

ヤノフ形並列プログラム図式の決定可能問題

名 大・エ 山下 雅史

三重 大・エ 稻垣 康善

名 大・エ 本多 波雄

1. はじめに

並列処理プログラムは、計算速度の向上に関する利便のほかに、最近ソフトウェア工学の立場から、プログラムの自然な構造化に対しても有効であることがたびたび指摘されている。^[1]このような立場から並列処理プログラムに対する研究が進むと共に、構造化された並列処理プログラムを記述するための高級言語もいくつかの提案され、実用化されている。^[2]著者は、このような高級言語と容易に対応できる、しかも形式的な取扱いにも適している並列プログラム図式(pps)を提案し、その性質を考察してきた。^{[3][4]}本稿では、ppsの並列に走る各プロセスのヤノフ図式の場合には、図式の自由性、停止性、発散性、相互排他性、決定性、デッドロックフリー性、同型性、同値性という、図式の基本的な性質に関する決定問題が全て可解となることを示す。

2. 諸定義

[定義1] 並列プログラム図式-PPS-は以下で定義される.

$PPS = (\text{program part}, \text{scheduler})$

$\text{program part} = (\text{process}_1, \dots, \text{process}_m)$

$\text{process} = (S_1, \dots, S_p)$

$S_i = i. \text{statement}$

$\text{statement} = \text{assignment statement (ass. stat.)} : Y \leftarrow f(Y) / \text{communication}$

$\text{statement (com. stat.)} : c \in \Sigma (\text{scheduler の } \times \text{ 記号の集合}) / \text{test}$

$\text{statement (test stat.)} : \text{if } P \text{ then } i \text{ else } j / \text{halt statement (halt stat.)} : \text{halt}$

$\text{scheduler} = (K, \Sigma, \delta, q_0)$ 二に, K : 状態の有限集合, Σ : 入力記号の有限集合, $\delta: K \times \Sigma \rightarrow K$ は推移関数, $q_0 \in K$ は初期状態, である. $\square$

[定義2] pps の解釈 $\mathcal{I}$ をつぎのように定める.

i) 空でない集合 D (解釈の領域)

ii) 各 n 変数関数記号 f_n^m に D^n から D^n への全関数と割り当てる.

iii) 各 n 変数述語記号 p_n^m に D^n から $\{\text{true}, \text{false}\}$ への全述語と割り当てる. $\square$

pps S と解釈 $\mathcal{I}$ の組 $\langle S, \mathcal{I} \rangle$ を並列プログラムと呼ぶ. 並列プログラムの初期値 γ に対する実行は計算状況 (LC, Q, Y) (LC : 各プロセスのロケーションカウンタの値, Q : スケジューラの状態, Y : 各変数の値) の推移で表現される. 厳密な推移規則は

文献[4]に譲り，ここでは概略を述べる．実行は，各プロセスのロケーション・カウンタが指すステートメントの中の1つを非決定的に選択し，実行することにより行われる．ただしスケジューラの状態が受理しない入力記号の集合に含まれる，com.stat. は選択されない．したがって，並列プログラム $\langle S, I \rangle$ の初期値 I に対する計算の結果 $val\langle S, I, \Sigma \rangle$ は，各プロセスの実行順序に任意性があることから，一般には一意に決定されない．そこで， $val\langle S, I, \Sigma \rangle$ を，各プロセスが停止したときの結果変数の値の集合として定義する．

[定義3] pps π 以下の2条件をみたすとき， π は形 pps (π is) であるという．プログラム変数を y で示す．

- i) pps に現れるどの述語記号 p も $p(y)$ という形を持つ．
- ii) pps に現れるどの関数記号 f も，それを用いた ass.stat. は $y \leftarrow f(y)$ という形を持つ．

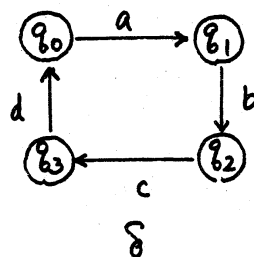
<例1> π is の例を示す．

process ₁	process ₂
1. <u>if</u> $P(y)$ <u>then</u> 2 <u>else</u> 7	1. c
2. $y \leftarrow f(y)$	2. $y \leftarrow g(y)$
3. a	3. d
4. $y \leftarrow g(y)$	4. <u>if</u> $P(y)$ <u>then</u> 1 <u>else</u> 5
5. b	5. <u>halt</u>
6. <u>goto</u> 1	
7. <u>halt</u>	

scheduler = (K, Σ, δ, q_0)

