

Smoothness of rank M scaling functions

京都工芸繊維大学・工学学部 大倉 弘之 (Hiroyuki Ôkura)

Faculty of Engineering and Design

Kyoto Institute of Technology

はじめに

I. Daubechies [1] はコンパクトサポートを持ち、あるモーメント条件を満たすような直交 2 進 wavelet を構成し、そのなめらかさが、対応するモーメント条件の次数 (degree) を上げるによりいくらかでも上がることを示した。直交 M 進 wavelet についても同様のことが成り立ち、それらのなめらかさについて様々な研究が成され (c.f. [1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 16, 18, 19]), 以下で述べる Hölder 指数 α や Sobolev 指数 s_2 などに対する評価が与えられてきている。ところで、なめらかさの評価はコンパクトサポートを持つ wavelet の場合結局は scaling function の評価に帰着する。Heller and Wells [8] は、直交 M 進 scaling function について、一定のモーメント条件の下で比較した場合、reduced symbol (これも後述) が適当な零点を持つときに Sobolev 指数が著しく上がることを数値計算の結果として示している。Sobolev 指数が上がることは、Sobolev の埋込定理 ($s_2 - 1/2 \leq \alpha$) により、Hölder 指数の下限が上がることを意味する。

ここで紹介する米谷, 中岡, 矢ヶ崎との共同研究 [11] では、Sobolev 指数を一般化した s_p 指数を考え、 s_1 の方がより良い Hölder 指数の下限を与える ($s_2 - 1/2 \leq s_1 \leq \alpha$) ことに着目し、[8] で扱われたのと同様の scaling function の族に対して s_1 に対するかなり精密な数値計算結果を与えた。結果として Hölder 指数の下からの評価の改善幅は多くの場合にかなり大きいことがわかり、いくつかの注目すべき結果を得ている。

1 rank M scaling function

1.1 Scaling function $\phi(x)$

自然数 $M \geq 2$ と実数列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ で $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = M$ を満たすものに対して

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(Mx - k), \quad (1.1)$$

が成立するようなゼロでない関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ を scaling function, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を scaling sequence という。また、 $k_0 := \min\{k : a_k \neq 0\}$, $k_1 := \max\{k : a_k \neq 0\}$ と置くとき $L := k_1 - k_0 + 1$ を ϕ の長さ (length) という。長さが有限ならば $\phi(x + \frac{k_0}{M-1})$ を考えることにより $k_0 = 0$, $k_1 = L - 1$ としてよいので、以下では常にこれを仮定する。 ϕ のサポート $\text{Supp}[\phi]$ が compact であることと長さが有限であることは同値であることが知られていて、特に $\text{Supp}[\phi] = [0, \frac{L-1}{M-1}]$ となる。

1.2 指数 $\alpha(\phi)$, $s_p(\phi)$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $\mathcal{C}^n$ を $\mathbb{R}$ 上の n 回連続微分可能な関数全体とし, $\alpha = n + \sigma$ ($0 < \sigma < 1$) のときは

$$\mathcal{C}^\alpha := \{f \in \mathcal{C}^n : \sup_{x \neq y} \frac{|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)|}{|x - y|^\sigma} < \infty\}$$

と置く. 関数 ϕ の Hölder 指数を

$$\alpha(\phi) := \sup\{\alpha \geq 0 : \phi \in \mathcal{C}^\alpha\} \quad (\phi \notin \mathcal{C}^0 \text{ のときは } \alpha(\phi) = 0 \text{ と約束する.})$$

で定める. また, $p > 0$ に対して $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ の s_p 指数を

$$s_p(\phi) := \sup\{s \in \mathbb{R} : \int |\hat{\phi}(\xi)(1 + |\xi|)^s|^p d\xi < \infty\}$$

で定める. 但し, 本報告では (通常とは符号が異なるが) $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を

$$\hat{\phi}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{ix\xi} dx$$

と定める. 特に $p = 2$ のとき $s_2(\phi)$ は Sobolev 指数と呼ばれる. Sobolev の埋込み定理等により $\text{Supp}[\phi]$ がコンパクトな $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\left. s_p(\phi) - \frac{p-1}{p} \right\} \leq s_1(\phi) \leq \alpha(\phi) \leq s_r(\phi) \quad (p \geq 1 \geq p' > 0, r \geq 2) \quad (1.2)$$

特に,

$$s_2(\phi) - \frac{1}{2} \leq s_1(\phi) \leq \alpha(\phi) \leq s_2(\phi) \quad (1.3)$$

が成立する. Daubechies and Lagarias は $M = 2$ で N が小さいときに $\alpha(\phi)$ の精密な評価を行なっている [2]. 一方 [8] では一般の M, N の場合に $s_2(\phi)$ の精密な評価と $M = 2, 3, 4$ の場合に $N \rightarrow \infty$ のときの $s_2(\phi)$ の漸近評価を得ている. 本報告では $s_1(\phi)$ の評価に着目する.

1.3 Symbol $A(\xi)$

以下では有限の長さ L を持つ scaling function ϕ を考える. まず ϕ の symbol と呼ばれる三角級数

$$A(\xi) = \frac{1}{M} \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k e^{ik\xi}$$

を考える. 関係式 (1.1) は

$$\hat{\phi}(\xi) = A(\xi/M) \hat{\phi}(\xi/M)$$

となる. 特に, ϕ は $\hat{\phi}(0)$ の値を定めれば次式で与えられる:

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} A(\xi/M^j). \quad (1.4)$$

ところで $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ における直交系を成すとき $\phi(x)$ は **直交 (orthogonal)** という. このことは以下の 2 条件と同値であることが知られている:

$$\sum_{k=0}^{M-1} |A(\xi + 2\pi k/M)|^2 = 1, \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} 2\pi \text{ を法としてほとんど到るところ } [-\pi, \pi] \text{ と同値であ} \\ \text{り, 原点の近傍を含むコンパクト集合 } F \text{ が存在して} \\ A(\xi) \neq 0 \quad (\xi \in \bigcup_{j=1}^{\infty} M^{-j} F). \end{cases} \quad (C)$$

最後の条件 (C) を **Cohen の条件** という. この条件が満たされていれば (1.4) により, $\hat{\phi}(\xi) \neq 0$ ($\xi \in F$) となる. ここで, F が 2π を法としてほとんど到るところ $[-\pi, \pi]$ と同値であるというのは, $\int_F \eta(\xi) d\xi = \int_{[-\pi, \pi]} \eta(\xi) d\xi$ が任意の 2π 周期をもつ有界可測関数 $\eta(\xi)$ に対して成立することであると言換えることができる.

