

相対レニーエントロピーによる非正則モデルの漸近推定について

林 正人¹ 理化学研究所² 脳科学総合研究センター 脳数理研究チーム

概要

本稿では相対レニーエントロピーを用いて非正則なモデルも含めて 1 パラメータ推定の漸近論を扱う。評価の方法として大偏差及び極限分布の双方の視点に注目する。特に本稿では推定値が真値より大きくなる時の誤差と小さくなる時の誤差を同等ではなく重みをつけて評価を行う。漸近 1 次のレベルでは、モデルが正則であるときには双方の誤差を均等に評価した場合の最適解が重み付けした場合の最適解にもなっていることが示せた。一方で、一様分布族等の非正則モデルにおいては、重みの取り方に依存して最適解が変化する。さらに、このようなモデルで大偏差型の評価では極限の取り方を変えることにより全く異なる評価が得られることが示せた。

1 まえがき

本稿では 1 パラメータの確率分布族のパラメータ推定の問題を後に述べる相対レニーエントロピーを用いて漸近理論の枠組みで扱う。そのために §2 では相対レニーエントロピーに関する議論をまとめておいた。§2.1 では個々のモデルについて相対レニーエントロピーの極限を評価する。このとき通常の Fisher 情報量の定義では発散するモデルで発散しないように Fisher 情報量を再定義する。そして §2.2 では相対レニーエントロピーと帰無仮説及び対立仮説がともに単純である仮説検定との関係について述べる。それらの準備の下で §3 及び §4 では正則なモデルだけでなく異なる未知パラメータに対応する確率分布が互いに絶対連続にならないという意味での非正則³ なモデルを含む一般的なモデルについて漸近論とりわけ大偏差型の評価や極限分布の視点から考察する。(§3 では大偏差に注目した議論を行い、§4 では極限分布に注目した議論を行う。) 上述の意味での非正則なモデルについてなされた研究は Akahira[1], Akahira and Takeuchi[2], Ibragimov and Has'minskii [3] などがあるが正則な場合に比べると極めて少ない。本稿では相対レニーエントロピーを用いることによって非正則なモデルを含む一般的な状況の下で漸近論を展開する。

§3.1 及び §4.1 では、誤差を推定値が真値よりも大きくなる誤差 (右側誤差) と推定値が真値よりも小さくなる誤差 (左側誤差) に別けて議論し、それらを同等な評価のみではなく、ある重みをつけた評価も同時に行う。このような議論を行うことによって両者の trade off を扱うことができる。一般には一様分布族の場合最大値と最小値の中間の値 (標本中点) が最適な推定量であると認識されている。しかし本稿で扱った一様分布族などの非正則なモデルにおいては最適な推定量は一意には決まらず最適性が重みの取り方に依存することの方が一般的であることが確かめられた。この現象は一様分布族において顕著にあらわれる (fig. 2)。 (大偏差, 極限分布双方に評価方法の下で確かめられた。(定理 2 及び定理 3)) 同時に、正則なモデルもしくは正則なモデルに近い場合は推定量の最適性が重みの取り方に依存しないことが確かめられた (fig. 1, fig. 4)。これは、正則なモデルについては従来の trade off を扱わない定式化で全く問題がないことを示している。

続いて、右側誤差と左側誤差を同等に評価する枠組みの下で位置共変モデルについてより詳しい考察を行った。§3.2 及び §4.2 ではある極限操作の取り替えに関してある病的な現象に注目した。この病的な現象は大偏差型の評価及び極限分布どちらの評価を採用してもモデルが非正則である場合に限って起る。以下この議論を §3.2 で扱った大偏差の場合に限ってこの現象の概略を述べる。大偏差型の評価では一般に真値から推定値が ϵ 以上ずれる確率の rate を ϵ の関数として考える。そして個々の推定量の rate の $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を調べる。一方それとは異なり ϵ を固定する毎に推定量についてその rate の上限を取り、その上限の $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を考えることもできる。両者は極限 $\epsilon \rightarrow +0$ と $\sup$ の順序が異なるだけである。従って安易に極限の取り換えを許すのであれば両者は一致する。実際、正則なモデルにおいては両者は一致する (64), (65)。しかしながら、非正則なモデルの場合には必ずしも両者

¹e-mail masahito@brain.riken.go.jp

²〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1

³パラメータ空間が特異点を持つという意味での非正則なモデルに関する研究があるが、本稿では一貫して上述の意味での非正則なモデルのみ扱うことにする。

は一致せず、異なる場合の方が一般的である。本稿で注目した例については推定量を位置共変なものに限定して考えたときに両者が一致しないことが確かめられた (62)(63)。ただし、モデルが非正則である場合に必ずそのような病的な現象が起きるとは限らず正則なモデルに近いときやモデルが対称であるときは両者は一致する。

この相違は以下に述べるように点推定と区間推定の相違という観点から捉えることができる。まず、 ϵ を固定したときの大偏差の評価は区間推定に対応していると考えることができ、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を考えたときの大偏差の意味で最適な推定量を考えることは点推定に対応していると考えることが出来る。したがって上記の2つの量の不一致から点推定が区間推定の極限として捉えることができないと考えられる。また逆に正則なモデルのときのように両者が一致する場合については点推定を区間推定の極限として捉えることができる。極限分布における同様の考察においても §4.2 で見るように同種の2つの極限式を考えることができる。そして非正則の場合には一般には両者が異なることが同様に確かめられ (87)(88)、正則なモデルもしくは正則なモデルに近い場合はそのような両者が一致することが確かめられる (89)-(92)。しかしながら、本文を読めば分るように大偏差の場合のように両者の違いを区間推定と点推定の相違に結び付けるという解釈ができない。

そのほか大偏差型の評価に限って様々な議論を §3 では扱った。§3.3 では右側誤差と左側誤差を同等に評価する枠組みで2次の漸近理論も扱った。正則なモデルでの大偏差型評価の下での高次の漸近論は Fu[4] により議論されているが本稿で扱うような非正則なモデルでの大偏差型評価の下での高次の漸近論は著者の知る限りなされていない。しかし、残念ながらこれについては達成可能な限界をほとんど求めることができず今後の課題となる。

そして §3.4 では大偏差型の評価における超有効性についても触れておいた。モデルが正則であるときには大偏差型の評価については相対エントロピー (Kullback-Leibler の divergence) の単調性から限界を導くことができる [5, 6] ため、MSE と異なり超有効性は起きない。しかしながら、モデルが非正則である場合は大偏差型の評価においても超有効な推定量が存在することが Ibragimov and Has'minskii [3] により指摘されている。ここでは本稿で行った定式化と超有効性との関係について述べる。

2 相対レニーエントロピー

後の節での議論の準備のため以下に定義する相対レニーエントロピー $I^s(p||q)$ を調べることから議論を始めることにする。

$$I^s(p||q) := -\log \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial r}(\omega) \right)^s \left(\frac{\partial q}{\partial r}(\omega) \right)^{1-s} r(d\omega) \right).$$