$K = \{q_0, \dots, q_3\}$

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$



[定義4] (i) pps のどの二つの同じ述語記号も、任意の解釈に対する実行において、同じ引数の値に対して評価されることにならないとき、pps は 自由 であるという。

(ii) pps の 停止、発散 は通常通り定義する。

(iii) pps の計算が任意の解釈と初期値に対して一意に決定するとき、pps は 決定性 であるという。

(iv) pps の任意の解釈と初期値に対する計算に現れる停止状態ではない計算状況が少なくとも1つの推移を持つとき、pps は デッドロック・フリー であるという。

(v) プロセスにおいて、test stat. を含まないステートメントの列をブロックと呼ぶ。pps のあるブロックの集合を $\mathcal{B}$ とする。pps の実行の任意の段階において、 $\mathcal{B}$ の中の任意の二つのブロックに含まれるステートメントがどちらも実行可能となることにならないとき、 $\mathcal{B}$ は pps において 相互排他 されているという。

(vi) 二つの pps S と S' が 同値 であるとは、任意の解釈 I と初期値 γ に対して、 $val\langle S, I, \gamma \rangle = val\langle S', I, \gamma \rangle$ となることである。

(vii) 二つの pps S と S' において、任意の解釈 I と初期値 γ に対して、com. stat. と halt stat. を無視すれば、 S において実行されるステートメント列の集合と S' において実行されるステートメント列の集合が一致するとき、同型 という。 ▢

3. PIS の性質に関する決定可能問題

本節では、 PIS の性質に関する種々の決定問題を考察し、その可解性を示す。そのためにここで用いる方法は、主として PIS の動作を非決定性 n テープ有限オートマトン (n -NFA) で模倣することによつて、各種の決定問題を n -NFA, または n -NFA に 1 本の出力用テープを取付けた、マージ機械 (n -MM) の上のいくつかの可解性問題に帰着することである。

[定義 5] n -NFA は 6 項組 $\mathcal{G} = (n, K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ である。ここに K : n : テープ数, K : 状態の有限集合, Σ : 入力記号の有限集合 ($\$$: エンド・マークとして使用), $\delta: K \times \Sigma^n \rightarrow 2^{K \times \{0,1\}^n}$ は推移関数, $q_0 \in K$ は初期状態, $F \subseteq K$ は最終状態の集合, である。□

n -NFA の動作は通常のとおり (例へば文献 [4]) 定義される。

<定理 1> 任意の n -NFA $\mathcal{G} = (n, K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ と語の集合 $W = \{w \mid w = (r_1 \$, \dots, r_n \$), r_i \in R, i, R_i \text{ は } \Sigma - \{\$ \} \text{ 上の正規表現} \}$ に対して, $L(\mathcal{G}) \cap W = \emptyset$ の否は可解である。□

マージ機械 (n -MM) は n -NFA に 1 本の出力用テープを取付けた、一種の変換器である。土台となる n -NFA は任意の推移に対して、 n 個のヘッドを動かす。出力用テープに出力される記号は、各推移の際に読まれる記号である。 n -MM M の入力テープに語 w を与えたとす、 M が w を受理するとすに出力される記号列の集合を $\mathcal{O}(M, w)$ と書く。語の集合 W に対して

対して, 変換 $\tau(\mu, W) \in \bigcup_{w \in W} \circ(\mu, w)$ で定義する.

<定理2> 任意の n -MM μ , 語の集合 $W = \{w \mid w = (r_1 \$, \dots, r_n \$), r_i \in R_i\}$
 R_i は正規表現 $\}$ に対して, $\tau(\mu, W)$ は正規集合である. $\square$

3.1 pfs の自由性, 停止性, 発散性, デッドロック・フリー性 相互排他性の可解性

pps においても, 流れ図図式と同様, 図式の性質に関する多くの問題は, 全ての解釈を考えなくとも, エルブラン解釈だけに考えれば十分である. 以下では解釈をエルブラン解釈に限定する. また, 取扱いの簡便さのため, pfs の各プロセスを正規プログラム図式^[5]として表現する. ただし, $process_i$ の halt stat. を h_i で示す.

