

Chern classes and Thom polynomials

Enumerative Geometry of Singularities

大本 亨 北海道大学大学院理学研究科

2005 年 10 月 於 城崎

ここでは「数え上げ幾何」として、古典的射影幾何における数多ある「特異点の数え上げ公式」(Plücker 公式など)を特性類理論として定式化したもの(Thom 多項式)および種々の数え上げ母関数の類いを念頭に置いている. Thom 多項式とは、写像・関数の特異点分類に現れる型 η ($A, D, E, \dots$ など)に対して定まる普遍 Chern 多項式 $tp(\eta)(c)$ であり、たとえば、“良い”写像 f に現れる η -型特異点の個数は、Chern 特性数 $tp(\eta)(c(f))$ で表される.

Chern 類といえば普通は(ベクトル束の) Chern “コホモロジー特性類”を指すであろうが、一方で、一般の特異点を許す代数多様体 X に対して Chern “ホモロジー特性類”がある. このホモロジー特性類には、Fulton 標準類 $C_*^F(X)$, Mather 類 $C_*^M(X)$, Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$ 等、出所の異なる種類が存在するが、 X が非特異ならば、これらはすべて接束の全 Chern 類 $c(TX)$ の Poincaré 双対に一致する. つまり、これらの Chern ホモロジー類達の差異は、 X の特異点集合 X_{sing} に台をもち、特異点の特徴的な性質を反映する量となって現れる. 特に、Chern-Schwartz-MacPherson 類は(共変関手の間の) Grothendieck 自然変換 $C_*: \mathcal{F}(X) \rightarrow A_*(X)$ として定式化でき ($C_*(\mathbb{I}_X) =: C_*(X)$), ホモロジー特性類達を総括的に記述するのに適している.

本稿の内容は上記2つの話題を統合する話であって、以下について述べる:

- 「Thom 多項式」および「代数多様体の Chern ホモロジー特性類」の紹介;
- G -作用¹を伴う代数多様体 X に対する「同変自然変換 $C_*^G: \mathcal{F}^G(X) \rightarrow A_*^G(X)$ 」あるいは「商スタック $[X/G]$ への C_* の拡張」;
- C_*^G の応用: 対称積に対するオービフォールド Euler 標数の母関数の“全 Chern 版”等.

複素数体上で話を進めるが、標数 0 の体 k 上でよい. 以下、原則として、 $M, N, V, \dots$ は非特異多様体、 $X, Y, W, \dots$ は非特異と限らないものに用いることにする.

0.1 写像の特異点型に関する Thom 多項式:

はじめに、複素解析的特異点の文脈で Thom 多項式についてに解説する (cf. Def. 0.12).

$f: M^m \rightarrow N^n$ を(非特異)複素多様体間の解析的写像とし、整数 $l = m - n$ を f の次元差と呼ぶ². f の特異点とは、 $\text{rank } df_x < \min(m, n)$ なる点 $x \in M$, あるいはその点での写像芽 $f: M, x \rightarrow N, f(x)$ を指す. この写像芽を原点中心の局所座標で表して、 $f: \mathbb{C}^m, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$

¹有限群とは限らない.

²慣例では $n - m$ のほうをよく使う.

を考える。写像芽の分類としては、(スキームとしての) ファイバー $(f^{-1}(0), 0)$ の分類、つまり局所環 $Q(f) := \mathcal{O}_{m,0}/f^*\mathfrak{m}_{n,0}$ の分類を考える。 $l \geq 0$ ならば、 l -dim. complete intersection germ の分類に他ならない。これを $\mathcal{K}$ -同値 (による分類) という³。

簡単な線形代数から、 $\mathcal{K}$ -同値は次の群作用と同じ意味をもつことが分かる：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(m, n) & (\simeq (\mathfrak{m}_{m,0})^n) : \text{写像芽 } \mathbf{C}^m, 0 \rightarrow \mathbf{C}^n, 0 \text{ 全体が成す } \mathcal{O}_{m,0}\text{-加群} \\ \mathcal{K}_{m,n} & := \{ (\sigma, \Xi) \mid \text{同型芽 } \sigma : \mathbf{C}^m, 0 \rightarrow \mathbf{C}^m, 0, \text{ 写像芽 } \Xi : \mathbf{C}^m, 0 \rightarrow GL_n(\mathbf{C}) \} \\ \text{action} : & ((\sigma, \Xi).f)(x) := \Xi(x)f(\sigma^{-1}(x)) : \mathbf{C}^m, 0 \rightarrow \mathbf{C}^n, 0. \end{aligned}$$

つまり、 $f, g \in \mathcal{E}(m, n)$ が $\mathcal{K}$ -同値 $\iff g \in \mathcal{K}_{m,n}.f$ 。あるいはスームス射の base change を取って、 $f \in \mathcal{E}(m, n), g \in \mathcal{E}(m-s, n-s)$ が $\mathcal{K}$ -同値 $\iff g \times id_s \in \mathcal{K}_{m,n}.f$ 。

(次元差 l の) 写像芽の $\mathcal{K}$ -特異点型 η とは、 $\mathcal{K}$ -同値類あるいはそのパラメータ族を指す⁴。次元差 l の写像 $f : M \rightarrow N$ に対して、 $x \in M$ が η -型特異点とは x における写像芽が (適当な座標において) η に属するときという。 η -型特異点全体を $\eta(f)(\subset M)$ で記す。

Definition-Theorem 0.1 次元差 l の写像芽の $\mathcal{K}$ -特異点型 η に対して、 η のみに依存する重み付き同次多項式 $tp(\eta)(c)$ ($c_1, c_2, \dots$ は不定元) で次の “universality” を満たすものが唯一存在し、これを特異点型 η に対する Thom 多項式 と呼ぶ：次元差 l の (ある種の横断性を満たす) 任意の正則写像 $M \rightarrow N$ に対して、閉包 $\bar{\eta}(f)$ の基本類が $tp(\eta)(c)$ に $c_i = c_i(f) := c_i(f^*TN - TM)$ を代入したもので表示される。すなわち、 $\iota : \eta(f) \rightarrow M$ を包含写像として、

$$\iota_*[\bar{\eta}(f)] = tp(\eta)(c(f)) \frown [M] \in H_*(M). \quad (1)$$

この定理は R. Thom (1955?) に遡るが、体系的に整備され出したのは 90 年代後半以降である (e.g., [16], [18]) ーたとえば、 “単純特異点型” η に対する $tp(\eta)$ の計算方法 (restriction method と呼ばれる：Rimányi [33], [11]) など。

