

ON SATELLITE KNOTS

日本大学 文理学部

茂手木 公彦 (KIMIIHIKO MOTEGI)

河野正晴氏(神戸大学)との共同研究です.

1. 問題と結果

以下, knot は oriented であるとし, 2つの knots K_1, K_2 は S^3 と knots の向きを保つ同相写像が存在するとき $K_1 \cong K_2$ と表わす.

まず, satellite knot の構成 ([S2]) について復習しよう.

V : S^3 内に標準的に埋め込まれた solid torus

K : V 内の knot 但し, V 内の 3-ball には含まれず

更に V の core にもなっていないものとする.

(V と K の組 (V, K) を pattern と呼ぶ.)

$f: V \hookrightarrow S^3$; V から S^3 への向きを保つ埋め込み

pattern (V, K) と $f: V \hookrightarrow S^3$ により, $f(K) \subset S^3$ という新しい knot を得ることが出来る. 特に, $f(V)$ が knotted solid torus になるとき $f(K)$ を satellite

knot と呼ぶ. ここで, $f(K), f(V)$ など は f によって K, V から誘導された向きを持っているとする.

本稿の目的は次の問題に対する解答を与えることである.

問題

$(V, K) : \text{pattern}$

$f: V \hookrightarrow S^3$: $f(V)$ が knotted である向きを保つ埋め込み
が与えられたとき

$g: V \hookrightarrow S^3$: 向きを保つ埋め込み で $g(K) \cong f(K)$
となるものの isotopy 類を 決定せよ.

埋め込み $V \hookrightarrow S^3$ を記述するために, 次を用意しておく.

C_V を V の oriented core とする.

meridian - longitude pair (m_V, l_V) を $[l_V] = [C_V] \in H_1(V)$,
 m_V と C_V の linking 数が 1 となるように定める.

$f(V) (\subset S^3)$ に対しても $f(C_V)$ を $f(V)$ の oriented core
として採用することにより, $f(V)$ の meridian - longitude pair
 $(m_{f(V)}, l_{f(V)})$ が一意に決まる. このとき,

$$[f(l_V)] = [l_{f(V)}] + n [m_{f(V)}] \in H_1(\partial f(V))$$

と表わされる. ここで, 埋め込み f の twist 数を n

で定義し、 $\text{twist}(f) = n$ と表わす。

次の事実は “solid torus 上の同相写像は境界上で一致していれば境界上 constant な isotopy で結べる” ということから直ちにわかる。

命題 1.1.

$f, g : V \hookrightarrow S^3$: 向きを保つ埋め込み に対して次が成り立つ。

$$f \underset{\text{isotopic}}{\cong} g \iff f(C_V) \cong g(C_V) \text{ かつ } \text{twist}(f) = \text{twist}(g)$$

$\text{wrap}_V(k) = k$ と V の meridian disk の幾何的交点数の最小数 $= 1$ のときは、Schubert の unique factorization theorem から次が従う。

定理 1.2. (Schubert [S1])

$(V, k) : \text{pattern } \text{wrap}_V(k) = 1$

$f, g : V \hookrightarrow S^3$: 向きを保つ埋め込み

このとき、 $f(k) \cong g(k) \iff f(C_V) \cong g(C_V)$ が成り立つ。

一斉、 $\text{wrap}_V(k) \geq 2$ のときは次が成り立つ。

定理 1.3.

$(V, K) : \text{pattern wrap}_V(K) \geq 2$

$f : V \hookrightarrow S^3$: 向きを保つ埋め込み ($f(V)$ は knotted)

$g : V \hookrightarrow S^3$ を $g(K) \cong f(K)$ となる向きを保つ埋め込みとする. このとき, $g(C_V) \cong f(C_V)$ か, あるいは $f(C_V) \cong K_0 \# K_1$ (K_0, K_1 は (V, K) と f により一意に決まる) と表わしたとき, $g(C_V) \cong (-K_0) \# K_1$ となる. 更に, いずれの場合も $\text{twist}(g) = \text{twist}(f)$ となる.

この定理の系として次を得る.

系 1.4.

(V, K) 及び $f : V \hookrightarrow S^3$ は定理 1.3 と同様.

f と isotopic でない向きを保つ埋め込み $g : V \hookrightarrow S^3$ で $g(K) \cong f(K)$ となるものは up to isotopy で一意.

特に $[K] \neq 0 \in H_1(V)$ となるような pattern (V, K) に対しては次が成り立つ.

定理 1.5.

(V, K) : pattern $\text{wrap}_V(K) \geq 2$, $[K] \neq 0 \in H_1(V)$

このとき, $f(K) \cong g(K) \Leftrightarrow f \cong g$ が成立する.

2. 定理 1.3 の証明の概略

定理 1.3 を示すのに次の定理を証明すればよい.

定理 2.1.

V を S^3 内の knotted solid torus とし, K を V 内の knot で $\text{wrap}_V(K) \geq 2$ をみたすものとする.

