板を用いた装置ではゴム袋の場合と逆に、変形は一様であるが、剛板と供試体面との接触が一様ではないため、加えられた力が等分布に伝わらない欠点を有している。

修正三軸装置では第3の载荷装置による供試体の変形をダイヤルゲージ、ストレインゲージ、読取顕微鏡などによって測定しているものが多いが、軸方向変位、体積変化の精度に比べると劣っているようである。

ところで、箱型装置以外は供試体が剛板とゴム袋の組み合わせによって载荷されている。土の要素試験装置と考えられるこれらの装置において、このような境界面の差が供試体の力学的挙動に何らかの影響を与えているものと考えられるが、このことに関する定量的な考察は今後の研究課題である。

以上、今節ではこれまでに考案されてきた多軸試験装置について概観してきたわけであるが、多軸試験装置においては通常の三軸装置より測定すべき力、変位がそれぞれ1つ多いわけであり、Fig. 2 に示した装置では通常の三軸装置の精度を越えるものを開発することはなかなか困難である。

### 3. 2 試作修正三軸装置

筆者は剛な板を有する修正三軸装置を試作した。圧力システムを含めた装置の概略が Fig. 3 に示されている。圧力システムは赤井<sup>3)</sup>が開発した空気圧制御方式による三軸試験装置と同様のものである。Fig. 3 をみればわかるように、軸方向力はペローフラムシリンダーを通して加えられ、ブルーピングリングによって測定している。側方の2方向力は高精度空気圧制御弁 (air pressure regulator) を用い、最小目盛0.05 kg/cm<sup>2</sup> のブルドンゲージによって制御されている。三軸セルの概略が Fig. 4 に示されている。このセルは原理的には Lade and Duncan<sup>4)</sup> が制作した修正三軸装置と同じものである。Fig. 4 をみればわかるように、この装置は通常の三軸セル内にペローフラムシリンダーを用いた第3の载荷装置が挿入されており、剛な板を介して第3の主応力を発生させるようになっている。第3の载荷装置には上下に車輪がついており、供試体に変形しても常にペダスタル中央に供試体が位置するように第3の载荷装置はレールの上を動くことができる。また、剛な载荷板は Fig. 4 に示すように2つの部分に分かれ、鉛直方向に供試体が伸縮した場合に剛板も上端キャップの動きに合わせてバネによって伸縮するようになっている。

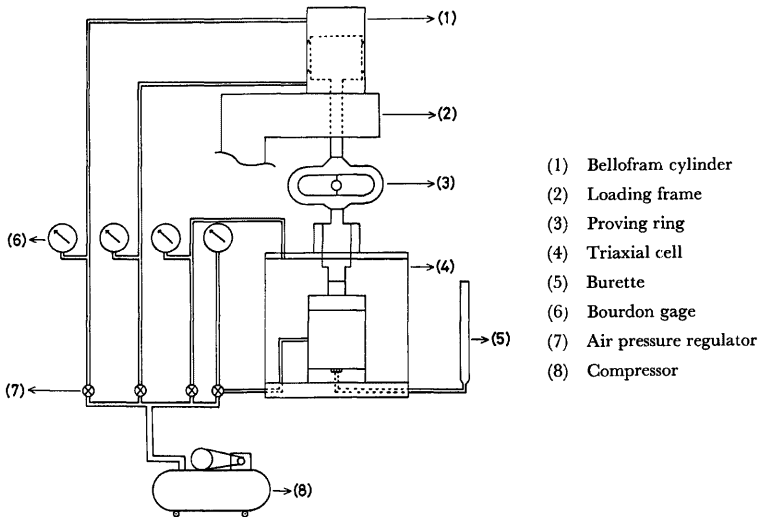


Fig. 3. Schematic diagram of the modified triaxial apparatus and the pressure system.

変位については、軸方向は最小目盛  $1/100$  mm のダイヤルゲージにより、また剛板の変位は最小目盛  $2/100$  mm のノギスを用い、体積変化は最小目盛  $1/20$  cc のものを用いて測定を行っている。供試体の大きさは一辺  $10$  cm の立方体であり、ペダスタル中央部の直径  $1$  cm のポーラスストーンを通して排水が行われるようになっている。端面マサツを除去するために供試体上下端面および側方の剛板と供試体の間にはそれぞれシリコングリースを貼付した2枚の薄いゴム膜を挿入している。

### 3. 3 試料および実験手順

試料は豊油標準砂であり、平均粒径  $0.2$  mm、比重  $2.65$ 、均等係数  $1.6$  である。その粒度分布が Fig. 5 に示されている。試料は完全に飽和させるために  $100^\circ\text{C}$  で  $1$  時間以上煮沸されている。ゴムスリーブ（厚さ  $0.2$  mm）を密着させたモールドの中へこの試料を、密な供試体（間げき比  $e=0.65\sim 0.71$ ）の場合には3層に分けて投入し、各層  $10\sim 15$  回突き棒で突き固めて作成している。また、ゆるい供試体（ $e=0.80\sim 0.81$ ）の場合には、予めモールドの中へ水を入れ、次に試料を2層に分けてゆっくりと堆積させ、各層で立方体の4隅を軽く数回突き固めることによって作成している。そして、モールド解体後に供試体が自立するように  $0.005$  kg/cm<sup>2</sup> 程度の負圧を供試体に作用させている。

実験は、 $2$  kg/cm<sup>2</sup> で等方圧密した後、平均有効主応力  $\sigma_m$  を一定にした応力制御型排水せん断試験である。実験を行った応力経路は Fig. 6 に示すように、主応力空間において、静水圧軸に垂直な、いわゆる正八面体応力面上を  $\theta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ$  となるように放射状に応力状態を変化させるものと、 $\theta=0^\circ$  と  $180^\circ$  の線上を往復させる両振り試験である。ここに、 $\theta=0^\circ, 180^\circ$  はそれぞれ通常の三軸圧縮試験、三軸伸張試験に相当する。また、载荷は最大主応力と最小主応力の差が  $0.1$  kg/cm<sup>2</sup> ずつ増減するように行っている。

ところで、以下の記述においては鉛直方向の主応力を  $\sigma_1$ 、主ひずみを  $\epsilon_1$ 、セル内の載荷装置によって生ずる主応力を  $\sigma_2$ 、主ひずみを  $\epsilon_2$ 、セル内の水圧によって生ずる主応力を  $\sigma_3$ 、主ひずみを  $\epsilon_3$  とする。した