“横断性条件” とは、ラフに言えば、 f の jet extension と閉包 $\bar{\eta}$ (の Whitney stratification) との横断性を指す：たとえば、閉包 $\bar{\eta}(f)$ の各点 x において写像芽 $f : M, x \rightarrow N, f(x)$ が complete intersection germ $(f^{-1}f(x), x)$ の versal deformation を与えているのあれば、上記の横断性条件は満たされる。また、横断性条件を外して、代わりに (1) 式左辺を適当な意味での “局所化類” に変更できる場合もある (例えば、Fulton の degeneracy loci class, Example 0.4)。

以降、 $c(f) := c(f^*TN - TM)$, $\bar{c}(f) = c(TM - f^*TN)$ とする。

³双有理幾何で言うところの $\mathcal{K}$ -同値とは関係ない。 $\mathcal{K}$ は contact 同値の略 (f のグラフとレベル $\mathbf{C}^m \times \{0\}$ との原点における接触度を計っているから) であって、「写像の特異点論」の慣例に従ってこの記号を用いることにする (cf. [22], [3])。他に、原点を保存する source と target の同型芽で移り合うものを $\mathcal{A}$ -同値 (あるいは $\mathcal{RL}$ -同値) という。 $\mathcal{K}$ -同値と $\mathcal{A}$ -同値とは密接な関係がある。

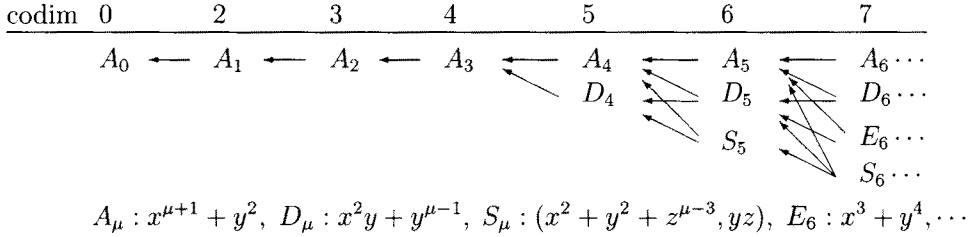
⁴正確には、適当な有限ジェット空間 ($J^r(m, n) = \mathcal{E}(m, n)/\mathfrak{m}_m^{r+1}\mathcal{E}(m, n)$) のある $\mathcal{K}_{m,n}$ -不変な部分代数多様体 (あるいは構成的集合) を考える。

Example 0.2 (Morse 特異点) コンパクト複素多様体から複素曲線への正則関数 $f: M^m \rightarrow N^1$ に対して、各点での Milnor number $\mu(f, x)$ を M 上で“積分”すると (構成的関数の積分, 0.2 節),

$$\int_M \mu(f) = (-1)^m c_m(TM - f^*TN) \frown [M] \quad (2)$$

が成り立つ. f が有限型一つまり孤立特異点のみ持つならば, 左辺は孤立特異点の Milnor 数の和を意味する. ちなみに, $m = 1$ の場合は Riemann-Hurwitz 公式: 分岐指数の和 $= \deg f \cdot \chi(N) - \chi(M) (= c_1(f^*TN - TM) \frown [M])$. $f: M^m \rightarrow N^1$ が“横断性条件”を満たしているならば, (2) 式の左辺は A_1 -特異点の個数を表す. 一方で, 右辺にある Chern 類が「 A_1 -特異点型⁵ に対する Thom 多項式」である: $tp(A_1) = (-1)^m \bar{c}_m$. 横断性の条件を課さなければ, (2) 式は, $tp(A_1)$ の「局所化公式」と見なし得る.

Example 0.3 (Isolated complete intersection curve germs の分類) 次元差 1 の写像芽の分類は, 次の隣接関係図式のように始まる (記号 $\tau \leftarrow \eta$ は, $\mathcal{K}$ -軌道 τ の閉包に軌道 η が含まれることを意味する):



対応する tp は次のようになる⁶:

⁵正確には, 「次元差 $m-1$ の A_1 -特異点型」(その局所環が $\mathcal{O}_m / \langle z_1^1 + \cdots + z_m^2 \rangle$ である特異点型).
⁶90 年代以前では, 所謂 desingularization method ($\bar{\eta}(f)$ の特異点解消を flag 束等の中に具体的に構成して tp を求めるやり方) が主流であった. しかし, このやり方では, 例えば A_4, A_5, D_5 の tp でさえ求められない (とても困難). 一方で, restriction method のアイデアは以下のようなものである: たとえば $tp(D_5)$ を求めようとする. まず Theorem 0.1 より, $tp(D_5) = Ac_1^6 + Bc_1^4c_2 + \cdots + Cc_1c_2c_3$ と置く. これらの係数を決定すればよい. τ を余次元が 6 以下の特異点型とする ($\tau = A_1, A_2, \dots, S_5$). 今の場合, τ の標準形は quasi-homogenous だから τ の固定部分群 ($\subset \mathcal{K}$) は $\mathbf{C}^*$ を含み, 標準形写像の定義域・値域にこの $\mathbf{C}^*$ の作用がある. この作用から分類空間 BC^* (の有限次元近似) 上にベクトル束 $E_1(\tau), E_2(\tau)$ が得られ, さらに, 写像 $f_\tau: E_1(\tau) \rightarrow E_2(\tau)$ で各ファイバー上への制限が τ の標準形写像に対応するものが構成できる. この f_τ に Theorem 0.1 を適用する: $\tau \neq D_5$ ならば, f_τ の D_5 -型特異点集合は空集合であるから, tp の universality より, $tp(D_5)(c(f_\tau)) = 0$. $\tau = D_5$ ならば, f_{D_5} の D_5 -特異点集合はベクトル束 $E_1(\tau)$ の零切断に他ならないから, $tp(D_5)(c(f_{D_5})) = c_{top}(E_1(\tau))$ (top Chern class) を得る. 一方, $c(f_\tau) = c(E_2(\tau) - E_1(\tau)) \in H^*(BC^*) = \mathbf{Z}[a]$ は, 生成元 a の多項式としてすぐに求められるので, これを $tp(D_5)$ 等に代入すれば, 未知係数 $A, B, \dots, C$ に関する線形方程式を得る. τ を動かして方程式系が得られ, これを解いて係数が決定される. 一般に, 単純軌道 (その軌道の近傍で, 有限個の軌道としか交わらないようなものがある) に関しては, この方程式系は必ず唯一解を持つ (大抵の場合, overdetermined である).

