

Weak type の interpolation theorems

東北大理 猪狩 惺

§ 1. 序

この目的は二つの空間 $L_n^{(p, \lambda)}(\Omega)$ と $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ に関する補間定理を述べることである。

現在では、作用素の補間定理は補間空間の構成という立場から論ぜられることが多い。それらのうちよく知られているものとして、例之は Calderón [1], Lions [8] あよ α Lions - Peetre [9], Peetre [10] などの方法がある。

前者は, Riesz - Thorin の補間定理を Calderón - Zygmund が Phragmén - Lindelöf の定理を用いて透明に証明しているが, その方法を活かしたもので所謂複素関数論的方法によるものといえる。一方, 後者二つの中には関数を貝合のよ二つの部分に分解するという方法がみられる。このように考之方は Marcinkiewicz の補間定理の証明の中に見ることがき

そこでは複素関数論的方法はとられており、

始めに述べた二つの空間 $L_k^{(p, \lambda)}$, H^p に対しては, Riesz-Thorin や Marcinkiewicz のと類似した補間定理がかりたつ。そしてそれらと上における構成された補間空間との関係は、例之は Kree [7], Spanne [12] などでおかれている。しかしそれらが一般的空间の一例に過ぎないことが、あるいはそれらを含むより一般的空间の構成はわかる、というふうにも思われる。

§ 2. 空間 $L_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$.

空間 $L_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$ は John-Nirenberg [6] や Campanato [2], [3] などによって述べられている。更に Spanne [12] Stampacchia [13], [14] に従ってそれを述べる。

Ω は常に n 次元ユークリッド空間 R^n の各辺が座標軸と平行な立方体を表わすものとする。 Ω は R^n の連結開集合で、中心が Ω に含まれ $\text{diam}(\Omega) < 2 \text{diam}(\Omega)$ なるすべての Ω に対して

$$|\Omega \cap \Omega| / |\Omega| \geq \delta > 0$$

がなりたつものとする、ここに δ は Ω に無関係な定数である。 P_k を n 変数、次数 $\leq k$ なる多項式全体とする。

定義. $1 \leq p < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$, $k \geq 0$ は整数とする、

$\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}$ は次のように Ω 上の局所可積分関数 u の集合である;

$$[u]_{\mathcal{L}} = \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|^{\frac{\lambda}{p}}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{Q \cap \Omega} |u - P|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ここで Q は中心が Ω に含まれ $\text{diam}(Q) < 2 \text{diam}(\Omega)$ である.

$[u]_{\mathcal{L}}$ の定義で右辺として特別なものを選べることを示す; 立方体 Q に対して $\{\varphi_j\}$ を $\mathcal{P}_k$ の内積 $(f, g) = \int_{Q \cap \Omega} f \bar{g} dx$ に関する正規直交基とする, 但し便宜上 φ_0 は定数関数としておく. このとき

$$P(Q)u = P_k(Q)u = \sum_j (u, \varphi_j) \varphi_j$$

とあくと

$$\|P_k(Q)u\|_{L^p(Q \cap \Omega)} \leq C \|u\|_{L^p(Q \cap \Omega)}$$

となる, C は u , Q に無関係な定数である. 従って

$$\begin{aligned} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u - P\|_{L^p(Q \cap \Omega)} &\leq \|u - P(Q)u\|_{L^p(Q \cap \Omega)} \\ &\leq (1 + C) \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u - P\|_{L^p(Q \cap \Omega)}. \end{aligned}$$

ゆえに $[u]_{\mathcal{L}}$ の定義で P は $P(Q)u$ とおきかえてもよい.

定義. $C^{(k)}(\Omega)$ は Ω 上 $r \leq k$ 次の連続な導関数をもつ関数 u の集合とする. $C^{(k, \alpha)}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, は $u \in C^{(k)}(\Omega)$

で

$$[u]_C = \sum_{|Q|=k} \sup_{x, y \in \Omega} \frac{|D^k u(x) - D^k u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

なるものの集合とする.