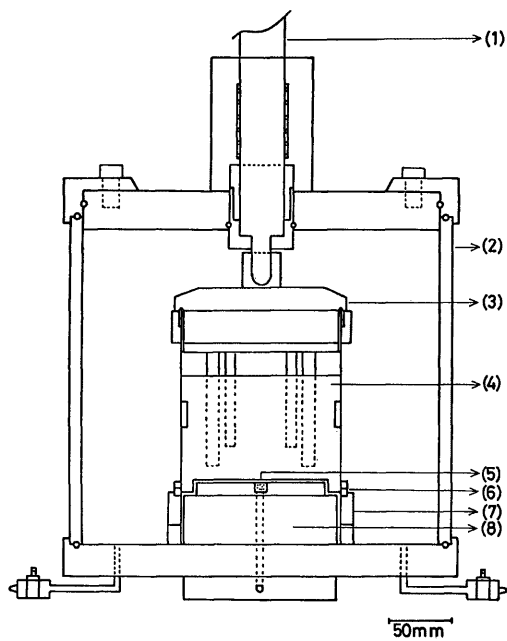
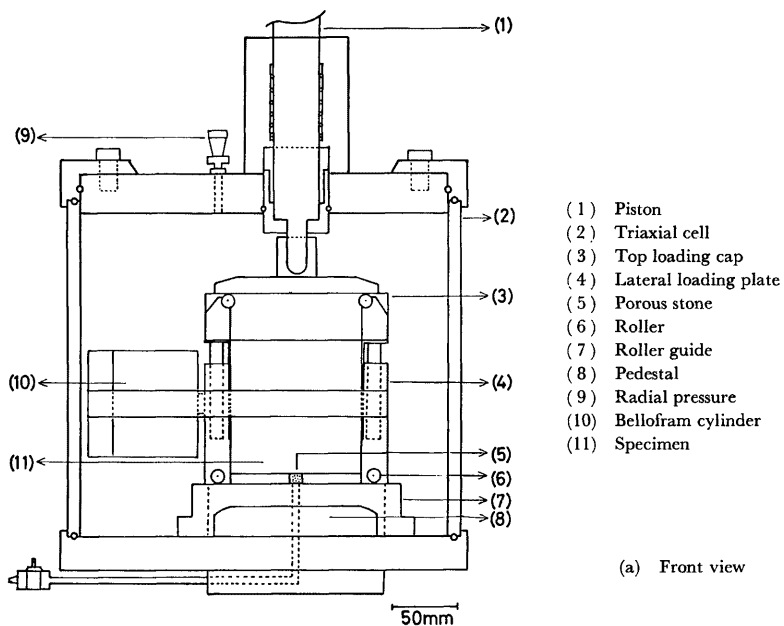


Fig. 4. Schematic diagrams of the modified triaxial chamber.

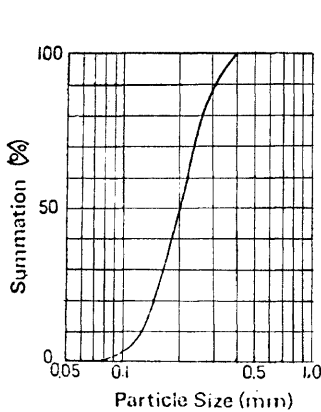


Fig. 5. Grain size distribution of Toyoura Sand.

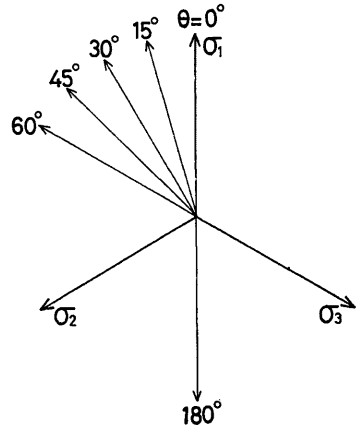


Fig. 6. Stress paths used in the experiments.

がって、三軸伸張試験においては  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  が最大主応力,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  が最大主ひずみになる。

### 3. 4 試作修正三軸装置の測定誤差の補正

通常の三軸装置に発生する測定誤差として次のようなものが考えられる。

①供試体上下端面のキャップおよびベDESTALによる拘束のために供試体内に生ずる応力, ひずみの非一様性, ②ピストンと軸受部の摩擦によって生ずる軸方向力の誤差, ③粒径の大きい砂供試体の場合の側圧の変化によるゴムスリーブの貫入量の変化 (membrane misfit), ④ゴムスリーブによる側方変位の拘束などがあり, 修正三軸装置の場合には上述の誤差の他に第3の載荷装置によって生ずる誤差がつけ加わる。今節ではこれらの誤差の補正に関する従来の研究について概観することにする。

まず①については, Rowe and Barden<sup>5)</sup>が供試体の上下端面にシリコングリースを貼付した薄いゴム膜を挿入した直径と高さの比が1:1の供試体とゴム膜を用いない直径と高さの比が1:2のものでせん断試験を行い, 供試体の変形形状, すべり面の発生の様式などからゴム膜を用いた場合の方がより一様な変形が得られることを示しており, Barden and McDermott<sup>6)</sup>はこの研究を拡張した実験的研究を行っている。Bishop and Green<sup>7)</sup>は砂供試体の直径と高さの比が1:2, 1:1, 2:1の供試体の各々に端面摩擦除去用のゴム膜を用いた場合と用いない場合について強度特性および破壊時のダイラテンシー特性に関する実験を行い, 供試体の直径と高さの比が1:2, 1:1の場合には各々シリコングリースを貼付した2枚のゴム膜を上下端面に挿入すれば端面拘束の影響は無視できると結論づけている。また, 最近では Lee<sup>8), 9)</sup>が従来からの研究を概観し, 地震時の問題に関連して砂の非排水状態での三軸試験における端面拘束の影響について言及している。筆者の試作修正三軸装置においても上下端面に2枚の薄いゴム膜を貼付しており, 前述の研究結果や破壊後のすべり面が多数観察されることから端面摩擦は無視できるものと考えている。また, 実験に際し, 供試体に変形するにつれて, 断面補正を行なわなければならない。本実験では供試体は常に直方体の形状を保ちながら変形しているものとして, 断面補正を行っている。

②については赤井<sup>3)</sup>のようにピストンと軸受部の間に油を循環させる強制注油方式や N. G. I. 型三軸セルのようにプッシュを回転させピストンと軸受部の間の油の粘性を動的なものにかえることにより摩擦力を低減させる工夫がなされている。筆者が試作した修正三軸装置は Fig. 4 をみればわかるようにピストンはOリングでシールされているが, ピストンとOリングの間にシリコングリースを貼付することによりピスト

