

ある積多様体上の
Levi の問題について

九大理 真 次 康 夫

§ 1. 序

S を Stein 多様体, T を 1 次元の複素トーラス, $E = S \times T$, $\pi: E \rightarrow S$ を射影, D を E の部分領域とする。本講演の目的は D が Stein 多様体であるための必要十分条件は, D が Cartan 擬凸であるとともに S の任意の点 x に対して $\pi^{-1}(x) \not\subset D$ が成立することであるという, 講演者が最近えた結果を紹介することにある。 T が任意のコンパクト Riemann 面の場合に同じ命題を予想しているが, まだ証明に完全に成功してはいない。証明にはまず $\mathbb{C}^n$ においては Hörmander [2] の流儀に従って Friedrichs の軟化子や強烈に凸な関数を用いて D 上の多重劣調和関数や強多重劣調和関数を作り, Narasimhan [3] の結果に帰着させる。Stein 多様体の場合には, Docquier - Grauert [1] の埋蔵を用いて $\mathbb{C}^n$ の場合に帰着させる。

§ 2. $\mathbb{C}^n$ における場合

(B, β) を $\mathbb{C}^n$ の上の正則領域とする。 $\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma$ を 1 次元の複素トーラスとする。但し ω_1, ω_2 を $\mathbb{R}$ 上一次独立な二つの複素数とし、これらによって生成される $\mathbb{Z}$ -加群を Γ で表わす：
 $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ 。トーラス Γ はコンパクトな Riemann 面である。また $\mathbb{C}$ から Γ への自然な写像 τ は局所双正則写像である。二つの複素多様体 B, Γ の直積多様体 $B \times \Gamma$ を E で表わし、 E から B への射影を π で表わすことにする。

先づ、次の補題を証明する：

補題 D を E の Cartan 擬凸な開部分集合とする。即ち、 D の任意の境界点 x に対し $D \cap U$ が Stein 多様体となるような、 x の近傍 U が存在する。このとき、 B の任意の点 x に対し、 $\pi(x) \notin D$ が成立すれば、 D は Stein 多様体である。

証明. B の恒等写像 1 と $\mathbb{C}$ から Γ への写像 τ との直積写像を $1 \times \tau$ とする： $(1 \times \tau)(y, z) = (y, \tau(z))$ 。写像 $1 \times \tau$ は $B \times \mathbb{C}$ から E への局所双正則写像である。写像 $1 \times \tau$ による D の逆像 $(1 \times \tau)^{-1}(D)$ を A とおけば、 D が Cartan 擬凸であることから容易にわかるように、 A は Cartan 擬凸である。 A は Γ -不変である。即ち、 Γ の任意の元 γ を固定するとき、 A は $B \times \mathbb{C}$ の変換： $(y, z) \mapsto (y, z + \gamma)$ によって不変。 $B \times \mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1}$ への写像 $\beta \times 1$ の A への制限を α とする： $\alpha = (\beta \times 1)|_A$ 。 (A, α) は $\mathbb{C}^{n+1}$ の

上の Cartan 擬凸な領域である。 $\mathbb{C}^{n+1}$ の上の領域 $B \times \mathbb{C}$ の距離関数 $d(y, z)$ は D 上の関数 $d(y, t)$ を導く。実際、 D の任意の点 (y, t) , $y \in B$, $t \in \mathbb{T}$ に対し、同値類 t の二つの代表元 $z, z' \in \mathbb{C}$ を取るとき $z' = z + \gamma$ なる $\gamma \in \mathbb{P}$ が存在する。ところが A は $\mathbb{P}$ -不変であった。従って $d(y, z') = d(y, z)$ が成立するからである。 A は擬凸だから、Okazaki [4] により関数 $-\log d(y, z)$ は A 上で連続な多重劣調和関数である。したがって、関数 $-\log(y, t)$ は D 上で連続な多重劣調和関数になる。従ってまた、 $1/d(y, t) = e^{-\log d(y, t)}$ も D 上で連続な多重劣調和関数である。

他方、 B は Stein だから、次のような性質をみたす無限回連続微分可能な強多重劣調和関数 $\varphi > 0$ が存在する：任意の実数 $C > 0$ に対し $B_C = \{y \in B; \varphi(y) < C\} \subset B$ 。

D 上の関数 $r(y, t) = \frac{1}{d(y, t)} + \varphi(y)$ は連続な多重劣調和関数である。任意の実数 $C > 0$ に対し

$$D_C = \{(y, t) \in D; r(y, t) < C\} \\ \subset B_C \cap \{(y, t) \in D; d(y, t) > \frac{1}{C}\} \subset D$$

が成立する。

$D = \bigcup_{C>0} D_C$ であるから、 D_C が Stein であることを示せば、 D 自身が Stein である事が知れる。そこで D_C が Stein であることをみることにする。

任意の $y \in B$ に対し

$$A(y) = \{z \in \mathbb{C}; (y, \tau(z)) \in D\}$$

とおく。補題の仮定により、 $A(y) \subsetneq \mathbb{C}$

B 上の可測関数 $a(y)$ を、 B の各点 y に対し、条件

$$a(y) \in \mathbb{C} - A(y)$$

を満たすように取る。

$0 < \varepsilon < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{c}$ なる十分小さな実数 ε に対し、 D_{c+1} 上の関数 $p(y, t)$ を次のように定義する：

$$p(y, t) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\Sigma \in B} \rho\left(\frac{y-\Sigma}{\varepsilon}\right) \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda(\Sigma)}{|z-a(\Sigma)-m_1\omega_1-m_2\omega_2|^2} + \chi(\tau(y))$$