<例2> 例1の pfs の各プロセスは以下のように表現される.

$process_1: (pfaqb)^* \bar{p}h_1$ $process_2: cgd(pcgd)^* \bar{p}h_2$ $\square$

さて, 任意の pfs を S とする. S のスケジューラを $\mathcal{S} = (K, \Sigma, \delta, q_0)$, 各プロセスを表現する正規プログラム表現を R_i とする. S に現れる関数記号の集合を Σ , 述語記号の集合を Ψ , $\bar{\Sigma} = \{\bar{p} \mid p \in \Sigma\}$, $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ とする. ここで, 以下で使用する記法をまとめておく.

[記法] (i) v_i^a ($1 \leq i \leq n$, $a \in A$, A は記号の集合) で i 番目の要素が a , それ以外の要素は A の任意の元である n 項組を示す. (ii) $\bar{v}_i$ ($1 \leq i \leq n$) で i 番目の要素のみ $\bar{p}$ で他の要素は 0 である n 項組を

示す. (iii) $(w)_i (1 \leq i \leq n)$ で n 項組 w の i 項を示す. □

S は自由性, 発散性を持つ P は可解であることを示す.

<構成 1> S に対して n -NFA $\mathcal{S} = (n, K', \Sigma', \delta', q_0', F)$ と語の集合 W を以下のように構成する.

(1) $K' = \{q_\sigma \mid q \in K, \sigma \in 2^{\Sigma \cup \bar{\Sigma} \cup H}, \sigma \cap H \neq H\} \cup \{q_+, q_h\}$ (q_i は q と略記する) (2) $\Sigma' = \Sigma \cup \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma} \cup H \cup \{\$ \}$ (3) $q_0' = q_0$ (4) $I(\sigma) = \{i \mid 1 \leq i \leq n, h_i \neq \sigma\}$ と定義する. このとき, δ' : (i) $\delta(q, a) = r (q, r \in K, a \in \Sigma)$ ならば, $\forall i \in I(\sigma)$ に対して, $\delta'(q_\sigma, v_i^a) = (r_\sigma, d_i)$ (ii) $\forall f \in \bar{\Sigma}, \forall q \in K, \forall i \in I(\sigma)$ に対して, $\delta'(q_\sigma, v_i^f) = (q_{\sigma \cap H}, d_i)$ (iii) $\forall p \in \bar{\Sigma} \cup \bar{\Sigma}, \forall q \in K, \forall i \in I(\sigma)$ に対して, $\delta'(q_\sigma, v_i^p) = \text{if } (\sigma \neq \bar{p}) \text{ then } (q_{\sigma \cup \bar{p}}, d_i) \text{ else } (q_+, d_i)$ (iv) $\forall h_i \in H, \forall q \in K, \forall i \in I(\sigma)$ に対して, $\delta'(q_\sigma, v_i^{h_i}) = \text{if } ((\sigma \cup h_i) \cap H \neq H) \text{ then } (q_{\sigma \cup h_i}, d_i) \text{ else } (q_h, d_i)$ (v) $\forall q \in \{q_+, q_h\}, \forall w \in \Sigma^n (w \neq (\$, \dots, \$))$ $\forall i \in \{i \mid (w)_i \neq \$\}$ に対して, $\delta'(q, w) = (q, d_i)$ である. W は $W = \{w \mid w = (r_1 \$, \dots, r_n \$), r_i \in |R_i|\}$ である. <構成終>

このとき, $\mathcal{S}$ の作り方と, W の任意の元の i 要素は $\text{process } i$ の halt stat. に至るある実行系列を示すことになり, $\mathcal{S}$ の定理が成立することになり.

<定理 3> (i) $\mathcal{L}(\mathcal{S}_{q_+}) \cap W = \emptyset \Leftrightarrow S$ は自由である.