定理. $1 \leq p < \infty$, $k \geq 0$ は整数, $\lambda \geq 0$, $\alpha = (\lambda - n)/p - k$ とする.

$$(i) \quad \alpha > 1 \text{ ならば } \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)} = \mathcal{P}_k.$$

$$(ii) \quad 1 \geq \alpha > 0 \text{ ならば } \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)} = C^{(k, \alpha)}.$$

$$(iii) \quad 0 > \alpha \text{ ならば 整数 } k, \alpha + k - 1 < k, \text{ に対して}$$

$$\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)} \cap L^p(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)} \cap L^p(\Omega).$$

$$(iv) \quad \mathcal{L}_k^{(p, 0)} = L^p(\Omega) + \mathcal{P}_k.$$

§ 3. 空間 $E_k(\Omega)$.

$k \geq 0$ を整数とすると, すべての $p \geq 1$ に対して

$$\mathcal{L}_k^{(1, n+k)}(\Omega) = \mathcal{L}_k^{(p, n+pk)}(\Omega)$$

であることは Campanato [3] は示した. 従って $\mathcal{L}_k^{(\infty, \infty)}$ に代るものとして $E_k(\Omega)$ を $\mathcal{L}_k^{(1, n+k)}(\Omega)$ として定義する. E_k の半ノルム $[\cdot]_{E_k}$ は $[\cdot]_{\mathcal{L}_k^{(1, n+k)}}$ と与える.

定理. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ とするとき次の条件は同値である.

$$(i) \quad [u]_{\mathcal{L}_k^{(1, n+k)}} < \infty,$$

$$(ii) \quad [u]_{\mathcal{L}_k^{(p, n+pk)}} \leq \text{constant for all } p \geq 1$$

(iii) ある $\beta > 0$ に対して

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap \Omega} [e^{\beta |u - P_k(Q)u|/|Q|^{\frac{k}{n}}} - 1] dx < \infty,$$

(iv) ある $\beta' > 0$ に対して

$$\sup_Q \sup_{\sigma > 0} \frac{1}{|Q|} e^{\beta' \sigma / |Q|^{\frac{k}{n}}} \text{meas} \{x \in Q \cap \Omega : |u - P_k(Q)u| > \sigma\} < \infty.$$

(iii) $\rightarrow$ (ii), (iii) $\rightarrow$ (iv) は明らか, (iv) $\rightarrow$ (ii) は容易に示される. $k \geq 1$ のとき (i) $\rightarrow$ (ii) であることは Campanato [3] にある. 従ってこのときは (ii) $\rightarrow$ (iii) は容易に示される. $k = 0$ のとき (i) $\rightarrow$ (iv) であることは John-Nirenberg [6] にある.

§ 4. 空間 $\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ と $\mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$.

Q を互いに素な中心が Ω にあり $\text{diam}(Q) < 2 \text{diam}(\Omega)$ であるような有限個の互いに素な立方体からなる集合の族とする.

定義 $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$, $k \geq 0$ を整数とする.

$\mathcal{N}_k^{(p,\lambda)}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{(p,\lambda)}$ は次の条件を満たす Ω 上の可積分な関数 u の集合である:

$$[u]_{\mathcal{N}} = \sup_{\{Q_j\} \in \mathcal{Q}} \left\{ \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|^{\frac{\lambda}{n}}} \int_{Q_j \cap \Omega} |u - P_k(Q)u| dx \right)^p |Q_j| \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

容易にわかるように

$$E_k(\Omega) = L_k^{(1, n+k)}(\Omega) = V_k^{(0, n+k)}(\Omega).$$

定義. $1 \leq p < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$, $k \geq 0$ を整数とす.

$\mathcal{M}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{(p, \lambda)}$ は次の条件をみたす Ω 上の可測関数 u の集合である;

$$[u]_{\mathcal{M}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)} = \sup_{\Omega} \sup_{\sigma > 0} \sigma \left[\frac{1}{|\Omega|^\frac{1}{p}} \text{meas} \{x \in \Omega \cap \Omega : |u - E_k(\Omega)u| > \sigma\} \right]^{1/p}$$

$< \infty$.

Kalmogorov の不等式から明らかなる

$$[u]_{\mathcal{M}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)} \leq [u]_{L_k^{(p, \lambda)}(\Omega)}$$

である. 更に次のように関係が成り立つ.

定理. $1 < p < \infty$, $k \geq 0$ を整数, $\lambda \geq n$ とすれば,

$$[u]_{\mathcal{M}_k^{(p, \lambda-n)}(\Omega)} \leq C [u]_{\mathcal{M}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)},$$

ここに C は u に無関係な定数である.