但し、 ρ は Friedrichs の軟化子、 χ は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級単調増加凸関数で、 $\chi' > 0$, $\chi'' > 0$ が大きいものとする。また、 Σ 内の z は t の一つの代表元である。明らかに、和 Σ は一様収束し、代表元 z の選び方によらない。

第一項を $S(y, z)$ とおき、 p の Levi 形式 $L(p)$ を評価する：

$$\begin{aligned} L(p) &= \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \bar{z}} dz d\bar{z} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \bar{y}_j} dz d\bar{y}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{z} \partial y_j} d\bar{z} dy_j \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} dy_j d\bar{y}_k + \chi'(\tau(y)) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \tau}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} dy_j d\bar{y}_k + \chi''(\tau(y)) \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau}{\partial y_j} dy_j \right|^2 \end{aligned}$$

項別微分を行うと

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\Sigma \in B} \rho\left(\frac{y-\Sigma}{\varepsilon}\right) \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda(\Sigma)}{|z-a(\Sigma)-m_1\omega_1-m_2\omega_2|^4} > 0$$

$D_c \subset D_{c+1}$ だから、

$$\exists m_c^2 = \inf_{D_c} \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \bar{z}} > 0$$

φ は強多重劣調和関数であったから定数 $M_c > 0$ が存在して

$$L(\varphi) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} dy_j d\bar{y}_k \geq 4M_c^2 \sum_{j=1}^n |dy_j|^2$$

が成立する。また十分大きな数 $L_c > 0$ を取れば、 D_c 上で

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \bar{y}_j} \right| \leq L_c, \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{z} \partial y_j} \right| \leq L_c, \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \bar{y}_k} \right| \leq L_c \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

が成立する。ゆえに

$$\begin{aligned} L(p) &\geq 3m_c^2 |dz|^2 + 4\chi'(\varphi(y)) M_c^2 \sum_{j=1}^n |dy_j|^2 - 2L_c |dz| \sum_{j=1}^n |dy_j| \\ &\quad - L_c \sum_{j=1}^n |dy_j|^2 \end{aligned}$$

従って、

$$\chi'(\varphi(y)) \geq \max\left(\frac{L_c}{M_c^2}, \frac{L_c^2}{m_c^2 M_c^2}\right) \text{ on } D_c$$

に取っておけば、

$$\begin{aligned} L(p) &\geq m_c^2 |dz|^2 + L_c \sum_{j=1}^n |dy_j|^2 \\ &\quad + 2m_c^2 |dz|^2 + 2 \frac{L_c^2}{m_c^2} \sum_{j=1}^n |dy_j|^2 - 2L_c |dz| \sum_{j=1}^n |dy_j| \\ &\geq m_c^2 |dz|^2 + L_c \sum_{j=1}^n |dy_j|^2 \end{aligned}$$

が成立する。よって、 $p(y, t)$ は D_c で強多重劣調和である。ゆ

えに、Narasimhan [3] により、 D_c は Stein である。(証明終)。

§ 3. Stein 多様体における場合

§ 2 で証明した補題により、次の定理が導かれる：

定理. S を Stein 多様体とする。 E を S と 1 次元トーラス T との直積、 π を E から S への射影とする。 D を E の開部分集合とする。このとき、 D が Stein 多様体であるための必要十

分条件は、 D が Cartan 擬凸であり且つ S の任意の点 x に対し $\pi(x) \notin D$ が成立することである。

証明. 埋蔵定理により, Stein 多様体 S を $\mathbb{C}^n$ の特異点をもたない解析的集合とみることが出来る。Docquier-Grauert [1] により, S に対し正則領域 (B, β) および

$$\rho: B \rightarrow S, \quad \rho|_S = S \text{ の恒等写像}$$

なる正則写像 ρ が存在する。直積 $G = B \times \mathbb{A}^1$ から直積 $E = S \times \mathbb{A}^1$ への正則写像 $\xi = \rho \times 1$ の $S \times \mathbb{A}^1$ への制限は恒等写像である。写像 ξ による D の逆像 $\xi^{-1}(D)$ は補題の条件をみたす G の Cartan 擬凸な開部分集合である。従って, $\xi^{-1}(D)$ は Stein である。 D は $\xi^{-1}(D)$ の特異点をもたない解析的集合になっているから, やはり Stein である。(証明終)

引用文献

- [1] Docquier, F., u. H. Grauert : Levisches Problem und Rungerscher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.
Math. Ann. 140, 94-123(1960).
- [2] Hörmander, L. : An introduction to complex analysis in several variables. D. Van Nostrand, (1966).
- [3] Narasimhan, R. : The Levi problem for complex spaces I,II
Math. Ann. 142, 355-365(1961), 146, 195-201(1962).
- [4] Oka, K. : Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables. IX. Domaines finis sans points critiques intérieur, Japan. J. Math. 23, 97-155(1953).