

コンパクト群による接合積における

部分群と部分環の対応について

大阪教育大 長田 まりゑ

有限なフォン・ノイマン環 M と M 上の作用が自由な可算個の自己同型写像 α_i による離散的な群 G に対して、 M の G による接合積 $M \rtimes G$ と M で表わします。 M を含む G の M の全てのフォン・ノイマン部分環と、 G の全ての部分群との対応について、今までに知られている結果としましては、[3], [4] 及び [8] があります。 [8] では、II₁-型ファクター M に対して、この対応が与えられています。 [3] では、 M は可換なフォン・ノイマン環で、 G に対して G の $\mathbb{Z}$ 部分群 $[G]$ を考え、 $[G]$ の全ての $\mathbb{Z}$ 部分群と、 G の M を含む全てのフォン・ノイマン部分環の対応が与えられています。 [4] は [3] の結果と一般に有限なフォン・ノイマン環 M に対して、拡張したものです。

ここでは必ずしも有限とは限らないフォン・ノイマン環 M と M の自己同型写像 α_i による可換なコンパクト群 G に対して、 M を含む G の M のフォン・ノイマン部分環と G の閉部分群との

対応について、考えてみたいと思います。

§ 1. 正規な期待値と 離散な群による接合積

$\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間、 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ のフォン・ノイマン環とし、 G を $\mathcal{M}$ の自己同型写像のなす局所コンパクトな群とします。 $\mathcal{H}$ の値をとる G 上の連続函数で、コンパクトな台をもつもの全体のなすベクトル空間 $\mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$ に

$$(\xi, \eta) = \int_G (\xi(g), \eta(g)) dg, \quad \xi, \eta \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$$

によって内積を定義します。ただし dg は G 上の左不変なハール測度です。この内積に関して、 $\mathcal{K}(\mathcal{H}, G)$ を完備化したものを $L^2(\mathcal{H}, G)$ で表わします。

ヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{H}, G)$ 上への $\mathcal{M}$ の表現 π と、 G のユニタリ表現 λ を

$$(\pi(a)\xi)(g) = g^{-1}(a)\xi(g), \quad a \in \mathcal{M}, \quad g \in G,$$

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad g \in G, \quad \xi \in L^2(\mathcal{H}, G)$$

によって与えます。

π は正規な表現で、 π と λ は

$$Ad \lambda(g)(\pi(a)) = \lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^* = \pi(g(a)), \quad (a \in \mathcal{M}, g \in G)$$

なる関係と充します。

$L^2(\mathcal{H}, G)$ 上の $\pi(\mathcal{M})$ と $\lambda(G)$ によって生成されるフォン・ノイマン環を、 $\mathcal{M}$ の G による接合積とよび (I ♯), $G \rtimes \mathcal{M}$ で表わします。

特に G が離散な群の場合には、 G から $\pi(\mathcal{M})$ への忠実正規な期待値 e で、全ての $g \in G (g \neq 1)$ に対して、 $e(\lambda(g)) = 0$ を満たすものが存在する事がよく知られていますが、この逆も成立します。すなわち

(1.1) $\mathcal{M}$ をフォン・ノイマン環 $\mathcal{A}$ のフォン・ノイマン部分環とし、 G を $\mathcal{M}$ の自己同型写像 u の離散な群とする。 u を G の $\mathcal{A}$ 中へのユニタリ表現とし、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{M}$ と $u(G)$ によって生成されているとする。もし $\mathcal{A}$ から $\mathcal{M}$ への忠実正規な期待値 e で、 $e(u(g)) = 0$ を全ての $g \in G (g \neq 1)$ に対して満たすものが存在するならば、 $\mathcal{A}$ は G から $\mathcal{M}$ と同型で、その同型写像 σ は

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x \in \mathcal{M}), \quad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g \in G)$$

と充す。

(証明) $\mathcal{M}$ への忠実正規な state φ に対して、 $\varphi = \varphi \circ e$ とおくと、 φ は $\mathcal{A}$ への忠実で正規な state となる。 φ による $\mathcal{A}$ の表現空間上で $\mathcal{A}$ を考える事によって、 $\mathcal{A}$ に対する cyclic な ℓ_2 の元 ξ で

$$(u(g)\xi, \xi) = 0 \quad (\forall g \in G, g \neq 1, \quad \forall \xi \in \mathcal{M})$$