$$\begin{aligned}
tp(A_1) &= c_1^2 - c_2, & tp(A_2) &= 2c_1(c_1^2 - c_2), & tp(A_3) &= 5c_1^4 - 4c_1^2c_2 - c_1c_3, \\
tp(A_4) &= 12c_1^5 - 4c_1^3c_2 + 4c_1^2c_3 - 4c_1c_4 - 8c_1c_2^2, & tp(D_4) &= c_1^5 - c_1^3c_2 - 4c_1^2c_3 + 3c_1c_2^2 + c_1c_4, \\
tp(A_5) &= 30c_1^6 + 10c_1^4c_2 + 50c_1^3c_3 - 6c_1^2c_4 - 52c_1^2c_2^2, \\
tp(D_5) &= 4c_1^6 - 2c_1^4c_2 - 18c_1^3c_3 - 6c_1^2c_4 + 12c_1^2c_2^2 \\
tp(S_5) &= c_2^3 + c_3^2 - c_2c_4 + c_1^2c_4 - 2c_1c_2c_3, \quad \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Example 0.4 (Schubert Calculus) アファイン空間 $\text{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ (1-ジェット空間) への座標変換群 $GL_m(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathbf{C})$ の作用 $((A, B).H = BHA^{-1})$ について, 軌道は rank で決まる. $\eta = \Sigma^k$ ($\dim \ker = k$) に対する tp は次の型の Schur 多項式で与えられる: $tp(\Sigma^k) = \Delta_{k-l}^{(k)}(c)$ (ここで $l = m - n$) —これが所謂 Thom-Porteous 公式 ('60?, cf. [32]) である. つまり, M 上の2つのベクトル束 (次元差 l) の間の写像 $f: E \rightarrow F$ (つまり切断 $f: M \rightarrow \text{Hom}(E, F)$) に対して, 退化集合 $D^k(f) = \{x \in M, \dim \ker f_x \geq k\}$ は次の特性類で表される:

$$\iota_*[D^k(f)] = \det[c_{k-l-i+j}(F-E)]_{1 \leq i, j \leq k}$$

(横断性条件を課さないならば, 左辺を局所化類 (degeneracy loci class, [12]) に置き換える).

Fehér-Rimányi ([11], [9], [10]) は, 一般線形群の代わりに上 (下) 三角行列のなす群を取るなどして, Thom-Porteous 公式の variant を考察している: (double Schur, double Schubert など) 表現論で意味ある多項式のある軌道の tp として表す, あるいは quiver 表現に関する tp を求める, など.

Example 0.5 (多重点公式) immersion $M \rightarrow N$ の2重点・3重点公式などの「多重点公式」を, より一般に「多重特異点芽の分類に対する Thom 多項式」として定式化しようとする試みがある (Kazarian [17], [18]). ここで多重写像芽とは, 有限個の点の周りの写像芽 $f: M^m, \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow N^n, y$ ($y = f(x_1) = \dots = f(x_k)$) を指す (ただし, $m \geq n$ の場合, 各 x_i は f の特異点であるものとする; $m < n$ の場合, 各 x_i で f は非特異であってもかまわない).

[17] によれば, (有理係数コホモロジーにおいて) 多重特異点型 η_{multi} に対する Thom 多項式 $tp(\eta_{multi})$ は, Chern 類 $c_i = c_i(f)$ と Landweber-Novikov 類 $s^I(f) := f^*f_*(c^I(f))$ ($c^I(f) = c_1(f)^{i_1}c_2(f)^{i_2}\dots$) の多項式として与えられる⁷.

⁷Kazarian [17] において, この「存在定理」の“証明”はトポロジーの文脈でなされている (交差理論による代数幾何的な証明はまだない). key idea は, 次元差 $l (= m - n)$ の正則写像に関する「多重特異点芽の分類空間」として複素コボルディズムの分類空間の類似, すなわち無限ループ空間 $\lim_{s \rightarrow \infty} \Omega^{2s} MU(s-l)$ を考える点である.

Remark 0.6 (次元差 l の) 写像芽の K -分類は, “集合 (あるいは商位相空間) として” 軌道空間 $\mathcal{E}/K (= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}(m, m-l)/K_{m, m-l})$ を考えることに対応する. たとえば, 軌道の隣接関係は商位相の開集合に対応する. しかし, これでは軌道の固定部分群 (“automorphism group”) などの情報は失われるから, そうした情報を取り込むこと, すなわち, “商スタック” として「写像芽の分類空間」 $[\mathcal{E}/K]$ を考えるというのが, Thom 多項式の話に相当する⁸: つまり, $tp(\eta)$ とは部分スタック $[\eta/K]$ が代表するコホモロジー類であって, これを固定部分群の情報から計算しようというのが restriction method の方針である. 次元差 l の写像 $f: M \rightarrow N$ が与えられれば, f を “ M をパラメータ空間とした (写像芽 $M, x \rightarrow N, f(x)$ の) K -同値類の族” と見なして, 分類写像 (圏の間の射) $M \rightarrow [\mathcal{E}/K]$ が定まる—これが Theorem 0.1 での “universality” を導く.

トポロジーの立場では, 商スタック $[\mathcal{E}/K]$ よりも, ホモトピー商 (Borel 構成) $\mathcal{E} \times_K EK$ のほうを考える. ここで, $EK \rightarrow BK$ は位相群 K の分類空間 BK 上の普遍主束であって, ファイバーを $\mathcal{E}$ とする同伴束が上のホモトピー商である. あとの節で, この代数幾何学的アナロジーである代数的 Borel 構成 (Totaro-Edidin-Graham) に触れる.

0.2 特異多様体の Chern ホモロジー類

代数多様体 X が非特異であれば, 接束 TX の Chern 類がある: $c(TX) \cap [X] \in A_*(X)$. 特異点を有する X に対して似たものを構成するには, まず (Nash) blowing-up や smoothing などの改変操作で X を適当に “良い空間” に置き換えて, その空間上の適当なベクトル束 (“接束 TX の代換物”) を取ってきて, その Chern 類を pushforward あるいは specialization することで X に還元する. 改変操作に応じて異なった種類の (Chow) ホモロジー特性類が導かれる ([12], [21], [13]; さらに最近の話題は Schürmann-Yokura [35] が詳しい). 以下, X は非特異多様体への埋め込みを持つとする (embeddable).