証明は次に示す補助定理を用いて John-Nirenberg [6] の論法を適用すればよい.

補助定理. $u \in L^1(\Omega \cap \Omega)$, Ω の中心は Ω に含まれ
 $\text{diam}(\Omega) < 2 \text{diam}(\Omega)$,

$$s \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega \cap \Omega} |u - P_k(Q)u| dx$$

とする. そのとき Q に含まれる中心が Ω にある互いに素な高次元可算個の Q_j と, δ , κ だけ Ω に内接する定数 κ が存在して次の δ が成り立つことを示す.

$$(i) \quad |u(x) - P_k(Q)u| \leq s \quad \text{a.e. in } \Omega \cap \Omega \setminus \bigcup Q_j$$

$$(ii) \quad |P_k(Q_j)u - P_k(Q)u| \leq \kappa s \quad \text{in } Q_j$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq \kappa s^{-1} \int_{\Omega \cap \Omega} |u - P_k(Q)u| dx.$$

§ 5. 補内定理.

以上述べた空間 Λ の写像に対する補内定理を主に Stampacchia [13], [14] に従って述べる. これは古くから知られておる Riesz-Thorin, Marcinkiewicz の定理から極く簡単に導かれるものである. しかし結果は自明であるばかりは有効である.

定理 1. $1 \leq p_i$, $q_i \leq \infty$, $-\infty < \lambda_i < \infty$ ($i = 0, 1$),

$k \geq 0$ の整数とする. $0 < \theta < 1$ に対して

$$1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, \quad 1/q_\theta = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1,$$

$$\lambda_\theta = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$$

と置く.

T が $L^{p_i}(M, \mathcal{M}, \mu)$ から $\mathcal{L}_k^{(p_i, \lambda_i)}(\Omega)$ への線型写像として、 $\forall M_i$ ($i = 0, 1$) に対しては、 T が $L^{p_0}(M, \mathcal{M}, \mu)$ から $\mathcal{L}_k^{(p_0, \lambda_0)}(\Omega)$ の写像として、 $\forall C \leq C M_0^{1-p_0} M_1^0$ となる、 C は T に無関係な定数である。

証明. $J_Q u = u - P_k(Q)u$ とおけば、 $J_Q T : L^{p_i} \rightarrow L^{p_i}(Q \cap \Omega, |Q|^{-\frac{\lambda_i}{n}} dx)$ のノルムは $C_i M_i$ であることを示す。従って、測度の変化を含めた Riesz-Thorin の定理 (Stein-Weiss [15] 参照) を適用して Q に関する $\sup$ をとれば求める式が得られる。

同様にして Marcinkiewicz の定理から次の定理が導かれる。

定理 2. $1 \leq p_i \leq p_i' < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $p_0 \neq p_1$ とする。 λ_i, k, p_0, p_0' は前定理と同様とする。

$T \in L^{p_i}(M, \mathcal{M}, \mu)$ から $\mathcal{M}_k^{(p_i, \lambda_i)}(\Omega)$ への線型写像として、 $\forall M_i$ ($i = 0, 1$) に対しては、 T は L^{p_0} から $\mathcal{L}_k^{(p_0, \lambda_0)}$ への写像として $\forall C \leq C M_0^{1-p_0} M_1^0$ となる。

定理 3. $p_i, p_i', p_0, p_0', \lambda_i, \lambda_0, k$ は定理 1 と同様とする。 $T \in L^{p_i}(M, \mathcal{M}, \mu)$ から $\mathcal{M}_k^{(p_i, \lambda_i)}(\Omega)$ への線型写像として、 $\forall M_i$ とする ($i = 0, 1$)。このとき $T : L^{p_0}$

¹⁾ T は線型よりゆるい条件におきかえてもよい。

$\rightarrow \mathcal{N}_k^{(\varrho_0, \lambda_0)}$ のノルム $\leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ である。

証明. $\{Q_j\} \in \mathcal{Q}$ とする. 複素数 z , $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, に対して $S^z : \mathcal{N}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) \rightarrow L^p(L^1(\Omega); (\mathbb{Z}^+, |Q_j| d_j))$

$$S^z v(j) = \frac{1}{|Q_j|^{\frac{\lambda_z}{n}}} \left[v(\cdot) - P_k(Q_j) v(\cdot) \right] \chi_{Q_j}(\cdot)$$

に δ を定義すれば,

$$S^z T : L^p(M, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow L^p(L^1(\Omega); (\mathbb{Z}^+, |Q_j| d_j))$$

は解析的線型, 且して $\operatorname{Re} z = z$ ($z = 0, 1$) のとき, ノルム $\leq M_z$ である. 故に Stein の補間定理 (Calderón [1]) に δ を求める評価をする.