Cohen の条件は直交性に直接関わるのみならず, 本報告でのなめらかさの評価に於いても本質的な役割を果たす条件である. 後述の定理 2 の証明の概略を参照されたい.

また, (1.5) を満たす scaling function がさらに Cohen の条件を満たす為の十分条件がいくつか知られていて, 最も簡単なものは

$$|Q(\xi)| > 0 \quad (\xi \in [0, \frac{\pi}{M}]) \quad (1.6)$$

であり, 実際この場合は (C) に於いて $F = [-\pi, \pi]$ ととれる. 更に, [2, Corollary 6.3.2] では $M=2$ のとき (1.6) の区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ を $[0, \frac{\pi}{3}]$ に置き換えてよいことが示されている. これらを更に一般化して次のような結果を得ることができる:

命題 1.1 ([11, Proposition 2.1]). 以下の 2 条件を満たすような整数 $m \in [1, \frac{M}{2}]$ と定数 $c \in [\frac{2m\pi}{M(M+1)}, \frac{\pi}{M}]$ がとれれば $Q(\xi)$ は Cohen の条件を満たす:

- (1) $|Q(\xi)| > 0 \quad (\xi \in [0, c]).$
- (2) $\sum_{k=-m}^{m-1} |Q(\xi + \frac{2\pi k}{M})| > 0 \quad (\xi \in (c, \frac{\pi}{M}]).$

ところで, (1.5) が成立するとき,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists k \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \text{ s.t. } Q(\xi + 2\pi k/M) \neq 0 \quad (1.7)$$

だから, 命題 1.1 で M が偶数のときは $m = M/2$ ととれば (2) の条件は自動的に満たされる. 従って, $c = \pi/(M+1)$ ととることができるので, 命題の上に述べた $M=2$ のときの結果は M が偶数の場合に拡張される. その場合は, (1.6) の区間 $[0, \frac{\pi}{M}]$ を $[0, \frac{\pi}{M+1}]$ に置き換えればよい. $Q(\xi)$ の零点と Cohen の条件との関係は一般には複雑である. 命題 1.1 の証明と, もう少し色々な場合の例と考察が [11] にあるので, 興味のある方は参照されたい.

1.4 Degree, vanishing moments

次に Daubechies [2] における vanishing moment の条件を symbol に対する条件で与える. ϕ の degree が N であるとは自然数 N と三角多項式 $Q(\xi)$ に対して

$$A(\xi) = H(\xi)^N Q(\xi), \quad \text{但し,}$$

$$H(\xi) := \frac{1 + e^{i\xi} + \dots + e^{i(M-1)\xi}}{M} = \frac{1 - e^{iM\xi}}{M(1 - e^{i\xi})},$$

という因数分解が可能であることとする. このとき以下が成り立つ:

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0) \left(2e^{i\xi/2} \frac{\sin \xi/2}{\xi} \right)^N \Phi(\xi), \quad \Phi(\xi) := \prod_{j=1}^{\infty} Q(\xi/M^j). \quad (1.8)$$

もし $Q(2\pi k/M) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, M-1$) ならば $Q(\xi)$ は更に $H(\xi)$ を因数に持つことになる. 特に, N がこれ以上大きく出来ないとき N を ϕ の maximal degree, そのときの $Q(\xi)$ を ϕ の reduced symbol と呼ぶことにする. 従って, このときは $Q(\xi)$ は $H(\xi)$ を因数に持たないので次が成立している:

$$\exists k \in \{1, 2, \dots, M-1\}, \quad \text{s.t.} \quad Q(2\pi k/M) \neq 0. \quad (1.9)$$

ところで ϕ の degree が N であることは以下のモーメント条件と同値であることが知られている:

$$\int x^n \psi^s(x) dx = 0 \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, N-1 \\ s = 1, 2, \dots, M-1 \end{array} \right) \quad (\text{vanishing moments}).$$

但し, ここで $\psi^s(x)$ ($s = 1, 2, \dots, M-1$) は $\phi(x)$ から構成される wavelet であり, 適当に選んだ実数列 $\{a_k^s\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (wavelet sequence と呼ばれ, 有限個を除いては 0 となる) を用いて

$$\psi^s(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^s \phi(Mx - k)$$

と表される. 本報告では wavelet そのものには立ち入らないので, 詳しいことは [6, 7, 14, 15] 等を参照されたい (尚, いくつかの例のグラフが後で登場する).

1.5 $R(\xi) = |Q(\xi)|^2$ の公式

以下 $R(\xi) = |Q(\xi)|^2$ と置く. ϕ の degree が N , 長さが L のとき $|A(\xi)|^2 = |H(\xi)|^{2N} R(\xi)$ は $\cos \xi$ の $L-1$ 次多項式であることがわかる. また $|H(\xi)|^2$ は $\cos \xi$ の $M-1$ 次多項式である. 特に, $R(\xi)$ は以下で定まる多項式 $r(x)$ により, $R(\xi) = r(\cos \xi)$ で与えられる

ことが知られている [7] :

$$r(x) = r_N(x) + \tilde{r}(x) \geq 0 \quad (x \in [-1, 1]), \quad (1.10a)$$

$$r_N(x) := \sum_{n=0}^{N-1} c_n (1-x)^n, \quad (1.10b)$$

$$\tilde{r}(x) := (1-x)^N \sum_{\substack{1 \leq n \leq L_0 \\ n \notin M\mathbb{Z}}} \tilde{c}_n \gamma_n(x) \quad (L_0 \geq 0, L_0 \notin M\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tilde{c}_n \in \mathbb{R}). \quad (1.10c)$$