ただし、 p, q は Ω 上の確率分布で r は p, q の双方の確率測度に対して絶対連続になる Ω 上の測度である。なお、上の定義は r の取り方に依存しないことが容易に確認できる。また、本稿では s は $0 < s < 1$ となる任意の実数とする。

なお、本稿では確率空間 Ω 上の確率分布族 $\mathcal{S} := \{p_{\theta} | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ の有る確率分布 p_{θ} にしたがって独立な n 個生成される確率変数 $\omega_1, \dots, \omega_m$ から未知パラメータ θ を推定する関数 T_n の系列 $T := \{T_n\}$ を推定量と呼び、その漸近的挙動を上記の観点から考察することが目的となる。

2.1 相対レニーエントロピーの性質とその極限挙動

ここで相対レニーエントロピーの性質及び $I^s(p_{\theta}||p_{\theta+\epsilon})$ の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限での挙動についていくつかの具体例について調べておく。この計算は後のいくつかの具体例について調べる際に必要になる。まず相対レニーエントロピーについては以下の2つの以下の性質が知られている。

補題 1 p, q を Ω_1 上の確率分布とする。

$$I^s(p^n||q^n) = nI^s(p||q).$$

ただし, p^n は確率分布 p の n 個の独立同一分布とする. 次に f を Ω_1 から Ω_2 への可測写像とする. このとき以下の不等式が成立する.

$$I^s(p||q) \geq I^s(p \circ f^{-1}||q \circ f^{-1}).$$

さらに相対エントロピー $D(p||q) := \int_{\Omega} -\log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) p(d\omega)$ が収束するときについては以下の式が知られている.

$$D(p||q) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s(1-s)} I^s(p||q) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1-s)} I^s(q||p). \quad (1)$$

以下で確率分布族 $\mathcal{S}$ について 2 種の条件を導入する.

(A.1) 任意の $\theta, \theta' \in \Theta$ について $p_{\theta'}$ が p_{θ} について絶対連続であり, 以下の式が成り立つ.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2 s(1-s)} I^s(p_{\theta}||p_{\theta+\epsilon}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} D(p_{\theta}||p_{\theta+\epsilon}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} D(p_{\theta+\epsilon}||p_{\theta}) = \frac{1}{2} J_{\theta}. \quad (2)$$

(A.2) 任意の $\theta \in \Theta$ について以下の式が成り立つ.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2 s(1-s)} I^s(p_{\theta}||p_{\theta+\epsilon}) = \frac{1}{2} J_{\theta}. \quad (3)$$

なお, このとき Fisher 情報量 J_{θ} は以下で定義した.

$$J_{\theta_0} := \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \log \frac{\partial p_{\theta}}{\partial p_{\theta_0}}(\omega)}{\partial \theta} \right)^2 p_{\theta_0}(d\omega).$$

次に F を $\mathbb{R}$ 上の確率測度とし F_{ϵ} で $F_{\epsilon}([x, y]) = F([x + \epsilon, y + \epsilon])$ となる確率測度を表すことにする. そして確率分布族 $\mathcal{S}_p := \{F_{\theta}|\theta \in \mathbb{R}\}$ について注目する. そのために $I^s(F_{\theta}||F_{\theta+\epsilon})$ の $\epsilon \rightarrow 0$ での極限挙動を調べる. p のサポートが $\mathbb{R}$ のときは f が連続である限り正則であり扱いが容易である. 区間 (a, b) がサポートのときについては非正則な場合であり扱いは極めて難しい. 以下ではサポートが区間 (a, b) であり, 密度関数が f で記述される場合を扱う. 以下 (a, b) で微分可能かつ微分が連続となる確率密度関数 $f(x)$ に以下の 3 種の条件を考える.

(A.3) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = 0$ 及び $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f'(x) = 0$ が成立する.

(A.4) $f(x), 1/f(x)$ 及び $f'(x)$ が (a, b) で有界である.

(A.5) 十分小さい $\delta > 0$ がとれて以下の条件が満たされる. $f(x)$ 及び $1/f(x)$ は $(a + \delta, b - \delta)$ で有界でありかつ以下の式が成立する.

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1(x-a)^{\gamma_1-1}, \quad a < \forall x < a + \delta \\ f(x) &= A_2(b-x)^{\gamma_2-1}, \quad b - \delta < \forall x < b. \end{aligned}$$

定理 1 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限に関して以下の式が成立する. 条件 (A.3) の下で以下の式が成立する.

$$\int_a^{b-\epsilon} f^{1-s}(x) f^s(x+\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2 \quad (4)$$

$$\int_{a+\epsilon}^b f^{1-s}(x) f^s(x-\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2. \quad (5)$$

条件 (A.4) の下で以下の式が成立する.

$$\int_a^{b-\epsilon} f^{1-s}(x) f^s(x+\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - (sf(a) + (1-s)f(b))\epsilon - (sf'(a) - (1-s)f'(b))\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2 \quad (6)$$

$$\int_{a+\epsilon}^b f^{1-s}(x) f^s(x-\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - (sf(a) + (1-s)f(b))\epsilon - (sf'(a) - (1-s)f'(b))\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2. \quad (7)$$

ただし, 条件 (A.3) 及び (A.4) の下では Fisher 情報量 J_f は以下で定義される.

$$J_f := \int_a^b \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx.$$

条件 (A.5) の下で以下の式が成立する.

$$\int_a^{b-\epsilon} f^{1-s}(x) f^s(x+\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2 + A_1 C(\gamma_1, s, \epsilon) + A_2 C(\gamma_2, 1-s, \epsilon) \quad (8)$$

$$\int_{a+\epsilon}^b f^{1-s}(x) f^s(x-\epsilon) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} 1 - \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2 + A_1 C(\gamma_1, s, \epsilon) + A_2 C(\gamma_2, 1-s, \epsilon). \quad (9)$$

なお本稿では $B(\cdot, \cdot)$ でベータ関数を表し, $\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0}$ は $((\text{右辺}) - (\text{左辺}))/\epsilon^2$ が s に関して一様に 0 に収束することを意味することとする. $C(\gamma, s, \epsilon)$ 及び Fisher 情報量 J_f は以下で与えられる.