ンと軸受部の間の摩擦を軽減している。

③のゴムスリーブの供試体への貫入量の変化によって生ずる体積変化の誤差に関する研究は諸戸<sup>10)</sup>, Raju and Sadasivan<sup>11)</sup>, Kickbusch and Schuppener<sup>12)</sup>, Lade and Hernandez<sup>13)</sup> などによってなされており, 土質試験法<sup>14)</sup> にも標準化されたものが掲載されている。Kickbusch らの実験結果を筆者の実験条件にあてはめると, Penetration によって破壊時で体積ひずみに0.03%程度の誤差を生じている。一方, Lade らの実験によれば, 平均粒径が0.2 mm 以下の砂では membrane misfit の補正の必要はないとしている。本実験では土質試験法に述べられている方法 (rod の径を変化させ, 外挿する方法) に従い, Fig. 7 に示されるような側圧と貫入量の関係を求め, 補正を行っている。この関係を用いると, 破壊時での体積ヒズミは0.3 %程度の誤差を生じている。

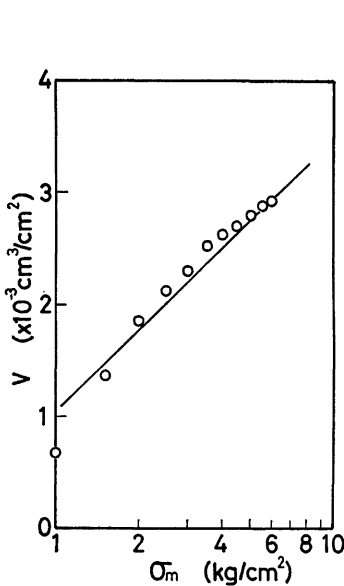


Fig. 7. Membrane penetration versus chamber pressure.

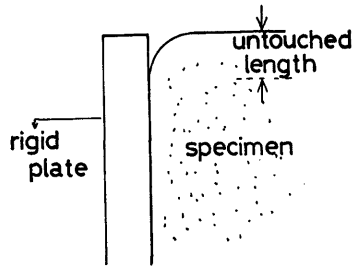


Fig. 8. Error at the corners of specimen.

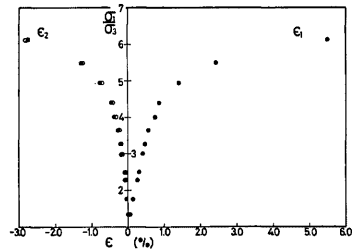


Fig. 9. Stress-strain relations obtained by experiment and calculation.

④については Henkel and Gilbert<sup>15)</sup>, Chandler<sup>16)</sup>, LaRohelle<sup>17)</sup>, 最近では Pachakis<sup>18)</sup>, 堀<sup>19)</sup> が考察を行っている。本実験では鉛直方向ひずみ  $\epsilon_1$  が最大5%程度であり, ゴムスリーブの厚さも0.2 mm と比較的薄いものを用いており, ゴムスリーブの張力による補正は行っていない。

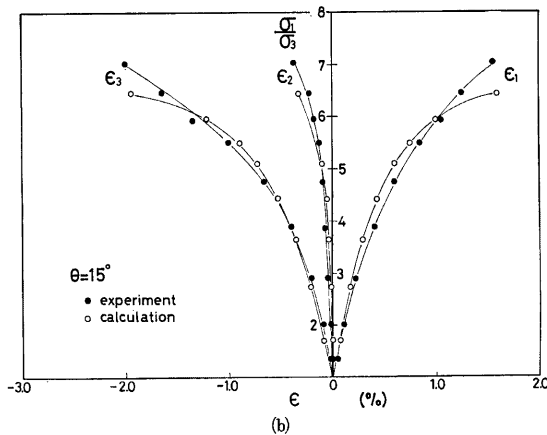
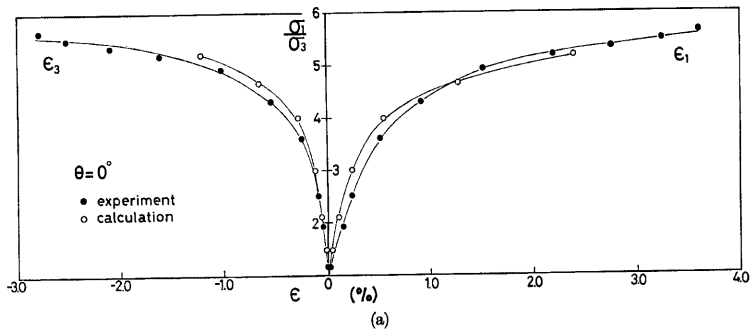
今節でこれまでに述べてきた通常の三軸装置に生ずる誤差のほかに, 筆者が試作した修正三軸装置の場合にはセル内に入った第3の载荷装置によって生ずる誤差がつけ加えられる。

ペローフラムシリンダーを用いた第3の载荷装置はあらかじめ検定を行い, ペローフラムシリンダーに加える圧力と供試体へ作用する力の関係が求められている。しかし, Fig. 8 に示すように第3の载荷装置にとり付けられた剛板と供試体との接触がコーナー部分でどうしても不完全になり, 供試体が実際に剛板と接触している実質部分を求めることは非常に難しい。本実験では, Fig. 8 に示すようにコーナーで接触していな

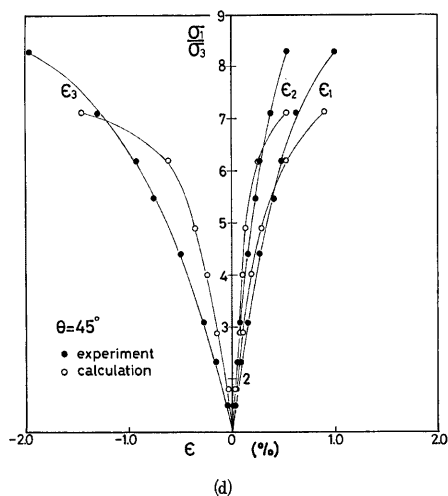
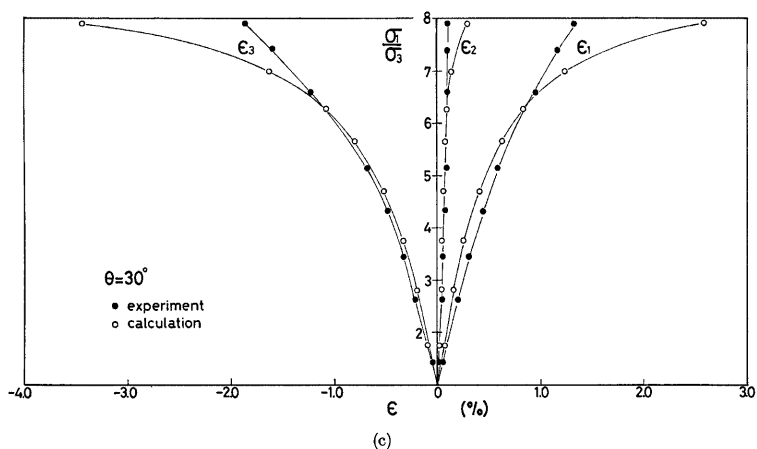
い部分を供試体下端で測定して横方向の応力  $\sigma_2$  の計算に際して補正を行っている。また、軸方向力については、剛板の間のパネや供試体側面のゴムスリーブと剛板との間の摩擦力によって生ずる誤差の補正を行っている。このような補正の妥当性を検討するために行った実験結果が Fig. 9 に示されている。Fig. 9 は平均有効主応力  $\sigma_m = 2 \text{ kg/cm}^2$  で  $\theta = 0^\circ$  (圧縮) の応力経路をもつせん断試験結果であり、第3の载荷装置がセル内に挿入されている。図中の●印は第3の载荷装置によって測定された  $\sigma_2$  方向のひずみ  $\epsilon_2$  であり、○印は体積ひずみ  $\epsilon_v$  と鉛直方向ひずみ  $\epsilon_1$  を用いて計算した  $\epsilon_2$  である。図をみればわかるように、前述の補正法は妥当なものと考えられる。第3の载荷装置をとり付けた  $\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の実験はこの補正法を用いて行っている。