ここで $\gamma_n(x)$ は Tchebysheff の多項式 ($\gamma_n(\cos \xi) = \cos n\xi$) であり, $\{\tilde{c}_n\}$ は (1.10a), (1.10c) 及び (C) を満たす限り任意にとれ, c_n は M の偶奇に応じて以下の公式で与えられる:

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{\frac{M}{2}}=n} \left\{ \prod_{m=1}^{\frac{M}{2}-1} \binom{2N+k_m-1}{2N-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{M}\right)^{-k_m} \right\} \binom{N+k_{M/2}-1}{N-1} (1 - \cos \pi)^{-k_{M/2}}$$

又は

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{\frac{M-1}{2}}=n} \left\{ \prod_{m=1}^{\frac{M-1}{2}} \binom{2N+k_m-1}{2N-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{M}\right)^{-k_m} \right\}$$

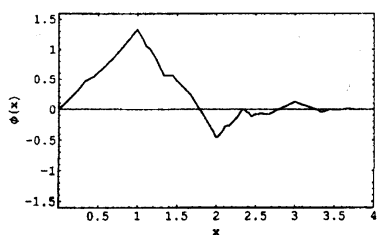
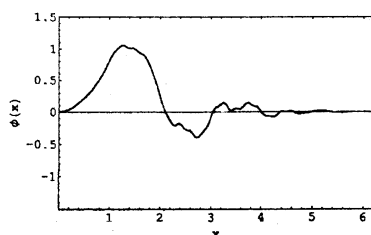
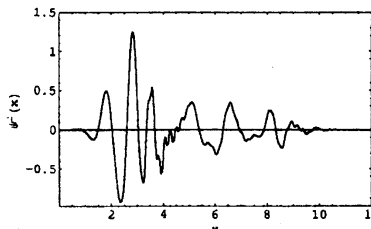
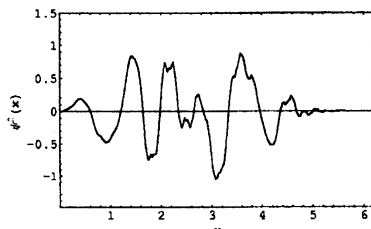
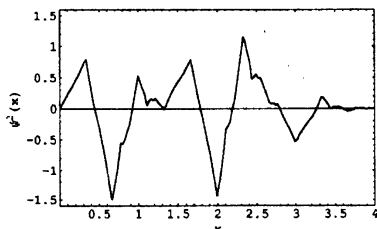
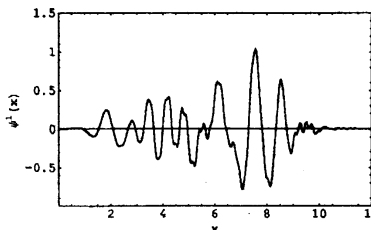
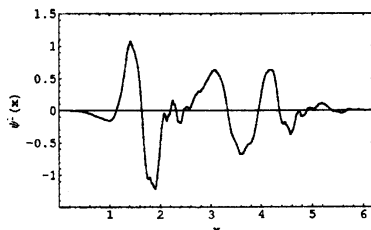
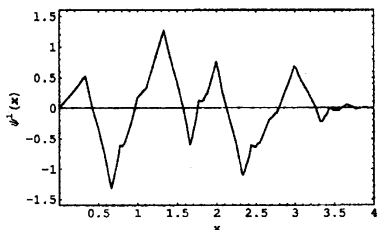
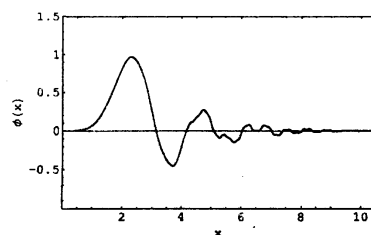
以上より $\tilde{r}(x) \equiv 0$ と $\tilde{r}(x) \neq 0$ のいずれの場合であるかに応じて長さ L が MN 又は $MN + L_0 + 1$ となることがわかる. 前者の場合, ϕ は **minimal length** を持つという.

以下 maximal degree が N , 長さが L の直交 scaling function を $\phi_{M,N,L}$ と表わし, 特に minimal length のときは簡単に $\phi_{M,N}$ と表わすことにする. この記号は次のようなあいまいさを持っている. 例えば minimal length の場合, M, N より $L = MN$ が定まり, 上の公式により $R(\xi)$ はただ一通りに定まり, $Q(\xi)$ は $R(\xi) \geq 0$ の **スペクトル因子分解** により $|Q(\xi)|^2 = R(\xi)$ を満たす三角多項式として得られる. この因子分解は一定の自由度をもっているので, $A(\xi) = H(\xi)^N Q(\xi)$ に対応する $\phi(x)$ も一通りではない. 更に, minimal length でないときはさらに $R(\xi)$ 自身が $\tilde{c}_n$ の取り方の自由度を持っている. 結局, これらは (1.10) を満たす $r(x)$ から構成されるので, 今後は, そのような自由度を容認した上で $r(x)$ から定まる scaling function と呼ぶことがある.

2 3進 scaling function と wavelet の例

以下の図は上から順に rank $M = 3$ の minimal length の scaling function $\phi = \phi_{3,N}$ と対応する wavelet ψ^1, ψ^2 で, 左から順に degree が $N = 3, 5, 10$ となっている. 長さはそれぞれ $L = 9, 15, 30$ である.

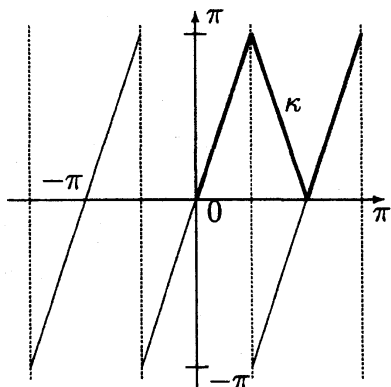
Degree N が大きくなるに従って滑らかになっているように見えている.