$$C(\gamma, s, \epsilon) := \begin{cases} B(\gamma + s - \gamma s, 1 - \gamma) \frac{s(\gamma-1)}{\gamma} \epsilon^\gamma & 0 < \gamma < 1 \\ s\epsilon & \gamma = 1 \\ B(\gamma + s - \gamma s, 2 - \gamma) \frac{s(1-s(\gamma-1))}{\gamma} \epsilon^\gamma & 1 < \gamma < 2 \\ \frac{s(1-s)}{2} \epsilon^2 \log \epsilon + \left(\frac{s(3s-5)}{4} + \frac{s(1-s)}{2} (E_u + \psi(2-s)) \right) \epsilon^2 & \gamma = 2 \\ 0 & \gamma > 2 \end{cases} \quad (10)$$

$$J_f := \int_{a+\delta}^{b-\delta} f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx + A_1 D(\gamma_1, \delta) + A_2 D(\gamma_2, \delta) \quad (11)$$

$$D(\gamma, \delta) := \begin{cases} \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma-2} \delta^{\gamma-2} & \gamma \neq 2 \\ \log \delta & \gamma = 2. \end{cases} \quad (12)$$

E_u は Euler の定数であり $\psi(x)$ はディ・ガンマ関数 ($\Gamma'(x)/\Gamma(x)$) である. ここで Fisher 情報量 J_f の定義は $\delta > 0$ の取り方に依存しないこと及び $\gamma_1, \gamma_2 > 2$ のときは条件 (A.2) の下での定義と一致していることに注意せよ.

この (8) 及び (9) に関して $0 < \gamma_1 = \gamma_2 \leq 2$ となるときに限定して議論する. ここで注目すべきことは Fisher 情報量 J_f の定義である. $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ となる場合を除きふつうに Fisher 情報量 J_f を定義すると発散する, (11) では発散の原因となる無限大の項を捨てることによって Fisher 情報量 J_f を定義している. この捨てられた無限大の項は $\gamma_1 = \gamma_2$ が 1 より大きいかな否かで, 符号が異なり, この項について適切な解釈を与えることは難しい.

証明 条件 (A.3) の下での (4) は補題 2 の (19) 及び (20) から得られる. さらに (4) に $s \mapsto (1-s), x \mapsto -x$ とすると (5) が導ける. 条件 (A.4) の下での (6) は補題 2 の (21) 及び (22) がから得られる. さらに (6) に $s \mapsto (1-s), x \mapsto -x$ とすると (7) が導ける. 同様にして条件 (A.5) の下での (8) は補題 2 から導くことができ, (9) は (8) から導くことができる. $\square$

条件 (A.3) の下で以下の式が成り立ち,

$$I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \frac{s(1-s)}{2} J_f \epsilon^2. \quad (13)$$

条件 (A.4) の下で以下の式が成り立つ.

$$I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} (sf(a) + (1-s)f(b))|\epsilon| + ((sf'(a) - (1-s)f'(b) + s(1-s)J_f + (sf(a) + (1-s)f(b))^2) \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (14)$$

(13) は Akahira[1] で得られた結果に含まれる内容であり, (14) の特殊な場合も Akahira[1] で得られた結果である.

そして条件 (A.5) の下で以下の式が成り立つ. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 1$ のときは以下の式が成立する.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\epsilon|^{\gamma_1}} I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) = \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} (A_1 s B(s + \gamma_1(1-s), 1-\gamma_1) + A_2(1-s)B(1-s + \gamma_1 s, 1-\gamma_1)). \quad (15)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときは以下の式が成立する.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\epsilon|} I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) = A_1 s + A_2(1-s). \quad (16)$$

$1 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ のときは以下の式が成立する.

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\epsilon|^{\gamma_1}} I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) \\ &= \frac{A_1 s(1-s(\gamma_1-1))B(s + \gamma_1(1-s), 2-\gamma_1) + A_2(1-s)(1-(1-s)(\gamma_1-1))B(1-s + \gamma_1 s, 2-\gamma_1)}{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときは以下の式が成立する.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\epsilon^2 \log |\epsilon|} I^s(F_\theta \| F_{\theta+\epsilon}) = \frac{(A_1 + A_2)s(1-s)}{2}. \quad (18)$$

さらに $\gamma_1 < \gamma_2$ のときには先のそれぞれの場合に $A_2 = 0$ を代入した式が成立する. さらに上記 (15-18) は $0 < s < 1$ に関して一様収束する.

補題 2 区間 (a, b) 内の点 c をとり

$$\tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) := \int_a^c f^{1-s}(x) f^s(x+\epsilon) dx, \quad \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) := \int_c^{b-\epsilon} f^{1-s}(x) f^s(x+\epsilon) dx$$

と定義し, ついで

$$I_s^-(c, f, \epsilon) := \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) - \int_a^c f(x) dx - f(c)s\epsilon - \frac{s}{2}f'(c)\epsilon^2,$$

$$I_s^+(c, f, \epsilon) := \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) - \int_c^b f(x) dx + f(c)s\epsilon + \frac{s}{2}f'(c)\epsilon^2.$$

と定義する. 条件 (A.3) の下で以下の式が成立する.

$$I_s^-(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \frac{s(s-1)}{2} J_f^- \epsilon^2 \quad (19)$$

$$I_s^+(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \frac{s(s-1)}{2} J_f^+ \epsilon^2. \quad (20)$$

条件 (A.4) の下で以下の式が成立する.

$$I_s^-(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} -f(a)s\epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} J_f^- - \frac{s}{2} f'(a) \right) \epsilon^2 \quad (21)$$

$$I_s^+(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} -f(b)(1-s)\epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} J_f^+ + \frac{1-s}{2} f'(b) \right) \epsilon^2. \quad (22)$$

なお条件 (A.3) 及び条件 (A.4) の下では J_f^-, J_f^+ は以下で定義した.

$$J_{f,c}^- := \int_a^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx, \quad J_{f,c}^+ := \int_c^b f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx.$$

条件 (A.5) の下で以下の式が成立する.

$$I_s^-(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} A_1 C(\gamma_1, s, \epsilon) - \frac{s(1-s)}{2} J_{f,c}^- \epsilon^2 \quad (23)$$

$$I_s^+(c, f, \epsilon) \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} A_2 C(\gamma_2, 1-s, \epsilon) - \frac{s(1-s)}{2} J_{f,c}^+ \epsilon^2. \quad (24)$$

ここで $J_{f,c}^-$ 及び $J_{f,c}^+$ は以下で定義した.

$$J_{f,c}^- := \int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + A_1 D(\gamma_1, \delta), \quad J_{f,c}^+ := \int_c^{b-\delta} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + A_2 D(\gamma_2, \delta).$$

2.2 相対レニーエントロピーと仮説検定

次にここで推定における大偏差型評価を行うために仮説検定における相対レニーエントロピーを用いた大偏差型評価について触れておく. 以下 p を帰無仮説, q を対立仮説とした仮説検定 $T := \{T_n\}$ を考える (n 個の独立な同一分布が有るときについて考える.)

$\beta(p, T_n)$: 真の分布が p であるにもかかわらず q と判断する確率.

$\beta(q, T_n)$: 真の分布が q であるにもかかわらず p と判断する確率.

とする.

