

Eisenstein series of low weight

近畿大理工 長岡昇勇 (Shoju Nagaoaka)

W. Kohnen は "Class numbers, Jacobi forms and Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $Sp_2(\mathbb{Z})$ " において Siegel-Eisenstein series $\lim_{s \rightarrow 0} E_2^{(n)}(Z, s)$ の Fourier 展開を, Jacobi modular 群の Eisenstein 級数を調べることにより与えた. 講演では, この論文の結果の別証明を, Shimura の一般化した超幾何関数に対する理論と G. Kohnhold の古典的公式により比較的容易に得られることを示した.

H_n を n 次 n Siegel 上半空間, $Sp_n(\mathbb{R})$ を n 次元 symplectic 群とする. $Sp_n(\mathbb{R})$ は良く知られている様に H_n 上に一般化した n 次一次分数変換により作用する. $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ を n 次 Siegel modular 群とし, その部分群 $\Gamma_{n,\infty}$ を $\Gamma_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C = 0_n \right\}$ で定義する. 我々は n 次 n のタイプ n の Eisenstein 級数を考える.

$$E_k^{(n)}(Z, s) = \det(Y)^s \sum_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{n, \infty} \setminus \Gamma_n} \det(CZ + D)^{-k} |\det(CZ + D)|^{-2s}$$

ここで $k \in \mathbb{Z}$, $(Z, s) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{C}$. この級数は $\operatorname{Re}(s) > \frac{n-k+1}{2}$ の条件のもとで絶対収束し, ところで正則関数となる.

G. Shimura は論文 "On Eisenstein series" の中で このタイプの Eisenstein 級数 ($SU(n, n)$ の場合も含めて) に対して, 次の問題を考えた.

- (A) $E_k^{(n)}(Z, s)$ は s の関数として $s=0$ で holomorphic か?
- (B) もしそうなら $E_k^{(n)}(Z, 0)$ は Z について holomorphic か?
- (C) もしもそうなら $E_k^{(n)}(Z, 0)$ は, cyclotomic な Fourier 係数をもつか?

上記論文においてこれらの問題に対する答えと, 興味深い結果が述べられているが我々も以下に考える $n=2$ の場合には, $k \geq 2$ であれば (A) の答えが affirmative であることが証明されている. Kohnen はこの結果をふまえ, 前記論文において, $E_2^{(2)}(Z, 0)$ の Fourier 展開の式を与えた. 彼は Jacobi 形式の理論を使ったが, ここで Shimura's hypergeometric functions の理論を使っても導かれることを示そう. そのためにいくつかの定義を与える.

$\operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$ を n 次実対称行列のなす $\mathbb{R}$ vector 空間, $\operatorname{Pos}_n(\mathbb{R})$ を n 次正定値実対称行列のなすその部分集合とする.

$Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$, $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\zeta^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = \int_{\text{Sym}_n(\mathbb{R})} e^{-\text{tr}(TV)} \det(V+iY)^{-\alpha} \det(V-iY)^{-\beta} dV,$$

$$\eta^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = \int_{V \pm T > 0} e^{-\text{tr}(YV)} \det(V+T)^{\alpha-K} \det(V-T)^{\beta-K} dV$$

とおく. $\int dV$ は $\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 上の Euclidean measure,

$K = K(n) = \frac{n+1}{2}$. 上の積分は $\text{Re}(\alpha+\beta) > 2K-1$ で絶対収束し.

下の積分は $\text{Re}(\alpha+\beta) > K-1$, $\text{Re}(\beta) > 2K-1$ で絶対収束し次の等式が成立する:

$$\zeta^{(n)}(Y, T; \alpha, \beta) = i^{n\beta-n\alpha} 2^{n(1-K)} (2\pi)^{nK} \Gamma_n(\alpha)^{-1} \Gamma_n(\beta)^{-1} \eta^{(n)}(2Y, \pi T; \alpha, \beta)$$

$\zeta^{(n)}$ の解析接続や解析的性質は, Shimura "Confluent hypergeometric functions on tube domains" で論じられている.