$M = 3, N = 3, L = 9$  $M = 3, N = 5, L = 15$  $M = 3, N = 10, L = 30$ 

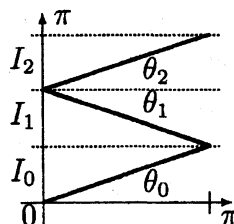
3 s_p 指数の評価

3.1 1次元写像 (力学系) κ

1次元写像 $\xi \mapsto M\xi \pmod{2\pi} : [-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ は周期 2π を持つ関数 $f(\xi)$ に対して写像 $f(\xi) \mapsto f(M\xi \pmod{2\pi}) = f(M\xi)$ を誘導する. 更に, f が偶関数のときは f を区間 $[0, \pi]$ 上の関数とみなすことができ, 上の写像は次に示す左側の図の太線で表わされるグラフを持つ1次元写像 $\kappa : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ により誘導される. また次の右側に示すようにこの κ の逆写像の各枝を θ_k と表わす.



$$\theta_k := (\kappa|_{I_k})^{-1}, \quad I_k := \left[\frac{k\pi}{M}, \frac{(k+1)\pi}{M} \right] \\ (k = 0, 1, \dots, M-1)$$



3.2 Transfer operator T_q

以下 $q(\xi) := |Q(\xi)|^p$ と置く. $q(\xi)$ は minimal length の場合など零点を持たなければ滑らかな関数だが, 零点を持つ場合も有限個であり, Hölder 連続関数になっている.

2つの作用素

$$U_q(f)(\xi) := q(\xi)f(\kappa(\xi)), \quad T_q(f)(\xi) := \sum_{k=0}^{M-1} q(\theta_k(\xi))f(\theta_k(\xi)) \quad (3.1)$$

は次の意味の duality を持つ:

$$\int_0^\pi T_q(f)g \, d\xi = M \int_0^\pi fU_q(g) \, d\xi.$$

区間 $[0, \pi]$ 上の連続関数全体で sup ノルム $\|\cdot\|$ を考えた Banach 空間 $C([0, \pi])$ に cone

$$K := \{f \in C([0, \pi]) : f \geq 0\}, \quad K^0 := \{f \in K : f > 0\}$$

を考える. T_q は q に関する transfer operator 又は Perron-Frobenius operator と呼ばれ, $T_q(K) \subset K$ の意味で正值作用素である.

$$\rho(T_q) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_q^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_q^n(1)\|^{1/n}$$

は T_q のスペクトル半径を与える. 次の基本定理で, この $\rho(T_q)$ が Perron-Frobenius の理論に於ける正の固有値であり, 対応する正の固有関数が存在することなどが示される:

定理 1. $q > 0$ とする. $f \in K^0$ をとり, $f_n := T_q^n(f)$, $g_n := f_n/\|f_n\|$ ($n \geq 1$) とおく.

(1) $\exists! g \in K$ s.t. $\|g\| = 1$, $\exists \lambda > 0$, $T_q(g) = \lambda g$. 実際は, $g \in K^0$, $\lambda = \rho(T_q)$ である.

(2) g_n は g に一様収束する.

(3) $\min_{[0, \pi]} (f_{n+1}/f_n) \nearrow \rho(T_q)$ かつ $\max_{[0, \pi]} (f_{n+1}/f_n) \searrow \rho(T_q)$.

ここで, (1.7) により $f \in K^0$ のとき常に $T_q(f) \in K^0$ となることに注意しておく. この定理の証明は [11] で与えられている. 証明のポイントは (a) $\{g_n\}$ のコンパクト性, (b) T_q の positivity improving property ($f \in K \setminus \{0\} \implies \exists n \in \mathbb{N}, T_q^n(f) \in K^0$) の2点である. q に零点があると2点共に難しくなるが, 最近の筆者の研究によりほぼ解決されたところである. ほぼというのは, (b) の成立の為に q の零点の位置についてある条件が必要なのだが, 実際にはそれは Cohen の条件の下では自動的に成立すると予想している. 但し, 本報告の次節以降の具体的な数値計算等で扱っている場合は全てその条件が満たされている (minimal length の場合は零点が無く, 命題 5.1–5.3 の場合は零点がただ一つでその位置が制限されている) ので問題が無い. 従って, 以下の諸定理の中の条件 $q > 0$ は少なくとも非常に弱い条件に置き換えることができる. いずれも 1次元力学系の理論からのアイデアを必要とし, κ , θ_i と $q(\xi)$ の具体的な性質が用いられる. ここでは, (a) についてのみ考え方の概略を示すことにする. 詳細と (b) については別の機会に譲る.

(a) を示すのに、**本質的スペクトル半径** $\rho_e(T_q)$ という概念 (c.f. [12]) が重要な役割を果たす。これは、 T_q から任意のコンパクト作用素を引き去ったもののスペクトル半径の下限として定義される。特に、 $\rho_e(T_q) < \rho(T_q)$ のときは、 T_q は **quasi-compact** と呼ばれ、粗くいえば引き去った方のコンパクト作用素の方が主要部であり、スペクトル半径 $\rho(T_q)$ に関しては実質的に T_q をコンパクト作用素と思って良いということである。そしてその為の十分条件が [9] に与えられている。

命題 3.1 ([9, Corollaire 1]). Banach 空間 $(B, \|\cdot\|)$ 上の有界作用素 T のスペクトル半径を $\rho(T)$ とし、 B 上に別のノルム $|\cdot|$ と正数列 $\{r_n\}$, $\{R_n\}$ があって以下の 2 条件を満足するとき T は *quasi-compact* であり、 $\rho_e(T) \leq \liminf_n r_n$ となる：