$\beta(p, T_n) + \exp(-nr)\beta(q, T_n)$ を最小化する問題を考える.

補題 3 $I^s(q||p)$ が収束し, $\sup_{0 < s < 1} -rs + I^s(p||q) > 0$ とする. さらに $C := \text{supp}(p) \cap \text{supp}(q)$ 上で p, q は互いに絶対連続であるとする. このとき, 以下の不等式が成立する.

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\beta(p, T_n) + \exp(-nr)\beta(q, T_n)) \leq \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(q||p). \quad (25)$$

さらに仮説 p を採択する領域が $\{\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in C^n \mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log p(\omega_i) - \log q(\omega_i)) > -r\} \cup \text{supp}(p)^n \setminus C^n$ となる仮説検定 $T(r) := \{T(r)_n^{-1}(p)\}$ を用いたとき (25) で等号が成立する. そして以下の式が成立する.

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\beta(p, T(r)_n)) = \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(q||p) \quad \text{if } r \leq \frac{1}{q(C)} \int_C \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) q(d\omega) \quad (26)$$

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\beta(q, T(r)_n)) = \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(q||p) - r \quad \text{if } \frac{1}{p(C)} \int_C \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) p(d\omega) \leq r. \quad (27)$$

証明 (25) の左辺を最小化する検定は $T(r)$ であることが分る. したがって

$\frac{1}{p(C)} \int_C \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) p(d\omega) \leq \frac{1}{q(C)} \int_C \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) q(d\omega)$ となることと (26)(27) から (25) が導ける. 今 r が正であることは一切仮定していないので (26) が示せれば $r \rightarrow 1-r, s \rightarrow 1-s, p \rightarrow q, q \rightarrow p$ と置き換えることにより (27) が示せる. 以下 (26) を示す. Chernoff の補題 (Bahadur [5]) を用いると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta(p, T(r)_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p \left(\log \frac{\partial q}{\partial p}(\vec{\omega}_n) \geq nr \mid \vec{\omega} \in C^n \right) + \log p(C) \\ &= -\sup_{0 \leq s} \left(sr - \log \left(\frac{1}{p(C)} \int_C \exp \left(s \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) \right) p(d\omega) \right) \right) + \log p(C) \\ &= -\sup_{0 \leq s} \left(sr - \log \int_C \exp \left(s \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) \right) p(d\omega) \right). \end{aligned}$$

ここで $\psi_r(s) := sr - \log \int_C \exp \left(s \log \frac{\partial q}{\partial p}(\omega) \right) p(d\omega)$ とすると $\phi_r(t)$ は凹関数 (上に凸) となる. さらに (26) の条件より $\psi'_r(1) \leq 0$ となるしたがって

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log \beta(p, T(r)_n) = \sup_{0 \leq s \leq 1} \phi_r(s) = \sup_{0 \leq s \leq 1} rs + I^s(q||p).$$

となり (26) を得る. □

この補題 3 は以下のように一般化できる.

補題 4 p_n, q_n を確率空間 Ω_n 上の確率分布とし, $C_n := \text{supp}(p_n) \cap \text{supp}(q_n)$ 上で p_n, q_n は互いに絶対連続とする. さらに L_n を無限大に発散する単調増加数列とする. このとき, $0 < s < 1$ に対して $I^s(\vec{p}||\vec{q}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} I^s(p_n||q_n)$ が s について微分可能とする. その他 2 つの極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n p_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) p_n(d\omega)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n q_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) q_n(d\omega)$ の存在を仮定する. これらの条件の下で以下の式を得る.

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\beta(p_n, T_n) + \exp(-L_n r) \beta(q_n, T_n)) \leq \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(\vec{q}||\vec{p}). \quad (28)$$

さらに仮説 p_n を採択する領域が $\{\omega \in C_n | \log p_n(\omega) - \log q_n(\omega) > -L_n r\} \cup \text{supp}(p_n) \setminus C_n$ となる仮説検定 $T(r)_n$ について以下の式が成立する.

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log \beta(p_n, T(r)_n) = \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(\vec{q}||\vec{p}) \text{ if } r \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n q_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) q_n(d\omega) \quad (29)$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log \beta(q_n, T(r)_n) = \sup_{0 < s < 1} r(s-1) + I^s(\vec{q}||\vec{p}) \text{ if } r \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n p_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) p_n(d\omega). \quad (30)$$

証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n p_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) p_n(d\omega) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n q_n(C_n)} \int_{C_n} \log \frac{\partial q_n}{\partial p_n}(\omega) q_n(d\omega)$ であるから, 補題 3 の証明と同様の理由で (29) を示せば十分である.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log E_{p_n} \left(\frac{\partial q_n}{\partial p_n}^s \middle| C_n \right) = -I^s(\vec{p}||\vec{q}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n(C_n)$$

となる. ここで $E_{p_n}(X|C_n)$ は確率分布 p_n の下での確率変数 X の条件 $\omega \in C_n$ に関する条件付き期待値を表す. $\sup_{0 < s < 1} r(s-1) + I^s(\vec{p}||\vec{q})$ は有限区間 $(0, 1)$ で $\sup$ を考えているので, 関数 $r \mapsto \sup_{0 < s < 1} r(s-1) + I^s(\vec{p}||\vec{q})$ は連続である. この r に関する連続性と (29) での r に関する条件に注意して, Gärtner-Ellis の補題 (補題 5) を適用すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n \left(\log \frac{\partial q_n}{\partial p_n} \geq L_n r \middle| \omega \in C_n \right) = \sup_{0 < s < 1} \left(sr - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log E_{p_n} \left(\frac{\partial q_n}{\partial p_n}^s \middle| C_n \right) \right)$$

を得る. したがって以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log \beta(p_n, T(r)_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n \left(\log \frac{\partial q_n}{\partial p_n} \geq L_n r \middle| \omega \in C_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n(C_n) \\ &= \sup_{0 < s < 1} (sr + I^s(\vec{p}||\vec{q})). \end{aligned}$$

よって (29) を得た. □

韓 [7] には以下の形とは若干主張の異った Gärtner-Ellis の補題が述べられているがその証明を読むと以下の主張が証明されていることが分る.