- Fulton 標準類 $C^F(X)$ (Example 4.2.6 [12]): $X \subset M$ とし, X に沿った blowing-up $p: \tilde{M} \rightarrow M$ の例外因子を D とおく. よく知られているように, Segre 類は D の自己交差を用いて定義される:

$$s(X, M) = \sum_i (-1)^{i-1} p_*(c_1(\mathcal{O}_D(1))^{n-1-i} \cap [D]) \in A_*(X).$$

X の Fulton 標準類は, M が非特異であるとして,

$$C^F(X) = c(TM|_X) \cap s(X, M)$$

⁸商スタック $[X/G]$ は次の圏として与えられるのであった: その対象は, 主 G -束 $P \rightarrow B$ と G -同変射 $\varphi: P \rightarrow X$ の組; その射は, 主束の間の射 $f: P' \rightarrow P$ で $\varphi \circ f = \varphi'$ を満たすもの. 別の見方 (“同伴束の切断に関する分類空間”) もある: 対象を同伴束 $E = P \times_G X$ の切断 $s: B \rightarrow E$ (つまり $s(B) = (\text{graph } \varphi)/G$); 射を, 同伴束の間の射 $f: E' \rightarrow E$ で切断を可換とするもの ($f \circ s' = s$). ここでは後者の見方に立っている.

のように定義される（これは ambient space M の取り方に依らない；[12]）。特に， X が complete intersection の場合， X 上の（局所自明な）法接層を用いて“仮想接束” $TM|_X - N_X$ が考えられて，次が成り立つ： $C^F(X) = c(TM|_X - N_X) \frown [X]$ （右辺を Fulton-Johnson 類ともいう）。

- Chern-Mather 類 $C_*^M(X)$ ([21]; Example 4.2.9 [12]): X の Nash blowing-up $\nu: \widehat{X} \rightarrow X$ を取り， $\widehat{X}$ 上の tautological bundle (Nash tangent bundle) $\widehat{TX}$ の全 Chern 類を pushforward したものととして $C_*^M(X)$ を定義する（これも X の埋め込みの取り方に依らない）：

$$C_*^M(X) = \nu_*(c(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}]) \in A_*(X).$$

- Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$ ([21]; Example 19.1.7 [12]): X 上の構成的関数とは，有限和 $\alpha = \sum a_i \mathbb{1}_{W_i}$ ($a_i \in \mathbf{Z}$, W_i は部分代数多様体) で表されるような (X の閉点上の) 整数値関数 $\alpha: X \rightarrow \mathbf{Z}$ のことを指す。 $\mathcal{F}(X)$ を X 上の構成的関数全体がなす Abel 群とする。代数多様体と固有射のなす圏に対して， A_* と同様， $\mathcal{F}$ は共変関手となる：MacPherson [21] では $k = \mathbf{C}$ とし，固有射 $f: X \rightarrow Y$ に対して，pushforward を次で定義している：

$$f_*: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y), \quad f_*(\alpha)(y) = \sum a_i \chi(W_i \cap f^{-1}(y)) \quad (y \in Y)$$

ここで $\chi(\cdot)$ は underlying analytic space の (Borel-Moore ホモロジーの) Euler 標数を意味する（一方，標数 0 の体 k 上における f_* の構成は Kennedy [19] による：構成的関数群 $\mathcal{F}(X)$ の代わりに（それと群同型な）Lagrange サイクル群 $\mathcal{L}(X)$ を用いて，Lagrange サイクルの pushforward を代数的に与える）。

$pt: X \rightarrow pt (= \text{Spec}(k))$ による $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ の pushforward を α の X 上の積分あるいは degree と呼ぶ： $\int_X \alpha := pt_*(\alpha) \in \mathcal{F}(pt) = \mathbf{Z}$ 。Chern-MacPherson 変換 C_* とは，この $\int_X$ の “class version” に相当する：

Theorem 0.7 ([21]) この 2 つの共変関手の間の自然変換 $C_*: \mathcal{F}(X) \rightarrow A_*(X)$ で，非特異な X に対して $C_*(\mathbb{1}_X) = c(TX) \frown [X]$ を満たすものが唯一存在する。

$C_*(X) := C_*(\mathbb{1}_X)$ を X の Chern-Schwartz-MacPherson 類と呼ぶ⁹。Chern-MacPherson 変換 C_* は，pushforward（自然性）だけでなく，specialization (Verdier) 等に対して可換である。さらに，次のような “Riemann-Roch” 公式がある（反変的な作用と C_* の関係）：スムーズ射 $f: X \rightarrow Y$ に対して， $C_* \circ f^* = c(T_f) \frown f^*$ が成り立つ（ここで T_f は相対接束）。これを Verdier-Riemann-Roch 公式 (VRR 公式) と呼ぶ ([13], [40], [34])。

⁹歴史的には，まず最初に複素解析的な場合において，所謂 Schwartz 類 [36] が与えられている： X の Whitney stratification $X = \bigcup X_\alpha$ をとり，“接束 TX ”の代換物として “stratified vector bundle” TX_α を考えて，その切断 (radial stratified vector field) の位相的障害類として定義する。これと $C_*(\mathbb{1}_X)$ が一致することは [5] で示されている。

Remark 0.8 上記3種の Chern 類は、その定義から、 X が非特異ならば $c(TX) \in [X]$ に等しい。そこで、3つの Chern 類の「差異」を、 X の特異点のある局所不変量が定める構成的関数の C_* -値と関係させて表すことを考える¹⁰。実際、多くの場合に、興味ある量として $c(E) \in C_*(\alpha) \in A_*(X)$ の形が現れる（ここで、 E は X 上のある（仮想）ベクトル束、 α は X 上の構成的関数）。その典型例として、 X の Milnor 特性類 がある（Yokura ('97); [41], [31], [6], [1], [29]) : $\mathcal{M}(X) := (-1)^n(C_*(X) - C^F(X))$ ($\dim X = n$)。

$\mathcal{M}(X)$ は X が complete intersection であるときに最も有効である（上述のように $C^F(X)$ は Fulton-Johnson 類に等しく、また C_* は specialization と可換である故）。たとえば、singular hypersurface X （特異点は孤立とは限らない）の場合、 ν を仮想法束、 $\mu \in \mathcal{F}(X)$ を Milnor number 構成的関数として次が成り立つ：

$$\mathcal{M}(X) = c(\nu)^{-1} \in C_*(\mu).$$

一般に、 X が孤立特異点のみ有する場合、上記3種の Chern 類の差異はすべて数値で与えられる。特に X が孤立特異点のみ有する complete intersection であれば、差 $C_* - C^F$, $C_* - C^M$, $C^F - C^M$ は、(符号を除いて) それぞれ、孤立特異点の Milnor 数、generic hyperplane section の Milnor 数、Buchsbaum-Rim 重複度、の総和として表される（[37], [30], [29]）。