$R: V \hookrightarrow S^3$ を $R(K) = K$ である向きを保つ埋め込みとする. このとき, 次が成り立つ.

$R(C_V) \cong C_V$ か $C_V \cong K_0 \# K_1$ (K_0, K_1 は (V, K) により一意に決まる) と表わしたとき, $R(C_V) \cong (-K_0) \# K_1$ となる. 更に, いずれの場合も $\text{twist}(R) = 0$ となる.

定理 2.1 の証明は次の性質 (*) をみたす solid torus $W \subset V$ が存在するかどうかで 2 つのステップにわかれる.

定義 (性質 (*))

V 中の solid torus W が 性質 (*) をみたす.

$\Leftrightarrow$ (1) $\text{int } W \supset K$

(2) $\text{wrap}_V(C_W) = 1$ かつ C_W は V の core ではない

命題 2.2

[定理 2.1 の仮定] + [性質 (*) をみたす solid torus W が存在しない]

このとき. $R(C_V) \cong \varepsilon C_V$ ($\varepsilon = \pm 1$) かつ $\text{twist}(R) = 0$ となる.

この命題は Jaco-Shalen [J-S], Johansson [Jo] による torus 分解, Seifert fibred 多様体の性質 [J] 及び simple 多様体の mapping class group の有限性 [Jo] などを用いて示される.

次に性質 (*) をみたす solid torus W が存在する場合について考える.

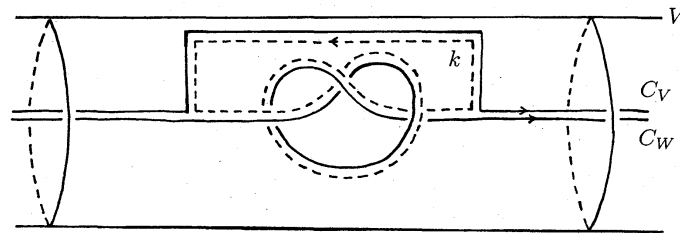
性質 (*) をみたす solid torus W に対し. W 内にはもはや性質 (*) をみたす solid torus が存在しないとき. W を (*)-minimal な solid torus と呼ぶ.

補題 2.3.

V 内に性質(*)をみたす solid torus があるとき.

(*)-minimal な solid torus W が up to isotopy
で一意的に存在する.

(*)-minimal な solid torus を W とする. W の core
 C_W に $[C_W] = [C_V] \in H_1(V)$ となるように向きを与える.
このとき, $C_W \cong C_V \# k$ と表わされる.



補題 2.3 により, 上の分解は (V, K) により一意的に決まる.

ここで, C_V の標準的分解を次のように定義する.

定義 (C_V の標準的分解)

V 内に (*)-minimal な solid torus W が存在しない
ときは, $K_0 \cong C_V$ とおき, C_V の標準的分解を $C_V \cong K_0$
と定める.

V 内に (*)-minimal な solid torus W が存在すると

きは以下のように定める.

まず先のように $C_w \cong C_v \# k$ と分解し. 更に k を $k \cong k_1 \# \cdots \# k_n$ と素分解する. ここで. $k_1, \dots, k_n$ の中の invertible factors 及び $k_i \cong -k_j$ となる組 (k_i, k_j) を全て取り除き(必要なら番号をつけかえて) $k_1 \# \cdots \# k_m$ を得る. ($k_1 \# \cdots \# k_m \cong \text{trivial knot}$ のときもありうる.) 残った $k_1 \# \cdots \# k_m$ に対し. $K_1 \cong -(k_1 \# \cdots \# k_m)$ とおく. もし C_v がある knot K_0 に対し $C_v \cong K_0 \# K_1$ となるならば C_v の標準的分解を $C_v \cong K_0 \# K_1$ で定め. このような分解をもたないときは. $K_0 \cong C_v$ とおく. $C_v \cong K_0$ をその標準的分解と定める.

C_v の標準的分解は定義より (V, K) にのみ依存していることに注意.

W は $(*)$ -minimal な solid torus であつたので. この W に対して命題 2.2 を適用し.

$$\begin{cases} R(C_w) \cong \varepsilon C_w & (\varepsilon = \pm 1) \\ R|_W : W \hookrightarrow S^3 \text{ に対し } \text{twist}(R|_W) = 0 \end{cases}$$

を得る.

補題 2.4.