補題 5 X_n を $\mathbb{R}$ に値を持つ確率分布 p_n に従う確率変数とし, $\{L_n\}$ を無限大に発散する単調増加数列とする. 有限開区間 (a, b) の任意の点 s に対して以下の極限が存在するとする.

$$\phi(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log E_{p_n}(e^{sX_n}). \quad (31)$$

このとき $\Gamma \subset \mathbb{R}$ に対して、以下の不等式が成立する。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n \{X_n \in \Gamma\} \leq - \inf_{R \in \bar{\Gamma}} I(R). \quad (32)$$

$\bar{\Gamma}$ は Γ の閉包を表すこととする。ここで $R \in \mathbb{R}$ に対して $I(R)$ は以下で定義した。このとき、 ϕ の凸性及び区間 (a, b) の有限性から $I(R)$ は連続となる。

$$I(R) := \sup_{s \in (a, b)} (sR - \phi(s)). \quad (33)$$

さらに $\phi(s)$ が开区間 (a, b) 上で微分可能であるとき、このとき集合 $\Lambda := \{\phi'(s) | s \in (a, b)\}$ は連結となり、 Λ の開部分集合 Λ' に対して以下の不等式が成り立つ。

$$- \inf_{R \in \Lambda'} I(R) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L_n} \log p_n \{X_n \in \Lambda'\}. \quad (34)$$

$R \in \Lambda$ については $I(R)$ は次の式でも与えることができる。 $R = \phi'(s_R)$ ($s_R \in (a, b)$) とすると $I(R) = s_R R - \phi(s_R)$ となる。

3 大偏差型評価

この節では support が重ならないという意味での非正則なモデルを含む一般の 1-パラメータ モデルのパラメータ推定を大偏差型評価の視点から扱う。

3.1 大偏差型評価における右側誤差と左側誤差の trade off

ここでは、推定値が真値より大きくなる誤差（右側誤差）と推定値が真値より小さくなる誤差（左側誤差）の 2 つに誤差を別けて議論し、モデルが非正則の場合には一般には両者の trade-off を扱う必要があることを見る。はじめに、推定量 $T, \epsilon > 0$ に対して $\beta^+(T, \theta, a), \beta^-(T, \theta, a)$ を以下で定義する。

$$\beta^+(T, \theta, a) := - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^n (T_n \geq a), \quad \beta^-(T, \theta, a) := - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^n (T_n \leq a).$$

また $\beta(T, \theta, \epsilon)$ を $\beta(T, \theta, \epsilon) := \min\{\beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon), \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon)\}$ で定義する。このとき、 $\beta^+(T, \theta, a)$ は a について単調増加であり、 $\beta^-(T, \theta, a)$ は a について単調減少である。

以下 $g(x)$ を $x \rightarrow 0$ で 0 に収束する連続関数とし以下の量を定義する。

$$\alpha^+(g, T, \theta) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon)}{g(\epsilon)}, \quad \alpha^-(g, T, \theta) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon)}{g(\epsilon)}, \quad \alpha(g, T, \theta) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\beta(T, \theta, \epsilon)}{g(\epsilon)}. \quad (35)$$

上記 2 つの量が存在し θ_0 の近傍で θ に関して一様に収束するとき T のことを θ_0 での g -両側 LD 型局所一様推定量と呼ぶことにする。一方、特に θ_0 での g -両側 LD 型局所一様推定量 T について以下の条件 (36) を満たすとき T を θ_0 での g -両側 LD 型局所共変推定量と呼ぶことにする。 g -右側 (左側) LD 型局所一様推定量及び g -右側 (左側) LD 型局所共変推定量についても同様に定義する。

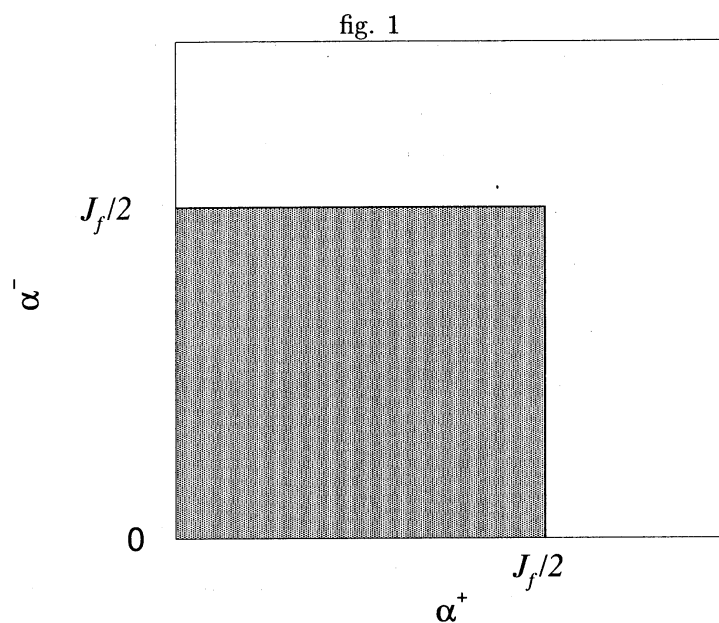
$$\alpha^+(g, T, \theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \alpha^+(g, T, \theta), \quad \alpha^-(g, T, \theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \alpha^-(g, T, \theta). \quad (36)$$

$\alpha^+(g, T, \theta_0)$ 等の量や LD 型局所共変性を導入する理由などについての詳しい解析は §3.4 を参照のこと。以下右側誤差と左側誤差の trade off を扱うために $\alpha^+(g, T, \theta)$ 及び $\alpha^-(g, T, \theta)$ の取りうる値の集合 $\mathcal{L}(g, \theta)$ を調べることにする。

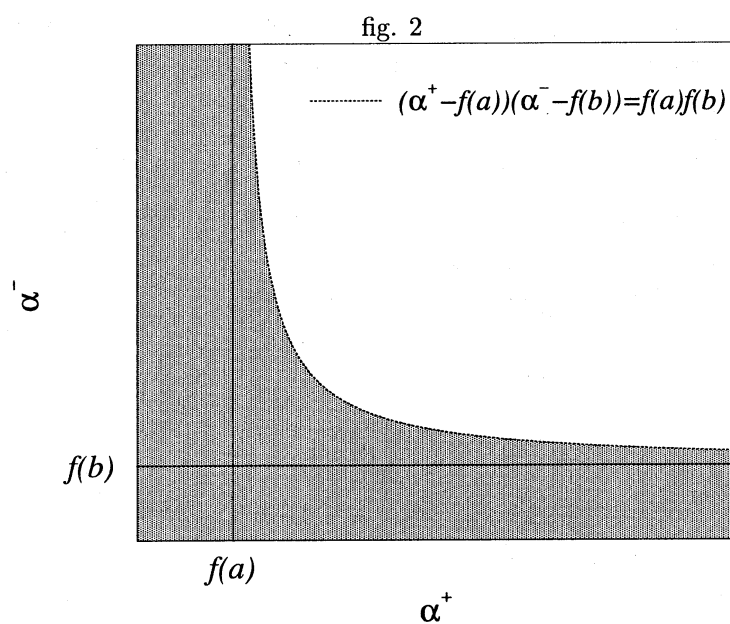
$$\mathcal{L}(g, \theta) := \{(\alpha^+(g, T, \theta), \alpha^-(g, T, \theta)) | T : \theta \text{ での } g\text{-LD 型局所共変推定量}\}.$$