(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{S}_{q_h}) \cap W = \emptyset \Leftrightarrow S$ は発散する.

($\mathcal{S}_F$ は $\mathcal{S}$ において F を最終状態の集合としたもの) □

<系> 定理 1 より P は自由性, 発散性問題は可解である. □

証明は略す。 PIS の停止性, デッドロック・フリー性, 相互排他性の可解性は自由性, 完散性の場合と同様の n -NFA を構成することにより, 証明される。

<系> PIS の停止性, デッドロック・フリー性, 相互排他性, 決定問題は可解である。 $\square$

3.2 PIS の同型性, 決定性, 同値性, 決定問題

まず, 補題を 1 つ示す。 PIS S において, $C_e(S) = \{e \mid \exists \rho^*: \text{エルブラン解釈, } e \text{ は } \langle S, \rho^* \rangle \text{ の停止に至るステートメントの実行系列}\}$ と定義する。このとき, 定理 2 より,

<補題> $C_e(S)$ は正規集合である。 $\square$

また, $C_d(S) = \{e \mid \exists \rho^*: \text{エルブラン解釈, } e \text{ は } \langle S, \rho^* \rangle \text{ のデッドロックに至るステートメントの実行系列}\}$ とすると, 定理 2 の簡単な変形から, $C_d(S)$ は正規集合であることがわかる。

$C_e(S)$ と $C_d(S)$ の各元に対して, 元に含まれる $\perp$ の重み以外の記号を空列に置換えた集合をそれぞれ $C'_e(S), C'_d(S)$ とする。

$C'_e(S), C'_d(S)$ はもちろん正規集合である。このとき,

<定理 4> PIS S と S' が同型である。 $\Leftrightarrow$

$$C'_e(S) = C'_e(S') \wedge C'_d(S) = C'_d(S') \quad \square$$

<系> PIS の同型問題は可解である。 $\square$

つぎに, PIS が決定性であるかどうかの問題を考察する。任意のエルブラン解釈 ρ^* に対して, $\forall a \mid \langle S, \rho^*, x \rangle$ が 1 元しか持た

なければ、 S は決定性である。

<構成2> S に対して、2-NFA $\mathcal{S} = (Z, K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ と語の集合 W を以下のように構成する。

(1) $K = \{q_{(s_1, s_2)} \mid s_1, s_2 \in \Sigma^* \cup \{\epsilon\}\} \cup \{q_f, q_d\}$ ($s_i \in \Sigma^* \cup \{\epsilon\}$) (2) $\Sigma = \Sigma \cup \bar{\Sigma} \cup \{\epsilon\}$ (3) $q_0 = q_{(1, 1)}$ (4) $F = \{q_f\}$ (5) δ : (i) $\forall (a_1, a_2) \in \Sigma^2$ ($a_1 = a_2 = \epsilon$ ではない) $\forall q \in \{q_f, q_d\}$ に対して、 $\delta(q, (a_1, a_2)) = (q, (d_1, d_2))$ ($d_i = 1$ if ($a_i = \epsilon$) then 0 else 1) (ii) $\forall a, b \in \Sigma$ ($a \neq b$), $\forall q_{(s_1, s_2)}$ に対して $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (a, a)) \Rightarrow (q_{(1, 1)}, (1, 1))$, $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (a, b)) \Rightarrow (q_f, (1, 1))$, $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (a, \epsilon)) \Rightarrow (q_f, (1, 0))$, $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (\epsilon, a)) \Rightarrow (q_f, (0, 1))$ (iii) $\forall p \in \Sigma^* \cup \bar{\Sigma}$, $\forall q_{(s_1, s_2)}$, $\forall \Delta \in \Sigma$ に対して、 $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (p, \Delta)) \Rightarrow (r, (1, 0))$ ($r = 1$ if ($s_2 \Rightarrow p$) then q_d else $q_{(s_1 \cup p, s_2)}$), $\delta(q_{(s_1, s_2)}, (\Delta, p)) \Rightarrow (r, (0, 1))$ ($r = 1$ if ($s_1 \Rightarrow p$) then q_d else $q_{(s_1, s_2 \cup p)}$), である。 $W = \{w \mid w = (r_1, \epsilon, r_2, \epsilon), r_i \in \mathcal{C}_k(S)\}$ である。 <構成終>