(1) もし $R(C_v) \cong C_v$ ならば、 C_v の標準的分解

$$C_v \cong K_0 \# K_1 \quad \text{に対し} \quad R(C_v) \cong (-K_0) \# K_1 \quad \text{となる.}$$

(2) $\text{twist}(R) = 0$

証明

$C_w \cong C_v \# k$, $R(C_w) \cong \varepsilon C_w$ であるから、 $R(C_v \# k) \cong \varepsilon (C_v \# k)$ となる。また、 $R(C_v \# k) \cong R(C_v) \# k$ に注意して、結局 $R(C_v) \# k \cong \varepsilon (C_v \# k)$ となる。今、 $\varepsilon = 1$ とすると $R(C_v) \cong C_v$ となるので、 $\varepsilon = -1$ とする。

このとき、 $R(C_v) \# k \cong (-C_v) \# (-k)$ となる。 $k \cong k_1 \# \dots \# k_n$ を k の素分解とする。 $R(C_v) \# k_1 \# \dots \# k_n \cong (-C_v) \# (-k_1) \# \dots \# (-k_n)$ において、 k_ℓ が invertible であれば、

$k_\ell \cong -k_\ell$ を両辺から取り除き (全ての invertible factors について行なう)、次に (k_i, k_j) が $k_i \cong -k_j$ をみたせば、両辺から $k_i \cong -k_j$, $k_j \cong -k_i$ を取り除く (この操作も全ての組に対して行なう)。その結果 (必要なら番号をつけかえて)

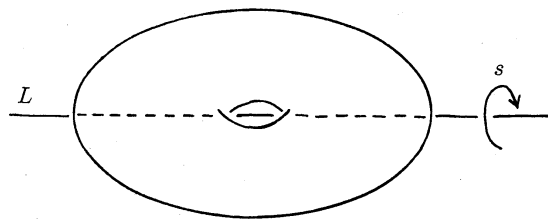
$$R(C_v) \# k_1 \# \dots \# k_m \cong (-C_v) \# (-k_1) \# \dots \# (-k_m)$$

となる。 $K_1 = (-k_1) \# \dots \# (-k_m)$ とおくと、 $R(C_v) \# (-K_1) \cong (-C_v) \# K_1$ となる。 $R(C_v) \# (-K_1)$ の素分解は

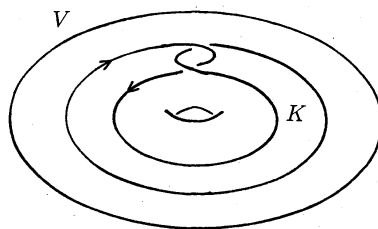
一意的なので $-C_v \cong (-K_1) \# K'$, $\mathcal{K}(C_v) \cong K_1 \# K''$ となり、更に $K' \cong K''$ となる。そこで、 $K_0 = -K' \cong -K''$ とおけば、 $C_v \cong K_0 \# K_1$, $\mathcal{K}(C_v) \cong (-K_0) \# K_1$ となる。これで (1) が示された。(2) は略.)

3. Examples

pattern (V, K) に対し、 V 上の向きを保つ同相写像 $\psi: V \rightarrow V$ で $[\psi(C_v)] = -[C_v] \in H_1(V)$ かつ $\psi(K) = K$ (向きも込めて) となるものが存在するとき、 (V, K) を symmetric な pattern と呼ぶ。また、 $S: V \rightarrow V$ を下図の L に関しての π -rotation とする。



例 下の pattern は symmetric.



例 (V, K) を symmetric な pattern.

$f: V \hookrightarrow S^3$ を $f(C_V)$ が non-invertible (例えば pretzel knot $K(3, 5, 7)$ [T]) となる埋め込みとする.

このとき、2つの埋め込み $f, g = f \circ s$ に対して $f(K) \cong g(K)$ かつ $f(C_V) \not\cong g(C_V)$ となる.

この例は定理 1.3 において K_1 が trivial knot のときに対応している.

例 (V, k) を $\text{wrap}_V(k) = 1$ かつ $k \cong K(3, 5, 7)$ である pattern とする. (k の向きは $[k] = [C_V] \in H_1(V)$ となるように与えておく.) (V, k) において k の代りに k の untwisted double をとることによって得られる pattern を (V, K) とする.

$f: V \hookrightarrow S^3$ を $f(C_V) \cong (-k) \# (-k)$ となる埋め込み.

$g: V \hookrightarrow S^3$ を $g(C_V) \cong k \# (-k)$ となる埋め込み

とする. このとき、2つの埋め込み f, g に対して

$f(K) \cong g(K)$, $f(C_V)$ と $g(C_V)$ は最も弱い意味でも同値ではない ($S^3 - f(C_V)$ と $S^3 - g(C_V)$ は同相ではない).

REFERENCES

- [J] W. Jaco, *Lectures on three manifold topology*, Conference board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. 43. Amer. Math. Soc., 1980.
- [J-S] W. Jaco and P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **220** (1979).
- [Jo] K. Johansson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., Vol. 761. Springer-Verlag, 1979.
- [S1] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math. nat. KI. 1949, 3. Abh., 57–104.
- [S2] H. Schubert, *Knoten und Vollringe*, Acta Math. **90** (1953), 131–286.
- [T] H. F. Trotter, *Non-invertible knots exist*, Topology **2** (1964), 275–280.