各条件の下での $\mathcal{L}(g, \theta)$ は次のように図示できる。

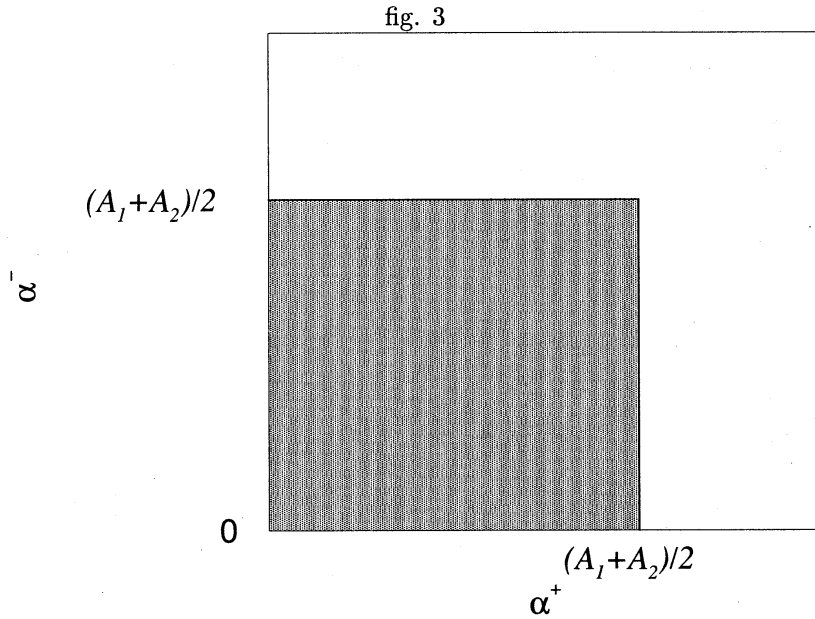
定理 2 条件 (A.2) の下では $g(x) = x^2$ とするとモデルが適当な正則性条件 (例えば条件 (A.3) を満たすときは満たされる.) を満たすならば $\mathcal{L}(g, \theta)$ の境界は fig. 1 で与えられる.



また条件 (A.4) の下では (条件 (A.5) の下での $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ときは含まれる.) $\mathcal{L}(g, \theta)$ の境界は fig. 2 で与えられる. このとき $g(x) = |x|$ とする.



また条件 (A.5) の下での $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ときは $\mathcal{L}(g, \theta)$ は fig. 3 で与えられる集合よりも狭い. このとき $g(x) = -x^2 \log |x|$ とする.



以下定理 2 の証明を与える. ここで $\beta^+(T, \theta, a), \beta^-(T, \theta, a)$ を下半連続になるように再定義したものを $\bar{\beta}^+(T, \theta, a), \bar{\beta}^-(T, \theta, a)$ と記すことにする.

$$\bar{\beta}^+(T, \theta, a) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta^+(T, \theta, a + \epsilon), \quad \bar{\beta}^-(T, \theta, a) := \lim_{\epsilon \rightarrow -0} \beta^-(T, \theta, a + \epsilon).$$

この $\bar{\beta}^+(T, \theta, a), \bar{\beta}^-(T, \theta, a)$ について以下の補題が成立する.

補題 6 $\theta' > \theta, 0 < s < 1$ に対して以下の条件が成立するとき,

$$\beta^+(T, \theta, \theta) = \beta^-(T, \theta', \theta') = 0,$$

以下の不等式が成立する.

$$\inf_{\{\theta'' | \theta' \geq \theta'' \geq \theta\}} s \bar{\beta}^+(T, \theta, \theta'') + (1-s) \bar{\beta}^-(T, \theta', \theta'') \leq I^s(p_\theta \| p_{\theta'}). \quad (37)$$

証明 m を任意の整数とし, 区間 $[\theta, \theta']$ を m 等分する. $i = 0, \dots, m$ に対して, $\theta_i := \theta + \frac{\theta' - \theta}{m} i$ と定義する. さらに任意の $\epsilon > 0$ に対して以下の条件を満たすような十分大きな整数 N をとる.

$$\frac{1}{n} \log p_\theta^n(T_n \geq \theta_i) \leq -\beta^+(T, \theta, \theta_i) + \epsilon, \quad \frac{1}{n} \log p_\theta^n(T_n \leq \theta_i) \leq -\beta^-(T, \theta, \theta_i) + \epsilon, \quad \text{for } \forall n \geq N, 0 \leq i \leq m.$$

相対レニーエントロピーの単調性より以下の式が導ける.

$$\begin{aligned}
& -nI^s(p_\theta \| p_{\theta'}) \\
& \leq \log \left((p_\theta^n(T_n \leq \theta))^s (p_{\theta'}^n(T_n \leq \theta))^{1-s} + (p_\theta^n(\theta' < T_n))^s (p_{\theta'}^n(\theta' < T_n))^{1-s} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m (p_\theta^n(\theta_{i-1} < T_n \leq \theta_i))^{1-s} (p_{\theta'}^n(\theta_{i-1} < T_n \leq \theta_i))^{1-s} \right) \\
& \leq \log \left((p_{\theta'}^n(T_n \leq \theta))^{1-s} + (p_\theta^n(\theta' < T_n))^{1-s} + \sum_{i=1}^m (p_\theta^n(\theta_{i-1} < T_n))^s (p_{\theta'}^n(T_n \leq \theta_i))^{1-s} \right) \\
& \leq \log \left(+ \exp(-ns(\beta^+(T, \theta, \theta') - \epsilon)) + \exp(-n(1-s)(\beta^-(T, \theta', \theta) - \epsilon)) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \exp(-n(s\beta^+(T, \theta, \theta_{i-1}) + (1-s)\beta^-(T, \theta', \theta_i) - \epsilon)) \right) \\
& \leq \log \left((m+2) \exp \left(-n \left(\min_{1 \leq i \leq m} s\beta^+(T, \theta, \theta_{i-1}) + (1-s)\beta^-(T, \theta', \theta_i) - \epsilon \right) \right) \right) \\
& = \left(\log(m+2) - n \left(\min_{1 \leq i \leq m} s\beta^+(T, \theta, \theta_{i-1}) + (1-s)\beta^-(T, \theta', \theta_i) - \epsilon \right) \right).
\end{aligned}$$

両辺を n で割った後で $n \rightarrow \infty$ を考えると,

$$I^s(p_\theta \| p_{\theta'}) \geq \left(\min_{1 \leq i \leq m} s\beta^+(T, \theta, \theta_{i-1}) + (1-s)\beta^-(T, \theta', \theta_i) - \epsilon \right)$$

となり $\epsilon > 0$ は任意であるから,

$$I^s(p_\theta \| p_{\theta'}) \geq \min_{1 \leq i \leq m} s\beta^+(T, \theta, \theta_{i-1}) + (1-s)\beta^-(T, \theta', \theta_i)$$

を得る. $m \rightarrow \infty$ を考えると (37) を得る.