0.3 同変 Chern-MacPherson 変換

G を（線形）代数群、 X を G -代数多様体とする。Totaro-Edidin-Graham による代数的 Borel 構成 ([39], [7]) を経て、 G -同変 Chow 群 $A_*^G(X)$ が定義される。

G の線形表現 V であって、ある Zariski 開集合 $U(\subset V)$ に G が自由に作用しているものを取る。 G は $X \times U$ に自由に作用しているから、その商 $X_U := X \times_G U (= (X \times U)/G)$ を取り、主 G -束 $X_U \rightarrow U/G$ を考える（一般に algebraic space の範疇で存在する）。この主束が、トポロジーにおける普遍束 $X \times_G EG \rightarrow BG$ の“代数的有限次元近似”を与える。

X の G -同変 Chow 群を、普遍束の全空間 $X \times_G EG$ の“Chow 群”として与えたいところだが、ここで少し工夫がいる（有限次元近似の“次元”をシフトさせて極限を取る）。 V を添字として次の帰納的極限を取る¹¹：

$$A_i^G(X) := \varinjlim A_{i+(l-g)}(X_U), \quad (l = \dim V, \ g = \dim G).$$

一般に $A_i^G(X)$ は負次元 ($i < 0$) でも非自明である。また、同変基本類 $[X]_G \in A_n^G(X)$ が一意に決まる ($\dim X = n$)。 X_U の operational Chow 群の射影極限として $A_G^i(X) := \lim A^i(X_U)$

¹⁰Fulton 標準類あるいは Segre 類を「基準」にして Mather 類、MacPherson 類との差異を表すという方向もある（Aluffi [1], [2]）。

¹¹ G の線形表現 V および $V' = V \oplus V_1$ で、各々の開集合 U, U' に G が自由に作用し、 $U \oplus V_1 \subset U'$ であるとするとき、ベクトル束 $p: X_{U \oplus V_1} \rightarrow X_U$ の全空間 $X_{U \oplus V_1}$ は $X_{U'}$ を“十分よく”近似している（つまり $i < \text{codim}_V(V - U)$ の範囲で inclusion $\iota: X_{U \oplus V_1} \rightarrow X_{U'}$ は Chow 群の同型を導く）。そこで、 $\iota_* \circ p^*: A_*(X_U) \rightarrow A_{*+l_1}(X_{U'})$ ($l_1 = \dim V_1$) の極限を取る。

が定義され、基本類は同変 Poincaré 写像 $\smile [X]_G : A_G^i(X) \rightarrow A_{n-i}^G(X)$ を与える。特に X が非特異のとき、これは同型である (Dual_G と記す)。

$\mathcal{F}_{inv}^G(X \times V)$ を $X \times V$ 上の G -不変な構成的関数全体がなす Abel 群とする ($\mathcal{F}(X \times V)$ の部分群)。同変 Chow 群と同様に、 $p_V^{V'} : V' = V \oplus V_1 \rightarrow V$ の pullback により帰納的極限が定義される：

$$\mathcal{F}^G(X) := \varinjlim \mathcal{F}_{inv}^G(X \times V).$$

これを G -同変構成的関数のなす Abel 群と呼ぶ。これは帰納的極限 $\lim \mathcal{F}(X_U)$ と“無限余次元の台を持つ構成的関数を除いて”同じと見なされる。

(G -embeddable な) G -代数多様体と固有 G -射の圏に対して、次が成り立つ：

Theorem 0.9 (同変 Chern-MacPherson 変換 [24]) 次を満たす自然変換

$$C_*^G : \mathcal{F}^G(X) \rightarrow A_*^G(X)$$

が唯一存在する： X が非特異ならば、 $C_*^G(\mathbb{1}_X) = c^G(TX) \smile [X]_G$ 。とくに G の作用が自明のときは、 $C_*^G = C_*$ (MacPherson 変換)。

この証明 (C_*^G の構成) の本質な点は Verdier-Riemann-Roch 公式にある¹²。また、次が成り立つ：

$$C_*^G(\mathbb{1}_X) = \chi(X) \cdot 1 + \cdots + [X]_G \in A_*^G(X) \quad (\chi(X) = \int_X \mathbb{1}_X).$$

Remark 0.10 $C_*^G(\mathbb{1}_X)$ の構成と同様に、代数的 Borel 構成を用いて、同変 Chern-Mather 類 $C_M^G(X)$ および同変 Fulton 標準類 $C_F^G(X)$ が $A_*^G(X)$ の中に定義できる。

Remark 0.11 この C_*^G は商スタックに対する MacPherson 変換と見なせる。Edidin-Graham [7] は、 $\mathcal{X} = [X/G]$ (一般に、分離的でない Artin スタック) に対して、 $\mathcal{X}$ の (整係数) Chow 群を $A_i(\mathcal{X}) := A_{i-g}^G(X)$ で与えている (これは presentation X, G の取り方に依らない)。全く同様の証明で、 $\mathcal{F}(\mathcal{X}) := \mathcal{F}^G(X)$ が well-defined となる。したがって、上の C_*^G はそのまま (商スタックに対する $\mathcal{F}$ と A_* の間の) Grothendieck 自然変換 $C_* : \mathcal{F}(\mathcal{X}) \rightarrow A_*(\mathcal{X})$ と見なされる。ただし、自然性に関して、ここでは、商スタック間の射に制限を付けて考えている：射 $[X/G] \rightarrow [Y/H]$ として、 $f : X \rightarrow Y$ と準同型 $\varphi : G \rightarrow H$ があつて $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$ なるものから induce される射を考える。

0.4 Thom 多項式とその “total class version”

代数多様体 $X(\subset M)$ の Fulton 標準類の定義を逆手にとって、Chern-Schwartz-MacPherson 類に対応する “Segre 類” を次で与える：

$$s^{SM}(X, M) := c(TM|_X)^{-1} \smile C_*(X).$$

¹²代数的有限次元近似において、ベクトル束 $p : X_{U \oplus V_1} \rightarrow X_U$ の pullback p^* に VRR 公式を用いる。

(cf. Aluffi [2]). Mather 類 $C^M(X)$ に対応する Segre 類 $s^M(X, M)$ も同様に与えられる. X が非特異ならば, いずれの “Segre 型特性類” $s^\diamond(X, M)$ ($\diamond = F, M, SM$) も法束 $\nu = TM/TX$ の inverse Chern 類 $c(-\nu) \in [X]$ であることに注意する. さらに非特異多様体の間の射 $f : M' \rightarrow M$ が X に対してしかるべき横断性条件を満たすならば, $X' = f^{-1}(X)$ と置いて, $s^\diamond(X', M') = f^*s^\diamond(X, M)$ が成立する.