(1) $T : (B, \|\cdot\|) \rightarrow (B, |\cdot|)$ がコンパクト作用素。

(2) $\liminf_n (r_n)^{1/n} < \rho(T)$ かつ $\|T^n f\| \leq r_n \|f\| + R_n |f|$ ($f \in B$)。

以下はこれを適用する道筋を概観する。区間 $[0, \pi]$ 上の確率測度全体を $\mathcal{P}$ と表す。これは測度の弱位相に関してコンパクトな凸集合を成すので、Schauder-Tikhonov の定理により $\mathcal{P}$ 上の変換 $\nu \mapsto \frac{T_q^* \nu}{\int T_q(1) d\nu}$ (ここで、 $T_q^* \nu$ は $\int f d(T_q^* \nu) = \int T_q(f) d\nu$ で定まる測度) は不動点 ν を持つ。このとき、 $T_q^* \nu = (\int T_q(1) d\nu) \nu$ だから $C([0, \pi])$ の dual space 上の作用素 T_q^* が正の固有値 $\alpha := \int T_q(1) d\nu$ と正の固有関数 ν を持ち、 $\rho(T_q^*) = \alpha$ であることがわかる。duality により $\rho(T_q) = \alpha$ となっている。ここで、いくつかのノルムを導入する。 $q(\xi)$ はある σ ($0 < \sigma \leq 1$) に対して σ -Hölder 連続であるとしてよい。この σ をとって

$$\begin{aligned} [f]_\sigma &:= \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\sigma}, \\ \|f\|_1 &:= \int_{[0, \pi]} |f| d\nu, & (f \in C([0, \pi])) \\ \|f\| &:= [f]_\sigma + \|f\|_1 \end{aligned}$$

と置く。容易にわかるように、上のノルム $\|\cdot\|$ は $[\cdot]_\sigma + \|\cdot\|_1$ と同値である。上の命題に於ける B は $\{f \in C([0, \pi]) : [f]_\sigma < \infty\}$ ととり、 $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ としてはそれぞれこの $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ をとることにすれば、命題 3.1 (1) が成立することは明らかであろう。更に、命題 3.1 (2) の不等式を確かめることができるのである。その場合、数列 $\{r_n\}$ が $r_n = Cs^n$ (C は正定数、 s は $\rho(T_q)/M^\sigma < s < \rho(T_q)$ を満たす任意の数) の形にとれることがわかる。すなわち、この場合 $\liminf (r_n)^{1/n} = s$ となる。

3.3 指数 $s_p(\phi)$ の評価

$\phi = \phi_{M,N,L}$ を直交 M 進 scaling function で maximal degree が N 、長さ L のものとし、その reduced symbol を $Q(\xi)$ と表す。また、 $p > 0$ に対して、 $q(\xi) := |Q(\xi)|^p$ と置く。

$f \in K^0$ に対して

$$\mu(f) := \inf_{[0, \pi]} \frac{T_q(f)}{f}, \quad \lambda(f) := \sup_{[0, \pi]} \frac{T_q(f)}{f}$$

という記号を導入する.

$$\text{定理 2.} \quad N - \frac{1}{p} \log_M \rho(T_q) \leq s_p(\phi) \leq N - \frac{1}{p} \log_M \sup\{\mu(f) : f \in K^0\}. \quad (3.2)$$

証明の概略はすぐ後で示すが, この定理の上からの評価を示すところで Cohen の条件 (C) が本質的に用いられてることに注意しておこう.

定理 3. $q > 0$ ならば

$$s_p(\phi) = N - \frac{1}{p} \log_M \rho(T_q). \quad (3.3)$$

この等式は $p = 2$ の場合に [8] で示されていたものである. このときは $R = |Q|^2$ が $\cos \xi$ の多項式であり, 対応する transfer operator T_R が $\cos k\xi$ の張る有限次元空間を不変にすることが分かり, その上 $\rho(T_R)$ の値が T_R をその不変部分空間に制限したものに対する値と一致することが分かる. 従って, Sobolev 指数 $s_2(\phi)$ の計算は有限次行列の固有値の計算に帰着する. 一般の p の場合は [11] で示されたが, $q > 0$ の条件は弱められ, 定理 1 の $\mu(g) = \rho(T_q)$ なる $g \in K^0$ の存在さえ示されれば (3.2) から (3.3) が導かれる.

定理 2 の証明の概略. $R = \ell\pi$ ($\ell \in \mathbb{N}$) をあらかじめ大きくとって $F \subset [-R, R]$ としておく. ただし, F は Cohen の条件 (C) のものである. 以下で, 次の 2 種類の積分を用いる:

$$I_k := \int_{|\xi| \leq M^k R} h(\xi) \left(\prod_{j=1}^k q(\xi/M^j) \right) |\Phi(\xi/M^k)| d\xi = M^k \int_{|\xi| \leq R} h(M^k \xi) \left(\prod_{j=0}^{k-1} q(M^j \xi) \right) |\Phi(\xi)| d\xi$$

$$J_k := M^k \int_{-\pi}^{\pi} h(M^k \xi) \prod_{j=0}^{k-1} q(M^j \xi) d\xi = 2M^k \int_0^{\pi} U_q^k(h) d\xi.$$

J_k の被積分関数 ($\eta(\xi)$ と書く) は 2π 周期的であるので

$$\ell \max_{|\xi| \leq R} |\Phi(\xi)| J_k \geq I_k \geq \min_{\xi \in F} |\Phi(\xi)| M^k \int_F \eta(\xi) d\xi = \min_{\xi \in F} |\Phi(\xi)| J_k$$