### 3. 5 実験結果

密な供試体を用いた  $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$  の6種の実験より得られた応力～ひずみ関係が Fig. 10 に示されている。ゆるい供試体を用いた  $\theta = 0^\circ$  (圧縮),  $180^\circ$  (伸張) の実験より得られた応力～ひずみ関係が Fig. 11 に、また圧縮と伸張を交番させる、いわゆる面振り試験によって得られた応力～ひずみ関係が Fig. 12 に示されている。ここに、Fig. 10～12 において実験によって得られた実測値は●印によって示されている。実験結果の徹底的な考察は次章で述べる数値実験結果についての考察と平行して行うことにする。本節では破壊時に生ずるすべり面および破壊規準について若干の考察を加える。



粒状体の三軸せん断試験を行うと、一般に供試体は破壊し、すべり面が発生する。本実験においては供試体の形状が1辺10 cmの立方体であること、また  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  以外は第3の载荷装置が挿入されていることなどにより、実験中に明確なすべり面を観察することができず、三軸セルを解体し、ゴムスリプから供試体を取り出した時点でようやくすべり面を観察できた。したがって、すべり面の角度に関しては、その精度がかなり悪いが、鉛直方向の主応力  $\sigma_1$  が最大となる試験では、すべり面は  $65^\circ \sim 70^\circ$  であり、水平方向が最大主応力となる伸張試験では約  $30^\circ$  であった。筆者は潜在すべり面の概念を説明した前報の中で、潜在すべり面は最終的には肉眼で観察できるすべり面に一致するものであるとした。このことを検証するため各実験でのピーク応力での潜在すべり面の方向を計算したものが **Table 2** に示されている。**Table 2** より明らかな



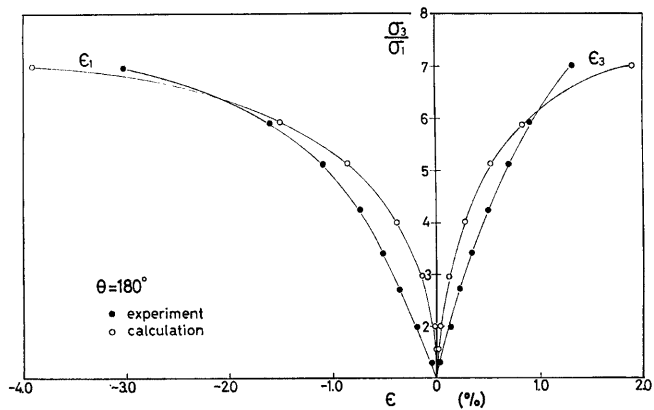
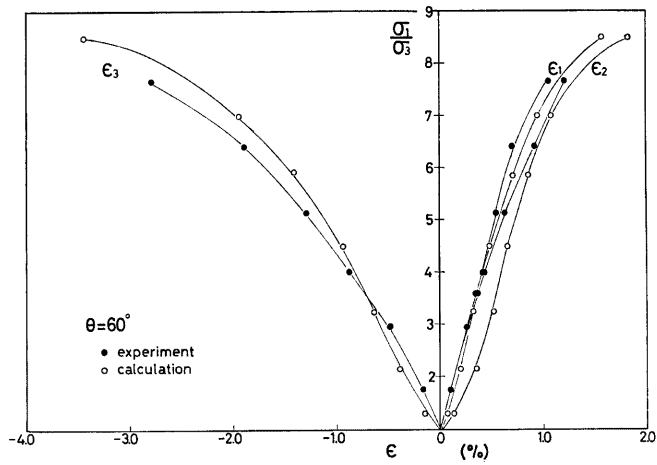
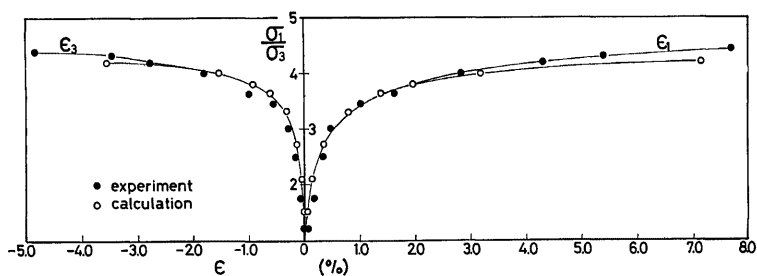


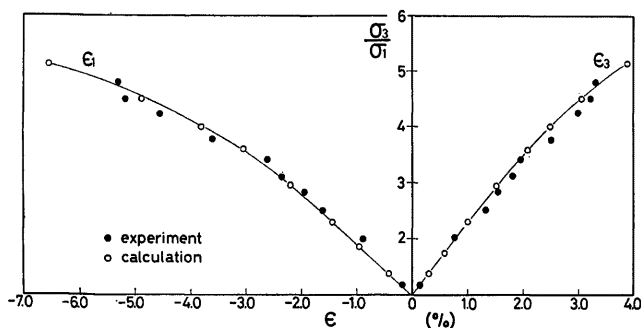
Fig. 10. Stress-strain relations of medium dense samples under general stress states.