$\mathcal{YR}$ は Siegel 級数について説明する. Λ_n は $n \times n$ 半整対称行列の可逆集合を表すものとする. $(s, T) \in \mathbb{C} \times \Lambda_n$ に対して,

$$\alpha^{(n)}(s, T) = \sum_{\substack{R \in \text{Sym}_n(\mathbb{Q}) \\ R \bmod \text{Sym}_n(\mathbb{Z})}} \nu(R)^{-s} e(\text{tr}(TR))$$

なる特異級数を考える. ここで $\nu(R)$ は, $R = C^{-1}D$, $\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ と表示し, $\nu(R) = |\det C|$ と定義されたものとする. 知られている様にこの級数は $\text{Re}(s) > n+1$ で収束し, $\mathcal{YR}$ の

表示をもつ:

$$\alpha^{(n)}(s, T) = \prod_{p: \text{prime}} \alpha_p^{(n)}(s, T), \quad \alpha_p^{(n)}(s, T) = \sum_{R_p} \nu(R_p)^{-s} e(\text{tr}(TR_p)),$$

$z = z$ $\nu(R_p)$ は P の中、級数 $\alpha_p^{(n)}$ を Shimura "On Eisenstein series" にある様、Siegel 級数と呼ぶことができる。

定理 1. $E_k^{(n)}(Z, s)$ は、 $\mathcal{N}$ の形の Fourier 展開をもつ。

$$E_k^{(n)}(Z, s) = \det(Y)^s \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{T \in \Lambda_j} \sum_{Q \in \tilde{U}_{n \times j}} \xi^{(j)}(Y[T], T; k+s, s) \cdot \alpha^{(j)}(k+2s, T) e(\text{tr}(X[T]T)) \right\}.$$

$z = z$ $\tilde{U}_{n \times j} = \{Q \in M_{n \times j}(\mathbb{Z}) \mid (Q^*) \in GL_n(\mathbb{Z})\}$ z , $\tilde{U}_{n \times j}$ は $\mathcal{N}$ の同値関係による代表系: $Q_1 \sim Q_2 \iff \exists U \in GL_j(\mathbb{Z})$ s.t. $Q_2 = Q_1 U$. z から $Y[T] = {}^t Q Y Q$, $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$.

我々はこの定理を $E_2^{(2)}(Z, s)$ にあてはめる。すると、 $\mathcal{N}$ の様表示をもつことがわかる。

$$E_2^{(2)}(Z, s) = A_0(Y, s) + A_{1,1}(Z, s) + A_{2,1}(Z, s) + A_{2,2}(Z, s)$$

$$A_0(Y, s) = \det(Y)^s + \det(Y)^s \sum_{Q \in \tilde{U}_{2 \times 1}} \xi^{(1)}(Y[Q], 0; s+2, s) \alpha^{(1)}(2s+2, 0) \\ + \det(Y)^s \xi^{(2)}(Y, O_2; s+2, s) \alpha^{(2)}(2s+2, O_2).$$

$$A_{1,1}(Z, s) = \det(Y)^s \sum_{0 \neq t \in \mathbb{Z}} \sum_{Q \in \tilde{U}_{2 \times 1}} \xi^{(1)}(Y[Q], t; s+2, s) \alpha^{(1)}(2s+2, t) \\ \cdot e(X[Q]t).$$

$$A_{2,j}(Z, S) = \det(Y)^S \sum_{T \in \Lambda_2^{(j)}} \zeta^{(2)}(Y, T; s+2, S) \alpha^{(2)}(2s+2, T) e(\operatorname{tr}(XT))$$

ここで $j=1, 2$ として $\Lambda_2^{(j)}$ は Λ_2 の s として rank $\leq j$ なるものを集めておいたもの.

命題 1.

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_0(Y, S) = 1 - \frac{18}{\pi^2 \sqrt{\det(Y)}} \left(\frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{1}{2} \log \frac{v'}{4\pi} - \log |\eta(w_Y)|^2 \right).$$

命題の記号の説明: まず γ は Euler 定数. v' は

$Y = \begin{pmatrix} v & y \\ y & v' \end{pmatrix} \in \operatorname{Pos}_2(\mathbb{R})$ で, w_Y は, この Y について

$$w_Y = \frac{y + i\sqrt{\det(Y)}}{v'} \in \mathbb{H}_1$$

で定義したものの $\eta(s)$ は Dedekind eta 関数.