Cohen の条件より $\min_{\xi \in F} |\Phi(\xi)| > 0$ だから $I_k \asymp J_k$ ($k \rightarrow \infty$). よって, $h(\xi) := |2 \sin \xi/2|^N$ と置けば, $s < N$ のとき,

$$\begin{aligned} \int |\xi|^s |\hat{\phi}(\xi)| d\xi &= \int |\xi|^{s-N} h(\xi) |\Phi(\xi)| d\xi < \infty \iff \sum_{k \in \mathbb{N}} M^{(s-N)k} (I_k - I_{k-1}) < \infty \\ &\iff \sum_{k \in \mathbb{N}} M^{(s-N)k} I_k < \infty \quad (\text{ここは部分和分の公式を使っている}) \\ &\iff \sum_{k \in \mathbb{N}} M^{(s-N)k} J_k < \infty, \end{aligned}$$

一方, duality を用いて

$$\begin{aligned} J_k &= 2 \int_0^{\pi} T_q^k(1) h d\xi \leq 2 \|T_q^k(1)\| \int_0^{\pi} h d\xi, & \therefore \limsup_{k \rightarrow \infty} J_k^{1/k} &\leq \rho(T_q), \\ J_k &\geq \frac{2}{\|f\|} \int_0^{\pi} T_q^k(f) h d\xi \geq \mu(f)^k \frac{2}{\|f\|} \int_0^{\pi} f h d\xi, & \therefore \liminf_{k \rightarrow \infty} J_k^{1/k} &\geq \mu(f). \end{aligned}$$

定理の証明は, 以上の考察とは別に Cohen の条件の下では $\mu(f) \geq 1$ なる $f \in K^0$ が存在することがわかるので, そのことと合わせて完結する. 詳細は [11] を参照されたい. $\square$

3.4 逐次近似法と数値計算

任意の $f \in K^0$ (例えば $f = 1$) をとって $f_n := T_q^n(f)$ ($n \in \mathbb{N}$) と置けば単調収束数列 $\mu(f_n) \nearrow, \lambda(f_n) \searrow$ を得るが, これらがそれぞれ $\rho(T_q)$ の下からと上からの評価を与えると共に $\rho(T_q)$ に収束することが保証されている.

実際に, 数値計算を行なう場合, $\mu(f_n), \lambda(f_n)$ の計算に於いて関数の区間 $[0, \pi]$ 上での最大値, 最小値を求める必要があり更に近似が必要である. その為に階段関数による近似を行う. S_m ($m \in \mathbb{N}$) を区間 $[0, \pi]$ を m 等分した小区間上で本質的に定数となる階段関数の全体からなる $L^\infty([0, \pi])$ の部分空間とする (小区間の端点に於ける値は無視する). $q^\pm \in S_{M^2m}$ を $q^- \nearrow q$ かつ $q^+ \searrow q$ ($m \rightarrow \infty$) なる階段関数列とする. $T_{q^\pm} : S_{Mm} \rightarrow S_{Mm}$ が式 (3.1) と同様に定義できるが, これらは本質的に Mm 次元空間上の正值作用素でその行列表示は例えば $M = 3, m = 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} q_1 & & & q_{18} & q_{19} \\ q_2 & & & q_{17} & q_{20} \\ q_3 & & & q_{16} & q_{21} \\ & q_4 & & q_{15} & q_{22} \\ & q_5 & & q_{14} & q_{23} \\ & q_6 & & q_{13} & q_{24} \\ & & q_7 & q_{12} & q_{25} \\ & & q_8 & q_{11} & q_{26} \\ & & q_9 & q_{10} & q_{27} \end{pmatrix}$$

の形をしている. これに古典的な Perron-Frobenius Theory が適用できる. 適当な関数 $f \in S_{Mm}$ ($\text{ess inf } f > 0$) (実際には $f = 1$ ととることが多い) に対して $f_n^\pm := T_{q^\pm}^n(f)$ と置き, m が十分大きいとすると $\text{ess inf } f_n^\pm > 0$ となり

$$\mu_n^- := \text{ess inf}(f_{n+1}^-/f_n^-) \quad \lambda_n^+ := \text{ess sup}(f_{n+1}^+/f_n^+) \quad (n \in \mathbb{N})$$

が定義される.

定理 4. μ_n^- は m, n について単調増加, λ_n^+ は m, n について単調減少であり,

$$N - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \log_M \lambda_n^+ \leq s_1(\phi) \leq N - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \log_M \mu_n^-$$

が成立する. 特に $q > 0$ なら上式の不等号は共に等号となる.

以下の全ての数値計算は定理 4 の評価により行った. $p = 2$ の場合と違って本質的に無限次元的な作用素の計算なので小数点以下 3 ~ 4 桁までを決定する近似計算にはコンピュータのメモリと時間を相当費やす必要があった.

4 $s_1(\phi_{M,N})$ に対する数値結果 (minimal length の場合)

$\alpha(\phi)$ の評価式としては (1.3) の

$$s_2(\phi) - 1/2 \leq s_1(\phi) \leq \alpha(\phi) \leq s_2(\phi)$$

が与える 2 つの下限 $s_2(\phi) - 1/2$, $s_1(\phi)$ と上限 $s_2(\phi)$ を一覧表に示す.

表 1: $M = 2$, $N = 1, \dots, 13$, $L = 2N$ の場合

$M = 2$ (minimal length)					
N	L	$s_2(\phi_{2,N}) - \frac{1}{2}$	$s_1(\phi_{2,N})$	$\alpha(\phi_{2,N})$	$s_2(\phi_{2,N})$
1	2	0	0	0	0.5000
2	4	0.5000	0.521	0.5500	1.0000
3	6	0.9150	0.980	1.0878	1.4150
4	8	1.2756	1.392	1.6179	1.7756
5	10	1.5968	1.768		2.0968
6	12	1.8884	2.117		2.3884
7	14	2.1587	2.442		2.6587
8	16	2.4147	2.747		2.9147
9	18	2.6617	3.036		3.1617
10	20	2.9027	3.310		3.4027
11	22	3.1398	3.572		3.6398
12	24	3.3740	3.826		3.8740
13	26	3.6060	4.072		4.1060

ここで, $\alpha(\phi_{2,N})$ に対する数値は Daubechies-Lagarias による (c.f. [2]). これによる結果 $\phi_{2,3} \in C^1$ を我々の s_1 指数に対する評価 $s_1(\phi_{2,3}) \doteq 0.980$ から導くことはできないものの

$$\phi_{2,6} \in C^2, \phi_{2,8} \notin C^3, \phi_{2,9} \in C^3, \phi_{2,12} \notin C^4, \phi_{2,13} \in C^4$$

などが新たにわかる.