Table 2.

| $\theta$    | $\sigma_1/\sigma_3$ | $\beta_1$    | $\beta_2$    |
|-------------|---------------------|--------------|--------------|
| $0^\circ$   | 5.66                | $73.5^\circ$ | $47.3^\circ$ |
| $15^\circ$  | 7.04                | $72.2^\circ$ | $60.0^\circ$ |
| $30^\circ$  | 7.89                | $72.2^\circ$ | $65.9^\circ$ |
| $45^\circ$  | 8.31                | $73.4^\circ$ | $70.8^\circ$ |
| $60^\circ$  | 7.68                | $71.2^\circ$ | $71.2^\circ$ |
| $180^\circ$ | 7.00                | $28.1^\circ$ | $70.5^\circ$ |

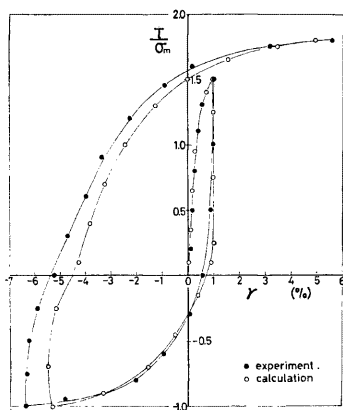


(a) Compression

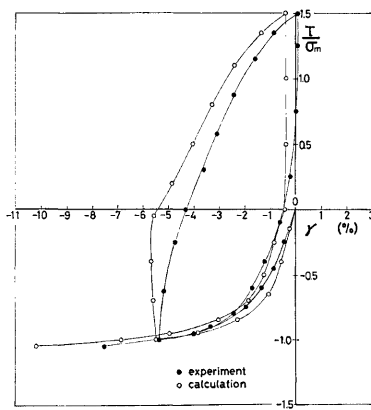


(b) Extension

Fig. 11. Stress-strain relations of loose samples under compression and extension.



(a)



(b)

Fig. 12. Stress-strain relations on the cyclic tests.

ように最大主応力が鉛直方向の場合には鉛直軸と潜在すべり面の法線とのなす角が  $65^\circ \sim 70^\circ$  に入っており、また伸張試験では  $28.1^\circ$  となっており潜在すべり面の概念が妥当なものであることを示している。ただ、観察されたすべり面はほぼ  $\sigma_2$  軸と平行 ( $\beta_2 = 80^\circ \sim 90^\circ$ ) であり、すべり面を生じた時点においては中間主応力の影響を受けないというモール・クーロンの破壊規準に粒状体の挙動が従うことを意味している。しかし、粒状体のせん断過程においてピーク強度に達した時は供試体にはまだすべり面があらわれておらず、すべり面は残留強度に達した時点であらわれるものと考えられること、また本実験は応力制御型の実験であり、ピーク強度、残留強度を正確に測定できていないことなどから、破壊規準に関する議論をするには今後の精度のよい実験データの集積が必要である。

#### 4. 数 値 実 験

提案している力学モデルの骨子をあらわすフローチャートが Fig. 13 に示してある。数値実験はこの流れに従って行なわれているわけであるが、その際に具体的な数値を与えてやらなければならない。この章ではこれらの諸数値について考察を加え、あわせて粒状体の変形機構を解明するための微視的アプローチを試みることにする。粒子 1 個当りの平均的な接点数、ポテンシャル障壁の大きさに関する考察は前報で行っているので省略し、本報告では粒状体内でなされる仕事量、マサツ係数、落ちこみ率、割りこみ率などについて前報の補足的な説明をつけ加えることにする。

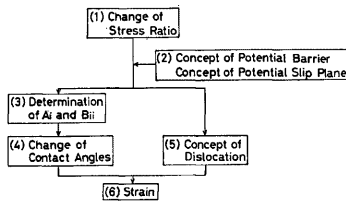


Fig. 13. Flow chart of the proposed model.

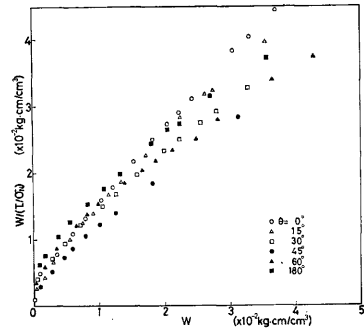


Fig. 14.  $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$  relationship under general stress state.

##### 4. 1 仕事増分 $\Delta W$

これまでに粒状体の変形過程に関するエネルギー的考察を行ってきた<sup>1), 20), 21)</sup> が、これらの結果より通常の単純載荷試験において仕事量と応力比の間に次式のような双曲線関係が存在することが軸対称応力状態では示されている。

$$\tau/\sigma_N = \frac{W}{a + b \cdot W} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $a$  : 双曲線の初期線勾配の逆数

$b$  : 双曲線における  $\tau/\sigma_N$  の漸近値の逆数

$W$  : 粒状体内でなされた総仕事量

$$\tau/\sigma_N = \sqrt{\frac{I_1 I_2 - 9 I_3}{9 I_3}}$$

$I_1, I_2, I_3$  : 応力の 1 次, 2 次, 3 次の不変量

今回行った  $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$  までの 6 種の単純載荷試験結果について (5) 式を検討するため  $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$  関

係で実測値をプロットしたものが **Fig. 14** に示してある。また、両振り試験結果について同様の整理をしたものが **Fig. 15**,  $\theta = 0^\circ$  (圧縮),  $180^\circ$  (伸張) での密な供試体とゆるい供試体の比較が **Fig. 16** に示してある。**Fig. 14~16** より仕事量  $W$  と応力比  $\tau/\sigma_N$  の間に双曲結関係が存在することがわかる。

**Fig. 14** に示した実験結果は間げき比が0.65~0.70 程度の供試体を用いたものであり、間げき比が同じであれば、(5) 式の係数  $a$ ,  $b$  は一定とみなしてよいようである。いいかえれば、間げき比、粒子構造が同じで

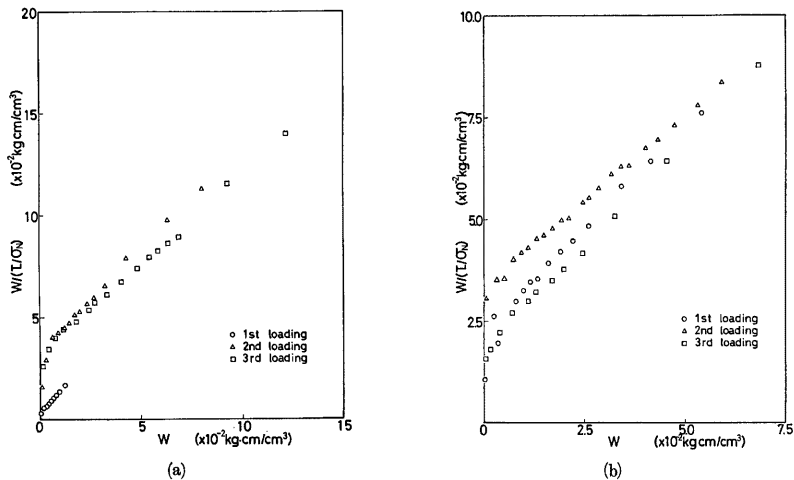


Fig. 15.  $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$  relationship on the cyclic tests.