同変版も平行にできる. X を G -代数多様体とし, 非特異 G -多様体 M に同変に埋め込まれているとき, 同変 Segre-SM 類を次で与える: $s_{SM}^G(X, M) := c^G(TM|_X)^{-1} \frown C_*^G(X) \in A_*^G(X)$. 特に, ambient space M がアファイン空間の場合を考える:

Definition 0.12 G -アファイン空間 V と V の G -不変部分代数多様体 W が与えられたとき, W の同変基本類の G -同変 Poincaré 双対を G -特性類と見なしたものを W の Thom 多項式 と呼ぶ:

$$tp(W) = \text{Dual}_G \iota_*[W]_G \in A_G^l(V) \simeq A^l(BG) \quad (l = \text{codim } W).$$

この tp (“同変基本類”) の一般化としては同変 Segre 類がふさわしい. どの同変 Segre 類 $s_\diamond^G$ ($\diamond = F, M, SM$) でもよいが, ここでは “局所不変量の積分” にこだわっている, 次を考える:

$$tp^{SM}(W)(= tp^{SM}(\mathbb{I}_W)) := \text{Dual}_G \iota_* s_{SM}^G(W, V) = tp(W) + \text{higher terms} \in A^*(BG).$$

線形に拡張して群準同型 $tp^{SM} : \mathcal{F}_{inv}^G(V) \rightarrow A^*(BG)$ が与えられる.

前出の「(複素解析的) 写像の特異点」での tp は, $V = \mathcal{E}(m, n)$, $G = K_{m,n}$ さらに $W = \bar{\eta}$ (closure η) を考えていることに対応する (但し $l = m - n$ を固定して帰納的極限 $\lim \mathcal{E}(m, m - l)$ ($m \rightarrow \infty$) を取る). 例えば, $f : M \rightarrow N$ の η 型特異点集合 $\eta(f)$ について, その閉包 $\bar{\eta}(f)$ の基本類の “universal” な Chern 類表示が Thom 多項式 $tp(\eta)$ であったが, $\bar{\eta}(f)$ の Euler 標数に関しても “universal” な Chern 類表示の存在が示される:

$$\chi(\bar{\eta}(f)) = \int_M c(TM) \cdot tp^{SM}(\bar{\eta})(c(f)).$$

ただし, この状況では $tp^{SM}(\bar{\eta})(c) = tp(\eta)(c) + \dots$ は普遍 Chern 類 $c_1, c_2, \dots$ の形式的べき級数である. “閉包” $\bar{\eta}$ には無数の隣接軌道が含まれてしまうので, K -分類ができていない余次元の範囲でのみ具体的な計算が可能である. しかし, 面白いことに Milnor 数 (K -不変量) μ について $tp^{SM}(\mu)$ はすべての項が決定できる:

Theorem 0.13 ([25]) $l \geq 0$ とする. Milnor 数構成的関数 $\mu : \mathcal{E}(\infty, \infty - l) \rightarrow \mathbf{Z}$ の同変 Segre-MacPherson 類は, $tp^{SM}(\mu)(c) = (-1)^{l+1} \sum_{i,j \geq 0} c_i \bar{c}_{l+j+1}$ で与えられる.

ある意味で, これは Example 0.2 の一般化, あるいは, “Milnor 類の相対版” (isolated complete intersection の族に対する Milnor 類) (cf. Remark 0.8) と見なされる. Milnor 数の他に, generic hyperplane の Milnor 数あるいは Polar 重複度などの tp^{SM} も考えられる.

0.5 オービフォルド Euler 標数の “total class version”

この節はいままでと少し趣向が違って、有限群作用の話である¹³。以下、 G を有限群とし、 G -作用を有する（特異）多様体 X に対して $\mathcal{X} := [X/G]$ とおく。

X 上の構成的関数で G の作用の仕方を反映する何らかの “標準的な” ものを取り出すことを考える。まず、 $\mathcal{X}$ の Euler 標数およびオービフォルド Euler 標数を思い出す。これらは G -不変構成的関数

$$\mathbb{1}_{X/G}^{(1)} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbb{1}_{X^g}, \quad \mathbb{1}_{X/G}^{(2)} := \frac{1}{|G|} \sum_{gh=hg} \mathbb{1}_{X^g \cap X^h},$$

の X 上での積分で与えられる： $\chi(X/G) = \int_X \mathbb{1}_{X/G}^{(1)}$, $\chi^{orb}(X; G) = \int_X \mathbb{1}_{X/G}^{(2)}$ 。

より一般に、 A を任意の群で $|\text{Hom}(A, G)| < \infty$ を満たすものとする。 A の G -表現全体に関する和として

$$\mathbb{1}_{X/G}^{(A)} := \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} \mathbb{1}_{X^{\rho(A)}}$$

とおき、これを群 A に付随する G -同変構成的関数と呼ぶ（ここで、 $X^{\rho(A)} := \bigcap_{g \in \rho(A)} X^g$ ）。当たり前だが、rank 1, 2 の自由 Abel 群 $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2$ が上記の 2 つのケースであることに注意する。簡単のため、 $A = \mathbf{Z}^m$ に付随する G -同変構成的関数を $\mathbb{1}_{X/G}^{(m)}$ と略記し、 $\chi_m(X; G) := \int_X \mathbb{1}_{X/G}^{(m)}$ とおく（これは Bryan-Fulman(1998) の一般化されたオービフォルド Euler 標数に一致）。

これらの構成的関数に C_*^G を作用させれば、しかるべき意味を持つホモロジー特性類が得られる。

• 対称積のオービフォルド Chern 類とその母関数： 一例として、対称積 $S^n X := X^n / S_n$ を考える（ X は特異であってもよい）。よく知られているように対称積の Euler 標数の母関数は次で与えられる (Macdonald, 1962)：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(S^n X) z^n = (1 - z)^{-\chi(X)}. \quad (3)$$

この母関数表示 (3) において、Euler 数を Chern-MacPherson 類に読み替え、さらに不定元 z に “作用素” の役割を付加させて (“ zD ” に置き換える)、次の “Chern class version” を得る：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*(S^n X) z^n = (1 - zD)^{-C_*(X)}. \quad (4)$$