表 2: $M = 3$, $N = 1, \dots, 13, 77, 78$, $L = 3N$ の場合

$M = 3$ (minimal length)				
N	L	$s_2(\phi_{3,N}) - 1/2$	$s_1(\phi_{3,N})$	$s_2(\phi_{3,N})$
1	3	0	0	0.5000
2	6	0.4087	0.443	0.9087
3	9	0.6599	0.779	1.1599
4	12	0.7950	1.031	1.2950
5	15	0.8665	1.211	1.3665
6	18	0.9133	1.331	1.4133
7	21	0.9499	1.410	1.4499
8	24	0.9809	1.462	1.4809
9	27	1.0081	1.499	1.5081
10	30	1.0323	1.528	1.5323
11	33	1.0542	1.552	1.5542
12	36	1.0741	1.573	1.5741
13	39	1.0925	1.592	1.5925
77	231	1.4999	1.999	1.9999
78	234	1.5016	2.002	2.0016

これから

$$\phi_{3,4} \in C^1, \phi_{3,77} \notin C^2, \phi_{3,78} \in C^2$$

などがわかる. 3進の場合は2進と比べて degree の増加に対する Hölder 指数の増加の仕方が極めて遅いことが分かる. また多くの場合に, s_1 指数による Hölder 指数の下からの評価は Sobolev 指数によるそれよりも大幅に改善されたものになることもわかる.

5 $s_1(\phi_{M,N,L})$ に対する数値結果 (minimal length でない場合)

$r(x)$ を $|Q(\xi)|^2 = r(\cos \xi)$ なる x の多項式とする. $r(x)$ が区間 $[-1, 1]$ に零点 $\cos \xi$ を持つ場合を考えると同程度の長さを持つ minimal length の場合と比べて滑らかさが著しく改善される場合があることは Sobolev 指数について [8] で指摘されていたことである. ここではそのことを s_1 指数についても確かめることができる.

まずそのような scaling function の存在について注意しながら3つのタイプに分けて紹介する.

5.1 $M = 2, L = 2N + 4, r(\cos \xi) = r'(\cos \xi) = 0$ のタイプ

命題 5.1. $M = 2, N \geq 1$ とする. $\forall \xi_1 \in (3\pi/5, \pi)$ に対して, $L_0 = 3$ に対する (1.10) 及び $r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$ を満たす唯一の多項式 $r(x)$ が存在し, これから定まる scaling function $\phi_{2,N,2N+4}(x)$ は直交である.

以下の数値計算では $\xi_1 = 2\pi/3, 3\pi/4, 4\pi/5, 5\pi/6$ の場合を扱う. なお, 上の命題の $3\pi/5$ は critical な数値であって, $\xi_1 = 3\pi/5$ のときも唯一の $r(x)$ が定まるのだが, それから定まる scaling 関数の直交性が $N = 1$ の場合のみ崩れる.

表 3: $M = 2, N = 1, \dots, 13, L = 2N + 4, r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$ の場合

$s_1(\phi_{2,N,2N+4})$ with $r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$					
N	L	$\xi_1 = 2\pi/3$	$\xi_1 = 3\pi/4$	$\xi_1 = 4\pi/5$	$\xi_1 = 5\pi/6$
1	6	-0.057	0.342	0.488	0.579
2	8	0.482	0.981	1.153	1.257
3	10	0.990	1.556	1.736	1.837
4	12	1.468	2.073	2.240	2.326
5	14	1.923	2.540	2.669	2.728
6	16	2.358	2.961	3.030	3.055
7	18	2.778	3.342	3.343	3.332
8	20	3.186	3.690	3.623	3.584
9	22	3.584	4.011	3.886	3.824
10	24	3.975	4.310	4.136	4.058
11	26	4.358	4.592	4.379	4.290
12	28	4.735	4.859	4.616	4.520
13	30	5.107	5.114	4.850	4.748

これから, 例えば

$$\xi_1 = \frac{5\pi}{6} \text{ 又は } \frac{4\pi}{5} \text{ ならば } \phi_{2,6,16} \in \mathcal{C}^3;$$

$$\xi_1 = \frac{3\pi}{4} \text{ ならば } \phi_{2,9,22} \in \mathcal{C}^4;$$

$$\xi_1 = \frac{3\pi}{4} \text{ 又は } \frac{2\pi}{3} \text{ ならば } \phi_{2,13,30} \in \mathcal{C}^5$$

などがわかる.

5.2 $M = 3$, $L = 3N + 2$, $r(\cos \pi) = 0$ のタイプ

命題 5.2. $M = 3$, $N \geq 1$ とする. $L_0 = 1$ に対する (1.10) 及び $r(\cos \pi) = 0$ を満たす唯一の多項式 $r(x)$ が存在し, これから定まる *scaling function* $\phi_{3,N,3N+2}(x)$ は直交である.

数値結果は次の小節の表の左側に示す. 特に, 目立った結果としては

$$\phi_{3,3,11} \in \mathcal{C}^1, \phi_{3,6,20} \in \mathcal{C}^2, \phi_{3,9,29} \in \mathcal{C}^3, \phi_{3,13,41} \in \mathcal{C}^4$$

などが見られる.

5.3 $M = 3$, $L = 3N + 3$, $r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$ のタイプ

命題 5.3. $M = 3$, $N \geq 1$ とする. $\forall \xi_1 \in [\pi/2, \pi]$ に対して, $L_0 = 2$ に対する (1.10) 及び $r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$ を満たす唯一の多項式 $r(x)$ が存在し, $\xi_1 = 2\pi/3$ の場合を除いて, これから定まる *scaling function* $\phi_{3,N,3N+3}(x)$ は直交である.