証明は, $\zeta^{(2)}, \alpha^{(2)}$ の $T = O_j$ での公式と, Y に対応する Epstein zeta 関数についての Kronecker limit formula を使う.

命題 2.

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_{1,1}(Z, S) = 288 \sum_{0 \leq T \in \Lambda_2^{(1)}} \left(\sum_{d | \operatorname{cont}(T)} d H\left(\frac{|\operatorname{disc}(T)|}{d^2}\right) \right) e(\operatorname{tr}(TZ)).$$

記号の説明: $\operatorname{cont}(T)$ は $T = \begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix}$ ($m, n, r \in \mathbb{Z}$) と表わしたとき $\operatorname{cont}(T) = \gcd(m, r, n)$. また $\operatorname{disc}(T)$ は,

$\operatorname{disc}(T) = r^2 - 4mn$ なる整数 (ここで $T \in \Lambda_2^{(1)}$ ならば $\operatorname{disc}(T) = 0$)

$H(\Delta)$ は判別式 $-\Delta$ の二次形式に対応する Kronecker-

Hurwitz class number を表わす (詳しくは Eichler-Zagier の "The theory of Jacobi forms" の Cohen の論文を参照).

$$z = z_0 \text{ は } H(0) = -\frac{1}{12}.$$

命題 3.

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_{2,1}(Z, s) = -\frac{\eta_2}{\pi^3} \sum_{T \in \Lambda_2^{(1)}} \frac{1}{2} \eta^{(2)}(2Y, \pi T; 2, 0) \sigma_0(\text{cont}(T)) e(\text{tr}(TX)).$$

記号の説明: $\eta^{(2)}(\dots)$ は前に定義した関数 (を解析接続したものの), $\sigma_0(\cdot)$ は $\sigma_s(x) = \sum_{0 < d|x} d^s$ と定義される divisor 関数.

命題 4.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} A_{2,2}(Z, s) &= 288 \sum_{0 < T \in \Lambda_2} \left(\sum_{d|\text{cont}(T)} d H\left(\frac{|\text{disc}(T)|}{d^2}\right) \right) e(\text{tr}(TZ)) \\ &\quad - \frac{\eta_2}{\pi^3} \sum_{0 \neq \text{disc}(T) = \square} \eta^{(2)}(2Y, \pi T; 2, 0) \sigma_0(\text{cont}(T)) e(\text{tr}(TX)) \end{aligned}$$

この命題の証明は, Kaufhold の古典的論文 "Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulformen 2. Grades" と与えられている $\alpha^{(2)}(s, T)$ の具体的公式と, 超幾何関数 $\xi^{(2)}$ の解析的性質 (Schimura より調べられている) を組合せることに得られる.

以上の命題を合わせて次の主定理を得る.

定理 2. $E_2^{(2)}(Z, s)$ は $s=0$ で finite. $E_2^{(2)}(Z, 0)$ は $\mathcal{R}$ の Fourier 展開をもつ:

$$\begin{aligned}
 E_2^{(2)}(Z, 0) = & 1 - \frac{18}{\pi^2 \sqrt{\det(Y)}} \left(\frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{1}{2} \log \frac{v'}{4\pi} - \log |\eta(w_Y)|^2 \right) \\
 & - \frac{72}{\pi^3} \sum_{\substack{0 \neq T \in \Lambda_2 \\ \text{disc}(T) = \text{square}}} \varepsilon_T \eta^{(2)}(2Y, \pi T; 2, 0) \sigma_0(\text{cont}(T)) e(\text{tr}(TZ)) \\
 & + 288 \sum_{\substack{0 \neq T \in \Lambda_2 \\ T \geq 0}} \left(\sum_{d | \text{cont}(T)} d H\left(\frac{|\text{disc}(T)|}{d^2}\right) \right) e(\text{tr}(TZ)).
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_T = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \text{rank } T = 1 \\ 1 & \text{if } \text{rank } T = 2 \end{cases}$$

注意: Kohnen の original の論文では $\eta^{(2)}(\dots)$ の部分から別の関数 $\beta(x, y)$ で表わすようにあるが、相違が一致するところについては、現在 $\text{rank } T = 1$ の部分については証明されている。もちろん任意の T については証明されるべきである。