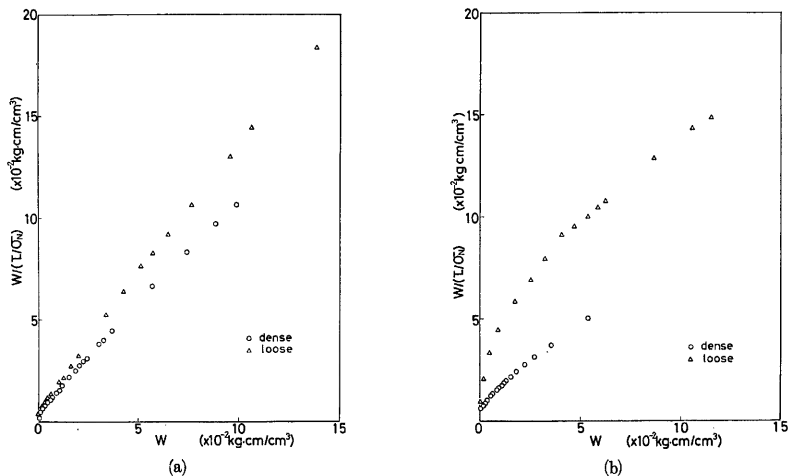


Fig. 16.  $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$  relationship of dense and loose samples under compression and extension.

あれば、Fig. 6 に示されるような単純載荷試験において、仕事量は応力経路に依存せず、応力比との間にユニークな関係が存在するものと推察される。

Fig. 15 によれば、両振り試験においても 3 つの載荷過程において双曲線関係が存在することがわかる。このことは、両振り試験において、破壊近くまでの載荷はそれに続く逆方向の載荷に影響を与えないという龍岡ら<sup>22)</sup>の指摘に対応する挙動と考えられる。また、(5) 式の係数  $a, b$  は間げき比に依存する係数であることが Fig. 16 からわかる。両振り試験における除荷過程での  $W \sim \tau/\sigma_N$  関係が Fig. 17 に示してある。図より仕事量  $W$  と応力比  $\tau/\sigma_N$  の間には次式で示す関係があるものとする。

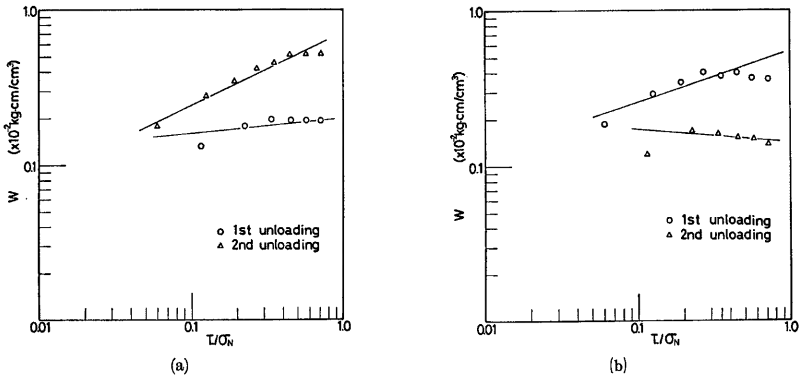


Fig. 17.  $W \sim \tau/\sigma_N$  relationn during the unloading process.

$$W = m(\tau/\sigma_N)^r + c \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $m, r, c$ : 間げき比, 粒子構造, 応力状態に依存する係数。

数値実験において入力データとなる仕事増分  $\Delta W$  は載荷過程では (5) 式, 除荷過程では (6) 式を用いて計算されている。

#### 4. 2 粒子間摩擦係数 $\mu$ について

粒状体の変形過程における巨視的なひずみ硬化現象を微視的にみた時、粒子接点での粒子間の摩擦抵抗が大きな役割を果たしていることは明らかである。しかし、粒状体内の真の粒子間摩擦係数というものとは単に 2 つの物体間の摩擦則とは異なるものであると考えられる<sup>1)21)</sup>。今節では粒状体全体としての粒子間摩擦係数について前報の補足的な考察を加えることにする。

松岡ら<sup>23)</sup>は粒状体内で平均的に粒子が最も滑動する合成面として空間モービライズド面 (Spatial Mobilized Plane, 略して SMP) を提案し、SMP 上でのせん断・垂直応力比  $\tau/\sigma_N$  とせん断・垂直ひずみ増分比  $d\epsilon_N/d\gamma$  の間に直線関係が存在する (いわゆる stress~dilatancy eq.) ことを導き、SMP 上での垂直ひずみ  $d\epsilon_N$  が 0 の時の  $\tau/\sigma_N$  の値が同一試料においては間げき比, 応力経路のいかんにかかわらずほぼ一定であることより、この値を粒状体に固有な粒子間摩擦係数とみなしている。筆者もこの立場をとることにする。Fig. 18 は筆者が豊浦砂を用いて行った実験データを SMP 上での  $\tau/\sigma_N$  と  $d\epsilon_N/d\gamma$  の関係について整理したものである。図をみれば明らかなように応力経路, 間げき比のいかんにかかわらず  $d\epsilon_N=0$  となる  $\tau/\sigma_N$  の値はほぼ一定 (0.25) であることがわかる。数値実験に際しては摩擦係数  $\mu$  として 0.25 を用いている。

#### 4. 3 落ちこみ率, 割りこみ率について<sup>24)</sup>

最大主応力方向が鉛直方向である場合には落ちこみ率として次式を提案している<sup>1)</sup>。

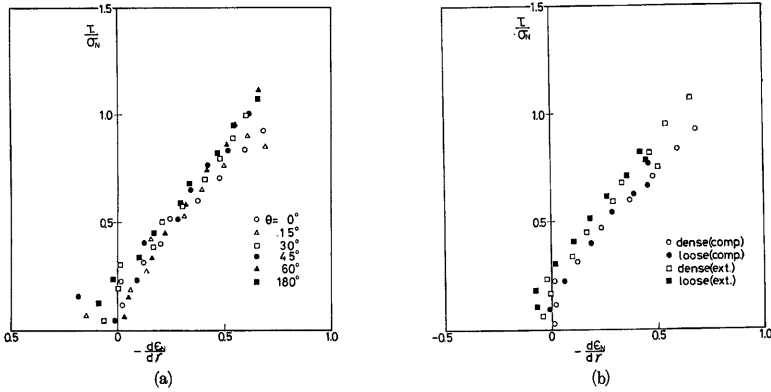


Fig. 18.  $\tau/\sigma_N \sim d\varepsilon_N/d\gamma$  relation on SMP.