$\xi_1 = 2\pi/3$ の場合は $r(x) = r_{N+1}(x)$ であり, これから定まる *scaling function* は minimal length の $\phi_{3,N+1}(x)$ であることがわかる.

$$M = 3, N = 1, \dots, 13 \quad \text{かつ}$$

$$\begin{cases} \text{(左側)} L = 3N + 2, r(\cos \pi) = 0 \\ \text{(右側)} L = 3N + 3, r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0 \end{cases} \quad \text{の場合}$$

$s_1(\phi_{3,N,3N+2})$ with $r(\cos \xi) = 0$			$s_1(\phi_{3,N,3N+3})$ with $r(\cos \xi_1) = r'(\cos \xi_1) = 0$				
N	L	$\xi = \pi$	L	$\xi_1 = \frac{\pi}{2}$	$\xi_1 = \frac{3\pi}{4}$	$\xi_1 = \frac{5\pi}{6}$	$\xi_1 = \pi$
1	5	0.176	6	-0.095	0.463	0.416	0.351
2	8	0.708	9	0.125	0.996	1.014	0.925
3	11	1.158	12	0.262	1.399	1.529	1.416
4	14	1.550	15	0.350	1.702	1.983	1.847
5	17	1.903	18	0.409	1.912	2.380	2.236
6	20	2.227	21	0.451	2.041	2.686	2.595
7	23	2.530	24	0.482	2.115	2.864	2.933
8	26	2.817	27	0.508	2.161	2.959	3.257
9	29	3.089	30	0.529	2.193	3.016	3.570
10	32	3.348	33	0.548	2.219	3.053	3.874
11	35	3.596	36	0.566	2.241	3.081	4.171
12	38	3.832	39	0.581	2.260	3.103	4.460
13	41	4.057	42	0.596	2.278	3.122	4.743

この表の右側での目立った結果は

$$\begin{aligned}\xi_1 = \frac{5\pi}{6} \text{ ならば } \phi_{3,2,9} &\in \mathcal{C}^1; \\ \xi_1 = \frac{5\pi}{6} \text{ 又は } \pi \text{ ならば } \phi_{3,5,18} &\in \mathcal{C}^2; \\ \xi_1 = \pi \text{ ならば } \phi_{3,8,27} &\in \mathcal{C}^3, \phi_{3,11,36} \in \mathcal{C}^4\end{aligned}$$

などである.

尚, $s_1(\phi) < 0$ となっている例が見られるが, これは Fourier 変換 $\hat{\phi}$ が $L^1(\mathbb{R})$ に属していないことを意味する. 一方, 本報告では $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ の場合を考えているので $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ だから, 常に $s_2(\phi) \geq 0$ となっている.

謝辞

1次元力学系の理論について盛田健彦氏(現在広島大学)より色々教えていただいた. 謝意を表したい.

参考文献

- [1] I. Daubechies: Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988), 909–996.
- [2] I. Daubechies: *Ten Lectures on wavelets*, CBMS Conference Series 61, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [3] I. Daubechies and J. C. Lagarias: Two-scaling difference equations I, Existence and global regularity of solutions, *SIAM J. Math. Anal.*, **22**, (1991), 1388–1410.
- [4] I. Daubechies and J. C. Lagarias: Two-scaling difference equations II, Local regularity, infinite products and fractals, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, (1992), 1031–1079.
- [5] T. Eirola: Sobolev characterization of solutions of dilation equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, (1992), 1015–1030.
- [6] R. A. Gopinath and C. S. Burrus: Wavelets and filter banks, In *Wavelets—A Tutorial in Theory and Applications*, edited C. K. Chui, Academic Press, 1992, 603–654. (Technical Report CML TR91-20, Comp. Math. Lab., Rice Univ., 1991.)
- [7] P. N. Heller: Rank M wavelet matrices with N vanishing moments, *SIAM J. Matrix Anal.*, **16**, (1995), 502–518.
- [8] P. N. Heller and R. O. Wells, Jr: Sobolev regularity for rank M wavelets, Technical Report 96–08, Comp. Math. Lab., Rice Univ., 1996.
- [9] H. Hennion: Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993), 627–634.
- [10] K. Hirata: Construction of rank M wavelets and its application, Master thesis, Kyoto Institute of Thechnology, 1999.
- [11] F. Maitani, A. Nakaoka, H. Ôkura, & T. Yagasaki: Smoothness of rank M scaling functions, *Appl. Comput. Harm. Anal.*, **13** (2002), 116–137., [http://dx.doi.org/10.1016/S1063-5203\(02\)00502-X](http://dx.doi.org/10.1016/S1063-5203(02)00502-X)
- [12] R. D. Nussbaum: The radius of essential spectrum, *Duke Math. J.* **37** (1970), 473–478.
- [13] H. Ojanen: Orthonormal compactly supported wavelets with optimal Sobolev regularity: Numerical results, *Appl. Comput. Harm. Anal.*, **10** (2001), 93–98.,

- [14] 大倉弘之: 直交 M 進 wavelet のなめらかさについて, 統計数理研究所共同研究レポート 128 「逆問題とその周辺 (6)」, (2000), 57–72.
- [15] P. Steffen, P. N. Heller, R. A. Gopinath, and C. S. Burrus: Theory of regular M -band wavelet bases, IEEE Trans. Signal Process. **41** (1993), 3497–3511.
- [16] Q. Sun: Sobolev exponent estimate and asymptotic regularity of the M -band Daubechies' scaling functions, Constr. Approx., **15** (1999), 441–465.
- [17] P. P. Vaidyanathan: *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [18] L. F. Villemoes: Energy moments in time and frequency for two-scaling difference equation solutions and wavelets, SIAM J. Math. Anal., **23**, (1992), 1519–1543.
- [19] H. Volkmer: Asymptotic regularity of compactly supported wavelets, SIAM J. Math. Anal., **26**, (1995), 1075–1087.