を満たすものが存在する と仮定してもよい。

$\mathcal{M}\xi$ の生成するヒルベルト空間を ℓ_2 と表わすと、 ξ の性質によって、 ℓ_2 は直和空間 $\sum_{g \in G} u(g)\xi$ と表わされる。

そこで ℓ_2 から $\ell^2(\ell_2, G)$ への写像 ω を

$$\omega\left(\sum_{g \in G} u(g) \xi(g)\right) = \sum_{g \in G} \varepsilon(g) \otimes \xi(g), \quad (\xi(g) \in \mathcal{H}_0)$$

(ただし, $\varepsilon(g)$ は g の特性函数)

で、定義する。 $\mathcal{A}$ の元 x に対して、 $\sigma(x) = \omega x \omega^*$ とおくと、
 σ は $\mathcal{A}$ から $G \rtimes \mathcal{U}$ の $\mathcal{E}$ への同型写像で、

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x \in \mathcal{U}), \quad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g \in G)$$

を充している。

群 G がコンパクトなとき、(1.1)での $\mathcal{A}$ と $G \rtimes \mathcal{U}$ が同型になるための十分条件は [5] で、求められています。

次に G が局所コンパクト可換群とします。 G の共役群 $\hat{G}$ の $L^2(\mathcal{H}_0, G)$ へのユニタリ表現 μ を

$$\mu(p) \xi(g) = \overline{\langle g, p \rangle} \xi(g), \quad \xi \in L^2(\mathcal{H}_0, G), \quad g \in G, \quad p \in \hat{G}$$

(ただし, $\langle g, p \rangle$ は p の g での値)

を与えると、次の2つの関係が成立します。

$$\mu(p) \pi(a) \mu(p)^* = \pi(a), \quad a \in \mathcal{U}, \quad p \in \hat{G},$$

$$\mu(p) \lambda(g) \mu(p)^* = \overline{\langle g, p \rangle} \lambda(g), \quad p \in \hat{G}, \quad g \in G.$$

従って、

$$p(x) = \mu(p) x \mu(p)^*, \quad p \in \hat{G}, \quad x \in G \rtimes \mathcal{U},$$

とおいて、 $\hat{G}$ を $G \rtimes \mathcal{U}$ の自己同型写像の可換群とみなすことができます。同様にして、 $\mathcal{A}(G \rtimes \mathcal{U})'$ の自己同型写像の可換群とも考えることに致します。

(1.2). $\mathcal{M}$ をフォン・ノイマン環, G を $\mathcal{M}$ の自己同型写像
 のなすコンパクトな可換群とし, G は才 = 可算公理を満たす
 ものとすると, $\pi(\mathcal{M})'$ は $(G \rtimes \mathcal{M})'$ の $\hat{G}$ による接合積
 $\hat{G} \rtimes (G \rtimes \mathcal{M})'$ と同型である.

(証明) [9] の双対定理によって,

$$\pi(\mathcal{M}) = (G \rtimes \mathcal{M}) \cap \mu(\hat{G})'$$

が成り立つから, $\pi(\mathcal{M})'$ は $(G \rtimes \mathcal{M})'$ と $\mu(\hat{G})$ によって生成さ
 れている. $d\hat{g}$ を, 群 $\hat{G}$ の正規化されたハール測度とし,
 $\pi(\mathcal{M})'$ の元 x に対して,

$$e(x) = \int_{\hat{G}} \lambda(g)x\lambda(g)^* d\hat{g}$$

とおく. e は $\pi(\mathcal{M})'$ から $(G \rtimes \mathcal{M})'$ の $\mathbb{C}$ への忠実正規化
 期待値と下って, $e(\mu(p)) = 0$ を全ての $p \in \hat{G}$ ($p \neq 1$) に対し
 て, 充す. 従って, (1.1) によって, $\pi(\mathcal{M})'$ は $\hat{G} \rtimes (G \rtimes \mathcal{M})'$
 と同型である.