このとき、つぎの定理が成立する。

<定理5> $\mathcal{L}(\mathcal{S}) \cap W = \emptyset \Leftrightarrow S$ は決定性である。 $\square$

<系> $p_k(S)$ の決定性問題は可解である。 $\square$

最後に同値問題を考察する。 $(\Sigma \cup \bar{\Sigma})^* \Rightarrow t$ に対して、 t の述語記号を空列で置換えた列を $\tilde{t}$ と書く。同値の定義より、同値問題は可解であるためには任意の $p_k(S)$ S と S' に対して、以下の問題(A)が可解となることを示されれば十分である。

『 $\forall t \in \mathcal{C}_k(S) \forall \tilde{t} : t \text{ と } \tilde{t} \text{ が矛盾しない} \Rightarrow \exists \Delta \in \mathcal{C}_k(S'), \Delta \text{ は } \tilde{t} \text{ と矛盾せず, } \tilde{t} = \Delta \text{ である} \quad (A)$ 』

$\mathcal{C}_k(S) \Rightarrow t$ は $t = s_0 t_1 s_1 \dots t_n s_n$ ($t_i \in \Sigma, s_i \in (\Sigma \cup \bar{\Sigma})^*$) と書ける。 s_i

K に含まれる述語記号の集合を P_i とする. $\mathcal{P}(S) = \{p_0 f_1 \dots f_n p_n \mid p_0 f_1 \dots f_n p_n \in \mathcal{P}'(S)\}$ とする. $\mathcal{E}(P_i) = \{\eta \mid \eta \in \Sigma^+ \cup \bar{\Sigma}, p_i \leq \eta, p \in \eta \Leftrightarrow \bar{p} \in \eta\}$ とする. $\mathcal{P}'(S) = \{\eta_0 f_1 \dots f_n \eta_n \mid p_0 f_1 \dots f_n p_n \in \mathcal{P}(S), \eta_i \in \mathcal{E}(P_i)\}$ とする. このとき, (A) は『 $\forall x \in \mathcal{P}'(S), \exists y \in \mathcal{P}(S'), y$ は x で定まる解釈に矛盾せず (しかも $\tilde{x} = x$ である)』(B) と同値である.

<構成> 1-NFA $\mathcal{S}' = (1, K', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ を以下のように構成する. $\mathcal{P}(S')$ を受理する 1-NFA を $\mathcal{A}_{S'} = (1, K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする. $\mathcal{P}(S')$ の性質より, $K = K_{\Sigma} \cup K_{\bar{\Sigma}} (q \in K_{\Sigma} \Rightarrow \delta(q, \sigma) = \emptyset (\sigma \in \Sigma^+ \cup \bar{\Sigma}), q \in K_{\bar{\Sigma}} \Rightarrow \delta(q, f) = \emptyset (f \in \Sigma))$ と分割できる. (i) $K' = K$ (ii) $\Sigma' = \Sigma$ (iii) $q'_0 = q_0$ (iv) $F' = F$ (v) $\delta': (i) \forall q \in K_{\Sigma} K$ に対して, $\delta(q, f) \ni q' \Rightarrow \delta'(q, f) \ni q' (ii) \forall q \in K_{\bar{\Sigma}}$ K に対して $\delta(q, \sigma) \ni q' \Rightarrow \forall p \geq \sigma, \delta'(q, p) \ni q'$ <構成終>

このとき, 以下の定理が成立する.

<定理 6> $\mathcal{P}'(S) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{S}_{S'}) \Leftrightarrow (B)$ が成立する. $\square$

<系> P_i の同値問題は可解である. $\square$

謝辞: 日頃, 御指導をいただき、本学福村晃天教授, 三重大大
山口通夫教授に感謝します.

文献: (1) P.B. Hansen : IFIP74 p394 (1974)

(2) P.B. Hansen : C.I.T. Report (1975)

(3) 山下, 稻垣, 本多: 信学技報 AL 78-7 (1978)

(4) 山下, 稻垣, 本多: 信学技報 AL 78-78 (1979)

(5) 伊藤: プログラム理論 コロナ社 (1972)