さらにオービフォルド Euler 標数の母関数表示についての “Chern class version” は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*^{orb}(S^n X) z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k D^k)^{-C_*(X)}. \quad (5)$$

¹³ 実際、数値的な数え上げを考える場合（つまり degree を考える場合）、 $1/\chi(G)$ 等の係数の出現は不可避であり、 $\chi(G) = 0$ では意味がなくなる一単にこれを避けるために有限群作用とした。また、最初の節（写像の Thom 多項式）との関係で言えば、後述の対称積に関する話は「多重点公式 $tp(\eta_{multi})$ 」の “total class version” への応用を念頭に置いている。

以下、これらの式 (4) と (5) の記号の意味を説明する。

まず、 $A_*(S^n X) \otimes \mathbf{Q} = A_*^{S^n}(X) \otimes \mathbf{Q}$ が成立することに注意する。この同一視のもと、 $S^n X$ の Chern-SM 類 $C_*(S^n X)$ は $C_*^{S^n}(\mathbb{I}_{X^n/S_n}^{(1)})$ に一致する。また、(5) 式左辺にある $C_*^{orb}(S^n X)$ は、 $C_*^{S^n}(\mathbb{I}_{X^n/S_n}^{(2)})$ に対応する $A_*(S^n X) \otimes \mathbf{Q}$ の元を指す。

さて、(4) 式、(5) 式が住んでいる場所は、次のような“形式的べき級数”の全体がなす $\mathbf{Q}$ -代数である：

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n A_*^{S^n}(X^n) \otimes \mathbf{Q} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n, \xi_n \in A_*^{S^n}(X^n) \otimes \mathbf{Q} \right\}.$$

(ξ_n は全 Chow ホモロジー類)。積は $(\xi z^m) \odot (\xi' z^n) := \frac{z^{m+n}}{(m+n)!} \cdot \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \sigma_*(\xi \times \xi')$ で与える。

記号 D は“対角作用素の生成元”を意味する：すなわち、 $D^0 = 1$, $D^1 = D = (id_X)_*$,

$$D^n := (\Delta^n)_* : A_*(X) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow A_*^{S^n}(X^n) \otimes \mathbf{Q}$$

(diagonal embedding $\Delta^n : X \rightarrow \Delta X^n \subset X^n$ の誘導準同型)。さらに「記号の約束」として、 $zD = Dz$ および

$$(1 - zD)^{-c} := \exp(-\text{Log}(1 - zD)(c)) = \exp(zD(c)) \odot \exp\left(\frac{z^2}{2} D^2(c)\right) \odot \cdots$$

と表記することにする (各 z^n の係数は有限和なのでこれは意味を持つ)。つまり、“対角作用素代数”における 2 種類の“指数関数・対数関数”を考えている：形式的べき級数環 $\mathbf{Q}[[Z]]$ ($Z := zD$) における指数関数と対数関数を Exp , Log と記し、さらに、 $\odot$ を形式的な積として $\mathbf{Q}[[Z]]$ が生成する新たな $\mathbf{Q}$ -代数を考えて、その $\mathbf{Q}$ -代数における ($\odot$ に関する) 指数関数と対数関数を $\exp$, $\log$ と記している。

式 (4) と (5) において、各 z^n の係数として“0-次元ホモロジー”だけ抜き出してくれば、各々、式 (3) およびオービフールド Euler 標数の母関数表示に一致する。

構成的関数においても同様に、 $\mathbf{Q}$ -代数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathcal{F}^{S^n}(X^n) \otimes \mathbf{Q}$ が考えられて (積 $\odot$ も同じ形で定義する)、 D^n 作用素も同様に与えられる。さらに、“構成的関数および Chow ホモロジー係数の”べき級数代数の間に、 $\mathbf{Q}$ -代数としての自然変換 C_*^{sym} が与えられる (つまり積 $\odot$ も保存する)：

$$C_*^{sym}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} C_*^{S_n}(\alpha_n) z^n.$$

この種の公式の一般的な形は次で与えられる： X を G - (特異) 多様体とし、 $G_n := G^n \sim S_n$ を wreath product とする (G と S_n の半直積群)。 $\Omega_A(r)$ で A の中の指数 r の部分群全体の集合とする。和の有限性に関するしかるべき条件の下、次が成り立つ：

Theorem 0.14 (Chern 類に関する “Dey-Wohlfahrt” 公式 [25])：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*^{G_n}(\mathbb{I}_{X^n/G_n}^{(A)}) z^n = \exp \left(\sum_{B \in \Omega_A} \frac{1}{|A : B|} (zD)^{|A:B|} C_*^G(\mathbb{I}_{X/G}^{(B)}) \right).$$

Remark 0.15 $X = pt$ とすれば, これは wreath product 表現の個数 $|\text{Hom}(A, G_n)|$ の数え上げ公式 ([23]) を与える ($G = \{e\}$ のとき, 古典的な Dey-Wohlfahrt 公式) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\text{Hom}(A, G_n)|}{|G|^n n!} z^n = \exp \left(\sum_{B \in \Omega_A} \frac{|\text{Hom}(B, G)|}{|G| \cdot |A : B|} z^{|A : B|} \right).$$

より一般に, 部分群や表現などの数え上げ母関数 (e.g., [42]) について, ある種の次数付き空間列の Chern 類母関数に拡張することを, 上の指数関数公式は示唆している.

$G = \{e\}$ で $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2$ の場合が前出の 2 つの Chern 類生成母関数であり, さらに $A = \mathbf{Z}^m$ の場合に得られる Chern 類の母関数公式において, その “0-次元ホモロジー” 部分は, $\chi_m(X^n; S_n)$ の生成母関数である (wreath product の場合は Tamanoi (2001) の公式を与える) :

Corollary 0.16

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_m(X^n; S_n) z^n = \prod_{j_1, \dots, j_{m-1} \geq 1} \left(\frac{1}{1 - z^{j_1 j_2 \dots j_{m-1}}} \right)^{j_1^{m-2} j_2^{m-3} \dots j_{m-2} \chi(X)}.$$