§. 2. 部分群と部分環の対応

$\mathcal{M}$ を II₁-型ファクター, G を $\mathcal{M}$ の外部自己同型写像のなす
 離散群とすると, $\pi(\mathcal{M})$ を含む G の $\mathcal{M}$ の全てのフォン・ノイマン
 部分環 $\mathcal{N}$ と, G の全ての部分群 K とは,

$$\mathcal{N} = (\lambda(K) \cup \pi(\mathcal{M}))'', \quad K = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$$

という形で, 1対1に対応する = とが [8] によって, 知ら

れています。

ファクター $\mathcal{M}$ が有限であるという条件を除くと、この結果は次のような形になります。

(2.1) $\mathcal{M}$ をファクターとし、 G を $\mathcal{M}$ の作用が自由な自己同型写像の下で離散な可換群とする。 $\mathcal{M}$ を含む G の $\mathcal{M}$ のフォン・ノイマン部分環で、 G の $\mathcal{M}$ からの忠実な正規な期待値の値域である $\mathcal{N}$ と、 G の部分群 K との間に 1 対 1 の対応が付き、
部分環 $\mathcal{N}$ に対応する群は

$$K(\mathcal{N}) = \{ g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N} \}$$

となり、部分群 K に対応する部分環は、

$$\mathcal{N}(K) = (\pi(\mathcal{M}) \vee \lambda(K))''$$

となる。

(証明) $\mathcal{N}$ を条件を満たす G の $\mathcal{M}$ のフォン・ノイマン部分環とする。 $e_{\mathcal{N}}, e_{\mathcal{M}}$ をそれぞれ G の $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}, \pi(\mathcal{M})$ の上への忠実な正規な期待値とすると、全ての $g, h \in G$ と全ての $a \in \pi(\mathcal{M})$ に対し、

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h))a &= e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))h(a)\lambda(h)) \\ &= e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(gh(a)\lambda(g))\lambda(h)) = gh(a)e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h)) \end{aligned}$$

が成り立つ。仮定により、 G の元 g の作用が自由であるから、

$gh \neq 1$ ならば $e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h)) = 0$ である。又、

$gh = 1$ ならば、 $\mathcal{M}$ がファクターであることから、 $e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h))$ はスカラーとなるから $e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))$ は全ての $g \in G$ に対して、

$\lambda(g)$ のスカラー一倍と可成っている。従って $\lambda(g) \in \mathcal{N}$ ならば、

$e_{\mathcal{N}}(\lambda(g)) = 0$ である。 $\mathcal{N}$ の元は $\sum_{g \in G} \lambda(g) \chi(g)$ と展開される事より、 $K(\mathcal{N}) = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$ とおくと、 $\mathcal{N}$ は $\lambda(K(\mathcal{N}))$ と $\pi(\mathcal{M})$ によって生成されていることがわかる。

逆に、 G の部分群 K に対して、 $\mathcal{N}(K) = (\lambda(K) \cup \pi(\mathcal{M}))'$ とおく。 $K^0 = \{p \in \hat{G}; \langle g, p \rangle = 1, \forall g \in K\}$ とおき、 d_p は K^0 の正規化されたハール測度とする。 G の $\mathcal{M}$ の元 x に対して、

$$e(x) = \int_{K^0} \mu(p) x \mu(p)^* dp$$

とおくと、 e は G の $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}(K)$ の $\mathcal{E}$ への忠実正規な期待値となる。 $g \in G$ が、 $\lambda(g) \in \mathcal{N}$ を充たすならば、 $\mathcal{E}$ の部分の証明と同様にして、 $e_{\mathcal{M}}(\lambda(g) \lambda(k)) = 0$ が全ての $k \neq g$ なる $k \in K$ に対して成り立ち、更に $g = k$ である $k \in K$ に対して成り立つ。従って元の群 K は $K = \{g \in G; \lambda(g) \in \mathcal{N}(K)\}$ を充たしている。

次に群 G がコンパクト可換群のときを考えると、部分群と部分環の対応は次のようになります。

(2.2) $\mathcal{M}$ をフォン・ノイマン環、 G を $\mathcal{M}$ の自己同型写像の可換コンパクト可換群とし、 σ = 可算公理をみたすものとする。 もし、 G の $\mathcal{M}$ が、ファクターで、 G の作用が G の $\mathcal{M}$ 上で、自由だとすると、 G の閉部分群 K と、 G の $\mathcal{M}$ の $\pi(\mathcal{M})$ を含むフォン・ノイマン部分環 $\mathcal{N}$ で、 $\mathcal{N}'$ が $\pi(\mathcal{M})'$ からの忠実正規な