次に定理 2 を示すために $t(T) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\beta^-(T, \theta, \theta + \epsilon)}{\beta^+(T, \theta, \theta - \epsilon)}$ と定義し, 以下の補題を準備する.

補題 7 $t(T) = t$ とし, T を θ での g -LD 型局所共変推定量とする. このとき以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned}
\alpha^+(g, T, \theta) & \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{g(\epsilon)}}{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} sg(\eta\epsilon) + (1-s)tg((1-\eta)\epsilon)}{g(\epsilon)}} \\
& = \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{sg(\eta\epsilon) + (1-s)tg((1-\eta)\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{38}$$

さらに g が凹関数であるとき (38) は以下のように変形できる.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{1}{\min\{s, (1-s)t\}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{g(\epsilon)}. \tag{39}$$

証明 ここで補題 6 を用いると, 以下の式が得られる.

$$\frac{1}{g(\epsilon)} \inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} s\bar{\beta}^+(T, \theta, \theta + \eta\epsilon) + (1-s)t\bar{\beta}^-(T, \theta + \epsilon, \theta + \eta\epsilon) \leq \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{g(\epsilon)}. \tag{40}$$

一方, $\alpha^-(g, T, \theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\bar{\beta}^-(T, \theta + \epsilon, \theta + \eta\epsilon)}{g((1-\eta)\epsilon)}$ であり, この収束は局所一様収束である. したがって (40) において $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考え, 極限の順序交換を行うと以下の式を得る.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} sg(\eta\epsilon) + (1-s)tg((1-\eta)\epsilon)}{g(\epsilon)} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{g(\epsilon)}.$$

したがって,

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \frac{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^s(p_\theta \| p_{\theta+\epsilon})}{g(\epsilon)}}{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} sg(\eta\epsilon) + (1-s)tg((1-\eta)\epsilon)}{g(\epsilon)}}$$

を得る. よって (38) を得た. □

まず正則なモデルもしくはそれに近いモデルの場合について考える.

補題 8 条件 (A.2) の下で $g(x) = x^2$ とすると (38) 式は以下のように書き換えられる.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{J_\theta}{2} & t < 1 \\ \frac{J_\theta}{2t} & t \geq 1. \end{cases} \quad (41)$$

したがって条件 (A.2) を満たすときは $\alpha^+(g, T, \theta)$ と $\alpha^-(g, T, \theta)$ の取りうる範囲の集合は $\mathcal{L}(\theta, g) \subset \{(x, y) | x \leq \frac{J_\theta}{2}, y \leq \frac{J_\theta}{2}\}$ となる. 特に

$$\alpha^+(g, T, \theta) = \alpha^-(g, T, \theta) = \frac{J_\theta}{2} \quad (42)$$

となる $g(x) = x^2$ -LD 型局所共変推定量 T が存在するときは, その推定量が最適となり trade off を考える必要が無い. なお, モデルに対する適当な正則性条件の下で最尤推定量が (42) を満たすことが示されている (Fu[6]). したがって補題 8 が示せると条件 (A.2) の下では適当な正則性条件の下で fig. 1 で $\mathcal{L}(\theta, g)$ とえられることが示せる. **証明** まず $g(x) = x^2$ であることから以下のような変形が出来る.

$$\begin{aligned} \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} sg(\eta\epsilon) + (1-s)tg((1-\eta)\epsilon)}{g(\epsilon)} &= \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} s\eta^2 + (1-s)t(1-\eta)^2}{g(\epsilon)} \\ &= \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} (s + (1-s)t) \left(\eta - \frac{(1-s)t}{s + (1-s)t} \right)^2 + \frac{s(1-s)t}{s + (1-s)t}}{g(\epsilon)} \\ &= \frac{s(1-s)t}{s + (1-s)t}. \end{aligned}$$

ここで条件 (A.2) を用いると (38) の右辺は $\inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{J_\theta}{2} \left(\frac{s}{t} + (1-s) \right)$ に書き換えられる. したがって (41) を得る. □

補題 9 条件 (A.5) の下で以下の式が成り立つ. なお, 条件 (A.4) の下では $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の場合と同種の式が成立する. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ の場合 $g(x) = |x|^{\gamma_1}$ と取る. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 1$ の場合以下の式を得る.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} \left(A_1 B \left(\frac{t+\gamma_1}{1+t}, 1-\gamma_1 \right) + A_2 \frac{1}{t} B \left(\frac{1+t\gamma_1}{1+t}, 1-\gamma_1 \right) \right). \quad (43)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の場合以下の式を得る.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq A_1 + \frac{1}{t} A_2. \quad (44)$$

さらに $1 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ の場合以下の式が得られる.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{A_1 s(1-s(\gamma_1-1))B(s+\gamma_1(1-s), 2-\gamma_1) + A_2(1-s)(1-(1-s)(\gamma_1-1))B(1-s+\gamma_1 s, 2-\gamma_1)}{\gamma_1 \inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} s\eta^{\gamma_1} + (1-s)t(1-\eta)^{\gamma_1}}. \quad (45)$$

そして $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときについては $g(x) = -x^2 \log x$ とすると以下の式が得られる.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{A_1+A_2}{2} & t < 1 \\ \frac{A_1+A_2}{2t} & t \geq 1. \end{cases} \quad (46)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 > 2$ のときは補題 8 を参照のこと. 特に $A_1 = A_2, t = 1$ のときは以下の式が成立する.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{2(1-\gamma_1)}{\gamma_1} A_1 B\left(\frac{1+\gamma_1}{2}, 1-\gamma_1\right) & 0 < \gamma_1 < 1 \\ 2A_1 & \gamma_1 = 1 \\ \frac{1}{\gamma_1} A_1 2^{\gamma_1} \left(1 - \frac{\gamma_1-1}{2}\right) B\left(\frac{1+\gamma_1}{2}, 2-\gamma_1\right) & 1 < \gamma_1 < 2 \\ A_1 & \gamma_1 = 2. \end{cases} \quad (47)$$

また $\gamma_1 < \gamma_2$ のときについては A_2 のところに 0 を代入すると良い.

したがって上記の補題 9 から $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ かつ $g(x) = |x|$ のときについては $\mathcal{L}(g, \theta) \subset \{(x, y) | y \leq A_1 A_2 / (x - A_1) + A_2\}$ となることが分る. 条件 (A.4) の下では同様に $\mathcal{L}(g, \theta) \subset \{(x, y) | y \leq f(a)f(b)/(x-f(a)) + f(b)\}$ となることが分り, $\mathcal{L}(g, \theta)$ が fig. 2 で与えられる領域に含まれることが確認できる.

