

10

前の講演 "On the solutions of Analytic Equations"
への補足.

名大 理 松村 英之

Artin の定理から, 永田の有名な定理

"収束中級数環 $k\{x_1, \dots, x_n\} = k\{x\}$ の任意の素イデアル
 $\mathfrak{p}$ は, $k[[x]]$ へ上げて素イデアルである ($\mathfrak{p}k[[x]]$ が素)"

(cf. M. NAGATA, LOCAL RINGS, (45.1) and (45.6)).

が, (少くとも k が標数 0 ならば) 直ちに出来ることを注意した

い. 実際 $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_m)$ とおき, 仮に $\mathfrak{p}k[[x]]$ が素で
ないとしよう. すると $\exists \varphi(x), \psi(x) \in k[[x]], \gamma_i(x) \in k[[x]]$
($1 \leq i \leq m$), $\varphi \cdot \psi = \sum f_i \gamma_i$, $\varphi \notin \mathfrak{p}k[[x]], \psi \notin \mathfrak{p}k[[x]]$

を得る. $k[[x]]$ の極大 ideal を $\mathfrak{m}$ とすれば, $k[[x]]$ は

noetherian local ring であるからすべての ideal は $\mathfrak{m}$ 進
位相で閉集合, 従って $(\varphi + \mathfrak{m}^c) \cap \mathfrak{p}k[[x]] = \emptyset$,

$(\psi + \mathfrak{m}^c) \cap \mathfrak{p}k[[x]] = \emptyset$ なる $c > 0$ が存在する. Artin
の定理から $\varphi \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^c}$, $\psi \equiv g \pmod{\mathfrak{m}^c}$, $\gamma_i \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}^c}$
なる $f, g, a_1, \dots, a_m \in k\{x\}$ で $fg = \sum f_i a_i$ を満足
するものがある. (方程式 $WZ = \sum f_i \gamma_i$ を考えるわけで,

これは W, Z, Y_i について 3 項式だから初期条件は考慮しなくてもよい。未知数について原素をずらせはよいからである。) $f \notin \mathfrak{p}, g \notin \mathfrak{p}, fg \in \mathfrak{p}$ となり矛盾。証了。

永田の定理は 1953 年に得られた。代数的に、より精密な結果が得られているのであるが、証明はかなりむづかしいので、これが Artin の定理の系として導けることは興味があると思われる。Artin の定理そのものは、決してやさしくはないが、道具としては陰函数の定理と、Weierstraß の preparation th. と、解析空間の局所理論の基礎的部分とも使うだけで、その意味では割に初等的である。