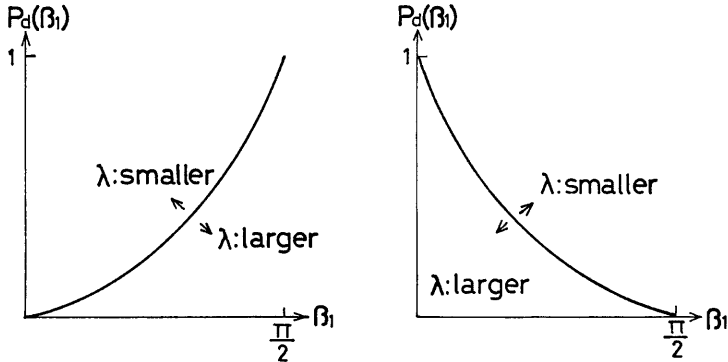


Fig. 19. Relations between the ratio of disappearance  $P_d(\beta_1)$  and contact angle  $\beta_1$ .

$$P_d(\beta_2) = \left(\frac{2}{\pi}\beta_1\right)^\lambda \quad \dots\dots\dots (7)$$

最大主応力の方向が水平である場合、すなわち、 $\theta = 180^\circ$  (伸張試験) の場合には (7) 式の誘導と同様に考えて次のようになる。

$$P_d(\beta_1) = \left\{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\right\}^\lambda \quad \dots\dots\dots (8)$$

(7), (8) 式の関係を図示したものが **Fig. 19** である。(7), (8) 式は **Fig. 19** をみればわかるように、接平面の法線が最大主応力方向と等しい接点では落ちこみという粒子接点での不連続な運動によって接点が消滅する確率は 0 であり、一方、接平面の法線が最大主応力方向と直角な接点ではすべての接点で落ちこみが生じ、その間の接点角を有する接点では  $\lambda$  に依存する割合で落ちこみが生じていることをあらわしている。このことより、(7), (8) 式中の  $\lambda$  は粒状体の力学特性をあらわす係数であり、一般には粒子の形状、大きさ、粒子構造、間げき比、応力状態などに依存するものと考えられるが、ここでは第 1 近似として簡単に偏差応力のみに依存するものとし、次式を用いることにする。

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2(\sigma_1 - \sigma_3) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\lambda_1, \lambda_2$ ：粒状体の力学特性をあらわす係数

$\sigma_1$ ：鉛直方向の主応力、 $\sigma_3$ ：水圧によって生ずる水平方向の主応力。

割りこみについては、割りこみを生ずる接点数と落ちこみを生ずる接点数との比が $\kappa$ となるものとし、 $\kappa$ を割りこみ率と称している。そして、鉛直方向の割りこみ率を $\kappa_1$ 、水平な $\sigma_2$ 方向のものを $\kappa_2$ 、 $\sigma_3$ 方向のものを $\kappa_3$ としている。**Table 3**には数値実験で用いた落ちこみ率、割りこみ率がまとめて示してある。以下、**Table 3**をもとに粒状体の変形過程における粒子の落ちこみ、割りこみという不連続な運動について考察を加えることにする。

Table 3.

| $\theta$            |          | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\kappa_1$ | $\kappa_2$ | $\kappa_3$ |
|---------------------|----------|-------------|-------------|------------|------------|------------|
| 0°                  |          | 10.0        | 5.0         |            | 0.5        | 0.5        |
| 15°                 |          | 3.0         | 4.5         |            | 0.2        | 1.2        |
| 30°                 |          | 10.0        | 0.5         |            | -0.2       | 1.3        |
| 45°                 |          | 5.0         | 2.0         |            | -1.0       | 1.3        |
| 60°                 |          | 10.0        | 1.5         |            | -2.0       | 2.0        |
| 180°                |          | 15.0        | -1.5        | 2.0        |            |            |
| 0° (loose)          |          | 15.0        | 1.5         |            | 0.38       | 0.38       |
| 180° (loose)        |          | 15.0        | -2.0        | 1.5        |            |            |
| cyclic<br>(0°↔180°) | 1st load | 8.0         | 3.0         |            | 0.5        | 0.5        |
|                     | 2nd load | 15.0        | -0.75       | 1.75       | 0.5        |            |
|                     | 3rd load | 12.0        | 3.0         |            |            | 0.5        |
|                     | unload   | 5.0         | 1.0         | 4.0        | 4.0        | 4.0        |
| cyclic<br>(180°↔0°) | 1st load | 8.0         | -0.04       | 2.0        |            |            |
|                     | 2nd load | 10.0        | 3.0         |            | 0.5        | 0.5        |
|                     | 3rd load | 8.0         | -0.3        | 2.5        |            |            |
|                     | unload   | 4.0         | 2.0         | 0.5        | 0.5        | 0.5        |

まず $\theta=0^\circ$ （圧縮）の場合、 $\lambda_2=5.0$ ということは偏差応力（ $\sigma_1-\sigma_3$ ）が増すにつれて（せん断が進行するにつれて） $\lambda$ が大きくなり、**Fig. 19**より明らかなように落ちこみを起す接点が少なくなることを意味している。このような傾向は他の応力経路についても同様であることがわかる。つぎに $\kappa_2=\kappa_3=0.5$ ということは落ちこみを生じた接点数の50%にあたる接点数が水平な $\sigma_2$ 方向において新たに発生する（割りこむ）ことを意味している。

$\theta=15^\circ$ で $\kappa_2=0.2$ 、 $\kappa_3=1.2$ ということは $\sigma_1$ 方向に落ちこみを起した接点数の20%にあたる接点数が水平な $\sigma_2$ 方向に、また120%にあたる接点数が水平な $\sigma_3$ 方向に新たに生ずる（割りこむ）ことを意味している。