期待値の値域となつてゐるものとの間に、1対1の対応がつき、部分群 K に対応する部分環は

$$\Lambda(K) = (\pi(\mathcal{U}) \cup \lambda(K))''$$

となり、部分環 Λ に対応する部分群は

$$K(\Lambda) = \{g \in G; \lambda(g) \in \Lambda\}$$

となる。

(証明) Λ を条件をみたす G の $\mathcal{U}$ のファイバーノイマン部分環とすると、(1.2) によつて、 Λ' は、 $\hat{G}$ の $(G \rtimes \mathcal{U})'$ の $\pi((G \rtimes \mathcal{U})')$ を含むファイバーノイマン部分環と同型になつてゐる。 Λ' に対して、 $F = \{p \in \hat{G}; \mu(p) \in \Lambda'\}$ とおくと、(2.1) によつて、 Λ' は $\mu(F)$ と $(G \rtimes \mathcal{U})'$ によつて生成されてゐる。 Λ に対して、 $K(\Lambda) = \{g \in G; \lambda(g) \in \Lambda\}$ とおくと、

$$K(\Lambda) = F^\circ = \{g \in G; \langle g, p \rangle = 1, \forall p \in F\}$$

をみたす。従つて、

$$\Lambda' = (\mu(F) \cup (G \rtimes \mathcal{U})')'' = \lambda(K(\Lambda))' \cap \pi(\mathcal{U})'$$

となり、 $\Lambda = (\lambda(K(\Lambda)) \cup \pi(\mathcal{U}))''$ が得られる。

逆に、 K を G の部分群とすると、 $\Lambda(K)$ を $\lambda(K)$ と $\pi(\mathcal{U})$ によつて生成されたファイバーノイマン環とする。 $\hat{G}$ の元 p に対して、 $p \in K^\circ$ なることと、 $\mu(p) \in \Lambda(K)'$ なることとは同値であり、 $\mu(p) \in \Lambda(K)'$ なることと、 $p \in K(\Lambda(K))^\circ$ なることとは同値である。従つて、元 g の群 K は、 $K = \{g \in G; \lambda(g) \in \Lambda(K)\}$

をみたしている。

極く最近, [2] の定理 4.1 において, M をファクター, G を局所コンパクトな可換群としたとき, $\pi(M)$ を含む G の M のフォン・ノイマン部分環 N で, $p(N) = N$ を全ての $p \in \hat{G}$ に対してみたすものと, G の閉部分群 $\hat{H}$ の間に, 1対1の対応が付き, その対応のもとで

$$N(\hat{H}) = G \rtimes M \cap \mu(\hat{H})', \quad \hat{H}(N) = \mu(\hat{G}) \cap N'$$

となつてゐる事が示されています。

従つて, (2.2) の N に対する条件; $p(N) = N$ ($\forall p \in \hat{G}$) と, (2.2) における N に対する条件; N' は $\pi(M)'$ の忠実正規な期待値の値域である, とは同値な条件であることがわかります。

—— 参考文献 ——

- [1] M. Choda; Normal expectations and crossed products of von Neumann algebras, proc. Japan Acad., 50 (1974), 738-742.
- [2] A. Connes and M. Takesaki; The flow of weights on factors of type III, preprint.
- [3] H. A. Dye; On groups of measure preserving

transformations II, Amer. J. Math., 85 (1963),
551 - 576.

- [4] Y. Haga and Z. Takeda ; Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972),
781 - 789.
- [5] Y. Haga ; Crossed product of von Neumann algebras by compact groups, preprint.
- [6] R. R. Kalman ; A generalization of free action, Duke Math. J., 36 (1969), 781 - 789.
- [7] M. B. Landstad ; Duality theory for covariant systems, preprint.
- [8] M. Nakamura and Z. Takeda ; On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 489 - 492.
- [9] M. Takesaki ; Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type II, Acta Math., 131 (1973), 249 - 310.
- [10] G. Zeller - Meier ; Produits croisés d'une C^* -algebre par un groupe d'automorphismes, J. de Math. Pures et Appliquées, 47 (1968), 101 - 239.