定理 4. $p, q, p_0, q_0, \lambda, \lambda_0, k$ は定理 2 と同様とする. $T \in L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ から $\mathcal{N}_k^{(q, \lambda)}(\Omega)$ へのノルム M_z なる線型写像とすれば, $T : L^{p_0}(M, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow \mathcal{L}_k^{(q_0, \lambda_0 - \gamma)}(\Omega)$ のノルム $\leq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ である.

証明は §4 の定理 1 と定理 2 を用いると易しい.

定理 4 は $q = \infty$ であるとしてもよい. 実際上の定理は $\mathcal{N}_k^{(q, \lambda)}$ とする $\mathcal{N}_k^{(\infty, n+k)} = E_k$ と $\mathcal{M}_k^{(q_0, \lambda_0)}$ であるからとてなり得る.

以上 4. の定理で $L^p(M, \mathcal{M}, \mu)$ は一般の補間空間であるからとてよい. しかし特別な場合を除いて空間 $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}$ や $\mathcal{N}_k^{(p, \lambda)}$ 等とてあるからとてよいから否かを明らかにする.

である (Stein - Zygmund [16] 参照).

§ 6. 応用例

典型的な応用例として Riesz ポテンシャル 及び Calderón-Zygmund タイプの特異積分を考えてみる.

a は $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数で, $1 \leq n \leq \infty$ に対して

$$\left(\int_{|y| \geq At} |a(x-y) - a(-y)|^n dy \right)^{1/n} \leq A, \quad |x| \leq t$$

とす. $Tu = u * a$ とおく.

$1/p_0 = 1/q_0 = 1/n'$, $1/n + 1/n' = 1$, $p_0 < n'$ とす.

もし $T: L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}$ が有界ならば, すなわち $1/p = 1/q = 1/n'$, $1 < p$, $q < \infty$ に対して $T: L^p \rightarrow L^q$ は有界である.

これを証明するに, $T: L^{n'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{N}_0^{(\infty, n)}(\mathbb{R}^n) = E_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_0^{(1, n)}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_0^{(q_0, n)}(\mathbb{R}^n)$ が有界であることを示せばよい. 仮定から, $T: L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_0^{(q_0, 0)}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}_0^{(q_0, n)}(\mathbb{R}^n)$ は有界だから定理4を用い, 示されるからである.

実際, $u = u_0 + u_1$, $u_0 = u$ ($|u| < At$), $= 0$ ($|u| \geq At$) とおくと

$$\|Tu_0\|_{q_0} \leq C \|u_0\|_{p_0} \leq C' t^{n/q_0} \|u\|_{n'}.$$

$$|\mathbb{T}u(x) - \mathbb{T}u(0)| \leq \left(\int_{|y| \geq At} |a(x-y) - a(-y)|^2 dy \right)^{1/2} \|u\|_{\mathcal{H}'},$$

ゆえに, $c = \mathbb{T}u(0)$ とおくと

$$\left(\int_{|x| \leq t} |\mathbb{T}u(x) - c|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \leq C t^{n/p_0} \|u\|_{\mathcal{H}'},$$

従って, $\|\mathbb{T}u - c\|_{L^{p_0}(\partial)} \leq C |\partial|^{1/p_0} \|u\|_{\mathcal{H}'}$ が中心 0 の立方体 ∂ に対して成り立つ. これは平行移動によってすべての立方体 ∂ に対して成り立つから,

$$\|\mathbb{T}u\|_{L^{p_0, n}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}'(\mathbb{R}^n)}.$$

かえり来す.

という一応の応用例として, 定理 1 は $\mathbb{T}: L^{p_i} \rightarrow C^{(\alpha_i, \alpha_i)}$ が有界線型写像に対して適用される.

§7. 空間 H^p に関する補肉定理.