$\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ で $\kappa_2$ が負になるということは、 $\sigma_2$ 方向に落ちこみを生じていることを意味し、例えば $\theta=30^\circ$ の場合の $\kappa_2=-0.2$ ということは $\sigma_1$ 方向での落ちこみを起す接点数の20%にあたる $\sigma_2$ 方向の接点数で落ちこみを生じていることを意味している。したがって、 $\kappa_2$ が-1より小さいということは $\sigma_1$ 方向の落ちこみより $\sigma_2$ 方向の落ちこみが生じやすいことを意味している。例えば、 $\theta=60^\circ$ は $\sigma_1$ 方向と $\sigma_2$ 方向の応力が最大主応力となる伸張試験であり、材料の粒子構造が等方であれば、理論的には $\kappa_2=-1$ となるはずであるが、数値実験では $\kappa_2=-2.0$ となり、 $\sigma_1$ 方向より $\sigma_2$ 方向の落ちこみが多く、供試体の粒子構

造の異质性を反映しているものと考えられる。

$\theta = 0^\circ$  での密詰とゆる詰の比較を行うと、 $(\lambda_2)_{\text{dense}} > (\lambda_2)_{\text{loose}}$  であり、 $\lambda$  の値がゆる詰の方が小さく、ゆる詰の場合には落ちこみが生じやすいことを示している。このことは間げきの割合が大きい程、粒子の不連続な運動が多くなるという直観と一致するものである。 $\kappa_2, \kappa_3$  について密詰とゆる詰を比較すると、割りこみを起す割合は  $(\kappa)_{\text{dense}} > (\kappa)_{\text{loose}}$  であり、このことは間げきに落ちこんだ粒子が新たに力を受けもつようになる割合が密詰供試体の方が大きいことを示している。

## 5. 結 語

本報告では前報で提案したマルコフ過程を用いた粒状体の力学モデルの妥当性を主に実験的に検討してきたわけであるが、これまでの議論より提案している力学モデルを用いれば、粒状体の力学的挙動を従来のアプローチに比べ、微視的立場からより統一的に、しかもより簡明に解析していくことが可能である。すなわち、粒状体になされた仕事量と落ちこみ率、割りこみ率がわかればせん断過程での応力～ひずみ関係が誘導され、また粒子レベルでの粒状体の変形機構が明らかになる。

今後は、種々の応力経路をもつせん断試験を数多く行い、落ちこみ率、割りこみ率の物理的意味をより明確にしていくとともに、接点角の変化の様式を修正することにより提案している力学モデルを圧密過程に適用できるようにしたいと考えている。また、不飽和土の力学的挙動の解析にこのモデルを適用することによりモデルで定義している粒子間力について検討を加え、あわせて有効応力の原理の不飽和土への拡張の可能性について考えていきたい。

最後に、御指導を賜っている村山朔郎名誉教授、赤井浩一教授、貴重な助言をいただいた柴田 徹教授、足立紀尚助教授、暖かい激励をいただいた今本博健教授に深謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 北村良介：マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル(1)，京都大学防災研究所年報，第21号 B-2，1978，pp. 37—55.
- 2) 北村良介：多軸試験機について，土木学会関西支部年次学術講演会，1979，Ⅲ—7.
- 3) 赤井浩一・足立紀尚・田伏宣夫：空気圧制御方式による三軸試験装置とその適用（その1），土と基礎，Vol. 23，No. 3，1975，pp. 39—45.
- 4) Lade, P.V. and Duncan, J.M.: Cubical triaxial tests on cohesionless soil. Proc. ASCE, Vol. 99, No. SM10, 1973, pp. 793—812.
- 5) Rowe, P.W. and Barden, L.: Importance of free ends in triaxial testing, Proc. ASCE, Vol. 90, No. SM1, 1964, pp. 1—27.
- 6) Barden, L. and McDermott, J.W.: Use of free ends in triaxial testing of clays, Proc. ASCE, Vol. 91, No. SM6, 1965, pp. 1—23.
- 7) Bishop, A.W. and Green, G.E.: The influence of end restraint on the compression strength of a cohesionless soil, Geotechnique, Vol. 15, No. 3, 1965, pp. 243—266.
- 8) Lee, K.L.: End restraint effects on undrained static triaxial strength of sand, Proc. ASCE, Vol. 104, No. GT 6, 1978, pp. 687—704.
- 9) Lee, K.L. and Vernese, F.J.: End restraint effects on cyclic triaxial strength of sand, Proc. ASCE, Vol. 104, No. GT6, 1978, pp. 705—719.
- 10) 諸戸靖史：砂の弾性的な変形特性，土質学会論文報告集，第12巻，第3号，1972，pp. 65—74.
- 11) Raju, V.S. and Sadasivan, S.K.: Membrane penetration in triaxial tests on sands, Proc. ASCE,

- Vol. 100, No. GT4, 1974, pp. 482-489.
- 12) Kiekbusch, M. and Schuppener, B.: Membrane penetration and its effect on pore pressures, Proc. ASCE, Vol. 103, No. GT 11, 1977, pp. 1267-1279.
  - 13) Lade, P.V. and Hernandez, S.B.: Membrane penetration effects in undrained tests, Proc. ASCE, Vol. 103, No. GT2, 1977, pp. 109-125.
  - 14) 土質工学会編：土質試験法，1970. p. 417.
  - 15) Henkel, D.J. and Gilbert, G.D.: The effect of the rubber membrane on the measured triaxial compression strength of clay samples, Geotechnique, Vol. 3, No. 1, 1952, pp. 20-29.
  - 16) Chandler, R.J.: The measurement of residual strength in triaxial compression, Geotechnique, Vol. 16, No. 3, 1966, pp. 181-186.
  - 17) LaRochele, P.: Membrane, drain and area correction in triaxial test on soil sample failing along a single shear plane, Proc. 3rd Pamam. Conf. Soil Mech., Vol. 1, 1967, pp. 273-292.
  - 18) Pachakis, M.D.: The influence of the membrane restraint on the measured strength of a soil sample failing along a single shear plane in the triaxial test, Geotechnique, Vol. 26, No. 1, 1976. pp. 226-230.
  - 19) 堀 正幸：三軸試験結果におよぼす面積およびメンブレン補正について，土木学会関西支部年次学術講演会，1978，Ⅱ-15.
  - 20) 北村良介・足立紀尚：粒状体の力学現象に対するエネルギー的考察，土木学会第32回年次学術講演会，第Ⅱ部，1977，pp. 74-75.
  - 21) 北村良介・足立紀尚：粒状体の力学現象に対するエネルギー的考察(2)，土木学会第33回年次学術講演会，第Ⅱ部，1978，pp. 1-2.
  - 22) Tatsuoka, F. and Ishihara, K.: Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 3, 1974, pp. 51-65.
  - 23) 松岡 元・中井照夫：多軸応力下の土の変形・強度特性，京都大学防災研究所年報，第17号 B，1974，pp. 319-333.
  - 24) 北村良介：確率過程を用いた粒状体の力学モデル(3)，第14回土質工学研究発表会，1979，pp. 325-328.