• $k = \mathbf{C}$ の場合において, 複素代数多様体の (位相的) Euler 標数, 算術種数, 符号数は, 所謂 Hirzebruch の χ_y -種数により統合されるのであった (各々, $y = -1, 0, 1$ の場合に対応). χ_y -種数の自然変換としての “class version” として, Brasselet-Schürmann-Yokura [4] ([35]) により, “モチービック Chern 類” mC_* と “Hirzebruch 類自然変換” $(T_y)_*$ が導入されている. 特に, $y = -1, 0$ とすれば, これは Chern-MacPherson 自然変換と Baum-Fultn-MacPherson による Riemann-Roch を与える :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \longleftarrow & K_0(\text{var}/X) & \xrightarrow{mC_*} & G_0(X) \\ C_* \downarrow & & (T_y)_* \downarrow & & \downarrow, td_* \\ H_*(X; \mathbf{Q}) & \xleftarrow{y=-1} & H_*(X) \otimes \mathbf{Q}[y] & \xrightarrow{y=0} & H_*(X; \mathbf{Q}) \end{array}$$

ここで, $G_0(X)$ は X 上の代数的連接層の Grothendieck 群, $K_0(\text{var}/X)$ は (X 上の) 代数多様体の相対 Grothendieck 群を指す. この自然変換は, X の特異点に関する適当な条件下で, 弦的不変量 (stringy invariant) の “class version” (例えば, Hodge 多項式や elliptic 種数 (Borisov-Libgober) の一般化) を示唆している.

この節での対称積に関する議論 (C_*^{sym} 等) は, そのままこの自然変換にも適用できて, 結果, (Baum-Fultn-MacPherson の) Todd 類などに関する同種の母関数公式が得られる.

参考文献

- [1] P. Aluffi, *Chern classes for singular hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 3989–4026.
- [2] ———, *Inclusion-Exclusion and Segre class, I and II*, arXiv: AG/0203122, AG/0203284.
- [3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, vol. I, Monographs Math. 82, Birkhäuser (1985)

- [4] J. P. Brasselet, J. Schürmann and S. Yokura, *Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces*, arXiv:AG/0503492.
- [5] J. P. Brasselet and M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe*, Astérisque vol 82–83 (1981), 93–148.
- [6] J. P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *Milnor classes of local complete intersections*, Trans. AMS. 354 (2002), no. 4, 1351–1371.
- [7] D. Edidin and W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Invent. Math. 131 (1998), 595–634.
- [8] L. Ernström, T. Ohmoto and S. Yokura, *Topological Radon transformations*, Jour. Pure and Applied Algebra, Vol. 120, No. 3, (1997), 235–254
- [9] L. Fehér and R. Rimányi, *Classes of degeneracy loci for quivers: the Thom polynomial point of view*, Duke Math. Jour. 114, no.2, (2002), 193–213.
- [10] ———, *Schur and Schubert polynomials as Thom polynomials – cohomology of moduli spaces*, Cent. Eur. J. Math. 1, no. 4, (2003), 418–434.
- [11] ———, *Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions*, Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 2002), Contemp. Math., 354, AMS, (2004), 69–93.
- [12] W. Fulton, *Intersection Theory*, second edition, Springer-Verlag (1997)
- [13] W. Fulton and R. MacPherson, *Categorical framework for the study of singular spaces*, Memoirs of the AMS, vol. 243 (1981).
- [14] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann. 286 (1990), 255–260.
- [15] D. Joyce, *Constructible functions on schemes and stacks*, preprint, arXiv:AG/0403305
- [16] M. E. Kazarian, *Characteristic Classes of Singularity Theory*, Arnold-Gelfand Seminars, Birkhäuser (1997), 325–340
- [17] ———, *Multisingularities, cobordisms and enumerative geometry*, Russian Math. Survey 58:4 (2003). 665–724 (Uspekhi Mat. nauk 58:4 29–88).
- [18] ———, *Thom polynomials*, to appear in Proceedings of JMS conference “Singularity Theory and its application”, Sapporo, 2003.
- [19] G. Kennedy, *MacPherson’s Chern classes of singular algebraic varieties*, Comm. Algebra, 18(9) (1990), 2821–2839.
- [20] I. G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product*, Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), 563–568.
- [21] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. , vol. 100, no.3 (1974), 421–432.
- [22] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings: III, Finite determined map germs*, Publ. Math. IHES, 89 (1969), 127–156.
- [23] T. Müller, *Enumerating representations in finite wreath product*, Adv. Math. 153 (2000), 118–154.
- [24] T. Ohmoto, *Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions*, to appear in Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (2006).
- [25] ———, *Generating functions of Chern classes I : Symmetric Products*, preprint (2005).
- [26] ———, *Generating functions of Chern classes II : Hilbert schemes*, in preparation.
- [27] ———, *Thom polynomial expression for Segre type classes of singular loci of maps*, preprint (2005).
- [28] ———, *Chern classes and Thom polynomials*, e-lect. note, Advanced School and Workshop on Singularities in Geometry and Topology, ICTP, 2005.
- [29] T. Ohmoto and S. Yokura, *Product formula of Milnor class*, Bull. Polish Academy of Sciences, vol. 48, No. 4 (2000), 388–401

- [30] T. Ohmoto, T. Suwa and S. Yokura *A Remark on Chern Classes of Complete Intersections*, Proceedings of Japan Academy, 73, Ser. A (1997), 93–95
- [31] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*, J. Algebraic Geom. 10 (2001), no.1, 63–79.
- [32] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proceedings of Liverpool Singularities I, Lect. Notes Math., vol. 192, Springer (1971), 286–307.
- [33] R. Rimányi, *Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities*, Inv. Math. 143 (2001), 499–521
- [34] J. Schürmann, *A generalized Verdier-type Riemann-Roch theorem for Chern-Schwartz-MacPherson classes*, arXiv:AG/0202175.
- [35] J. Schürmann and S. Yokura, *A survey of characteristic classes of singular spaces*, arXiv: AG/0202175.
- [36] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d’une variété analytique complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris t.260 (1965), 3262–3264, 3535–3537
- [37] T. Suwa *Classes de Chern des intersections complètes locales*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol 324 (1996), 67–70.
- [38] ———, *Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations*, Actualités Mathématiques, Hermann (1998).
- [39] B. Totaro, *The Chow Ring of a Classifying Space*, Proc. Symposia in Pure Math., vol. 67 (1999), 249–281.
- [40] S. Yokura, *On a Verdier-type Riemann-Roch for Chern-Schwartz-MacPherson class*, Topology and Its Application 94 (1999), 315–327
- [41] ———, *On characteristic classes of complete intersections*, “Algebraic Geometry - Hirzebruch 70”, Contemporary Math. AMS. 241 (1999).
- [42] T. Yoshida, *Classical Problems in Group Theory (I): Enumerating subgroups and homomorphisms*, Sugaku Expositions, AMS, Vol. 9, No.2, (1996), 169–188.