定義. $H^p(U)$, $p > 0$, は U の p 単位円の内部で解析的関数 $f(z)$ の集合である;

$$\|f\|_p = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

この空間を半平面上の関数で考えたものが $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ である.

3. $f(x, y) \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, とは $n +$

1) の調和関数系 $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ で次の条件をみたすものという:

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{i=0}^n |f_i(x, y)|^2 \right]^{p/2} dx \right)^{1/p} < \infty.$$

ヒルベルト変換に関する $M. Riesz$ の定理および $Caldwell-Zygmund$ の不等式からして, $p > 1$ ならば:

$$H^p(U) = L^p(0, 2\pi), \quad H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

(ノルム同値) である.

従って次に述べる定理は p_0 または $p_1 = 1$ のとき意味をもち.

定理 p_i, ℓ_i, p_0, ℓ_0 は §5 の定理 2 と同様とする. $\mathbb{I}$ は

$$|\mathbb{I}(f+g)| \leq \kappa (|\mathbb{I}f| + |\mathbb{I}g|)$$

をみたす H^{p_i} から ν -可測関数への写像で

$$\sup_{\sigma>0} \sigma \left[\nu \{s \in N : |\mathbb{I}f(s)| > \sigma\} \right]^{1/\ell_i} \leq M_i \|f\|_{H^{p_i}}$$

($i = 0, 1$) とすれば, $\mathbb{I}$ は H^{p_0} から $L^{\ell_0}(N, \nu)$ への

有界写像で, $\|\mathbb{I}\| \leq C \kappa^2 M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ である, $\theta = \frac{p_0}{p_1}$ で H^p

は $H^p(U)$ または $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ をあつかす.

証明は, Marcinkiewicz の補間定理の Zygmund による証明法と特異積分の“悪い部分”の評価を組合せて与えられる (Igari [5] 参照).

注意. $\mathbb{I}$ も線型, $\|\mathbb{I}f\|_{L^p_i} \leq M_i \|f\|_{H^p_i}$, $H^p = H^p(U)$, とすれば, 定理の結論は $0 < p_i < \infty$ として成り立つことが知られてゐる (Salem-Zygmund [11], Weiss [18]). しかしその方法はこのよう weak type p は適用できない (Strichartz [17]).

$H^p(U)$, $p > 0$, および $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p \geq (n-1)/n$, が補間空間か否かは明らかでないのである.

引用文献

[1] A. P. Calderón, Intermediate space and interpolation, the complex method, *Studia Math.*, 24 (1964) 113-190.

[2] S. Campanato, Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni, *Ann. Scuole Norm. Sup. Pisa*, 17 (1963), 175-188.

[3] S. Campanato, Proprietà di una famiglia

di spazi funzionali, *ibid.* 18 (1964), 137-160.

[4] S. Campanato, Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano L^p in $C^{k,\alpha}$, *ibid.* 17 (1964) 345-360.

[5] S. Igari. An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz, *Proc. Japan Acad.* 38 (1962), 731-734, *Tôhoku Math. J.* 15 (1963) 343-358.

[6] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 415-426.

[7] P. Krée, Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni complets, *Ann. Inst. Fourier*, 17 (1968), 137-174.

[8] J.-L. Lions, Une construction d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci.*, 251 (1961) 1853-5.

[9] J.-L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. I.H.E.S.*, Paris n° 19 (1964) 5-68.

[10] J. Peetre, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci.*, 256 (1963), 54-

55.

[11] R. Salem and A. Zygmund, A convexity theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 34 (1948) 443-7.

[12] S. Spanne, Sur l'interpolation entre les espaces $L_k^{p, \Phi}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966) 625-648.

[13] G. Stampacchia, $L^{(p, \lambda)}$ spaces and interpolation, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964) 293-306.

[14] G. Stampacchia, The spaces $L^{(p, \lambda)}$, $N^{(p, \lambda)}$ and interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965) 443-462.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, Interpolation of operators with change of measures, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958) 159-192.

[16] E. M. Stein and A. Zygmund, Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p -spaces, Ann. Math., 85 (1967), 337-347.

[17] R. S. Strichartz, A multiplier version of the Marcinkiewicz interpolation theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969) 441-4.

[18] G. Weiss, An interpolation theorem for sub-

linear operations on H^p -spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,
8 (1957), 92-9.