同様に $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ かつ $g(x) = -x^2 \log |x|$ のときについては $\mathcal{L}(g, \theta) \subset \{(x, y) | x \leq \frac{A_1+A_2}{2}, y \leq \frac{A_1+A_2}{2}\}$ となり, 補題 9 から $\mathcal{L}(g, \theta)$ が fig. 3 で与えられる領域に含まれることが確認できる.

証明 $1 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ のときの (45) は補題 7 と (17) より自明. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 \leq 1$ のときについて考える. このとき $g(x) = |x|^{\gamma_1}$ は凹関数であるから, (39) が使える. 以下 $0 < \gamma_1 < 1$ のときに限定して考える. まず以下のよう h_1, h_2 を定義する.

$$h_1(s) := \frac{(1-\gamma_1)(A_1 s B(s+\gamma_1(1-s), 1-\gamma_1) + A_2(1-s)B(1-s+\gamma_1 s, 1-\gamma_1))}{\gamma_1 s}$$

$$h_2(s) := \frac{(1-\gamma_1)(A_1 s B(s+\gamma_1(1-s), 1-\gamma_1) + A_2(1-s)B(1-s+\gamma_1 s, 1-\gamma_1))}{\gamma_1(1-s)t}.$$

$h_1(\frac{t}{1+t}) = h_2(\frac{t}{1+t})$ であるから ((38) の右辺) = $\inf_{\{s|0 < s < 1\}} \max\{h_1(s), h_2(s)\} \leq h_1(\frac{t}{1+t}) = ((43) の右辺)$ となり (43) が得られる.

さらに $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときは (38) の右辺は次のように書き換えられ (44) を得る.

$$\inf_{\{s|0 < s < 1\}} \max\left\{\frac{A_2 + (A_1 - A_2)s}{s}, \frac{A_2 + (A_1 - A_2)s}{(1-s)t}\right\} = A_1 + A_2 \frac{1}{t}.$$

次に $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときについて考える. 以下の (48) が示せると (18) と (38) を組み合わせることにより補題 8 の証明と同様に (46) が得られる.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} -s(\eta\epsilon)^2 \log(\eta\epsilon) - (1-s)t((1-\eta)\epsilon)^2 \log((1-\eta)\epsilon)}{-\epsilon^2 \log \epsilon} = \frac{s(1-s)t}{s + (1-s)t}. \quad (48)$$

以下 (48) を示す. $h(\epsilon, \eta) := \frac{-s(\eta\epsilon)^2 \log(\eta\epsilon) - (1-s)t((1-\eta)\epsilon)^2 \log((1-\eta)\epsilon)}{-\epsilon^2 \log \epsilon}$ とおく. ここで $h(\epsilon, \eta)$ の定義式の分母は正になっていることに注意せよ. $h(\epsilon, \eta) \geq s\eta^2 + (1-s)(1-\eta)^2$ となることから,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \inf_{0 < \eta < 1} h(\epsilon, \eta) \geq \inf_{0 < \eta < 1} s\eta^2 + (1-s)(1-\eta)^2 \quad (49)$$

一方, $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} h(\epsilon, \eta) = s\eta^2 + (1-s)(1-\eta)^2$ となることから,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \inf_{0 < \eta < 1} h(\epsilon, \eta) \leq \inf_{0 < \eta < 1} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} h(\epsilon, \eta) = \inf_{0 < \eta < 1} s\eta^2 + (1-s)(1-\eta)^2 \quad (50)$$

となり,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \inf_{0 < \eta < 1} h(\epsilon, \eta) = \inf_{0 < \eta < 1} s\eta^2 + (1-s)(1-\eta)^2 = \frac{s(1-s)t}{s + (1-s)t} \quad (51)$$

を得る. したがって (46) を得た. $\square$

条件 (A.3)~条件 (A.5) の下で以下では具体的な推定量を構成して先に与えた下限を達成しているか調べる. まず以下のように最大値及び最小値を定義する. $\underline{\theta}_n := \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\} - a$, $\bar{\theta}_n := \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\} - b$ そして $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $\check{\theta}(\lambda) := \{\check{\theta}(\lambda)_n := \lambda \underline{\theta}_n + (1-\lambda) \bar{\theta}_n\}$ を定義する. これらの推定量について以下の補題が成り立つ.

補題 10 S が $\mathbb{R}$ の区間 (a, b) をサポートにもつ確率分布 (その密度関数を f とする.) がシフトするモデルであるとする. $0 < \lambda < 1$ とすると, 推定量 $\check{\theta}(\lambda)$ について以下の式が成り立つ.

$$\beta^+(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta + \epsilon) = -\log \left(\int_a^{b - \frac{\epsilon}{1-\lambda}} f(x) dx \right) \quad (52)$$

$$\beta^-(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta - \epsilon) = -\log \left(\int_{a + \frac{\epsilon}{\lambda}}^b f(x) dx \right). \quad (53)$$

補題 10 より $0 < \gamma_1 = \gamma_2 \leq 2$ のとき以下の式を得る.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon^{\gamma_1}} \beta^+(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta + \epsilon) = A_1 \frac{1}{\gamma_1 \lambda^{\gamma_1}} \quad (54)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon^{\gamma_1}} \beta^-(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta - \epsilon) = A_2 \frac{1}{\gamma_2 (1-\lambda)^{\gamma_2}}. \quad (55)$$

したがって条件 (A.5) の $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ のときについては少なくとも最適なオーダーを達成していることが分る. また条件 (A.4) の下では (もしくは条件 (A.5) の $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の場合)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \beta^+(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta + \epsilon) = f(a) \frac{1-\lambda}{\lambda} + f(a), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \beta^-(\check{\theta}(\lambda), \theta, \theta - \epsilon) = f(b) \frac{\lambda}{1-\lambda} + f(b)$$

となり λ を動かしたときの (α^+, α^-) の軌道が fig. 2 が与える領域が $\mathcal{L}(g, \theta)$ の境界と一致することが確かめられる. したがって定理 2 が示せた.

しかし, 条件 (A.5) の $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ 以外のときは補題 9 が与える First order の係数に関する bound を達成しない.

補題 10 の証明 $\bar{\omega}_n := \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\underline{\omega}_n := \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ とする. ここで扱う推定量は全て位置共変的なので, 以下では $\theta = 0$ のときのみ扱うこととする. その結合確率密度関数 $f_n(\bar{\omega}_n, \underline{\omega}_n)$ は以下で与えられる.

$$f_n(\bar{\omega}_n, \underline{\omega}_n) := \begin{cases} n(n-1) \left(\int_{\underline{\omega}_n}^{\bar{\omega}_n} f(x) dx \right)^{n-2} f(\underline{\omega}_n) f(\bar{\omega}_n) & \bar{\omega}_n \geq \underline{\omega}_n \\ 0 & \bar{\omega}_n < \underline{\omega}_n. \end{cases}$$

ここで

$$g(\underline{\omega}_n, \bar{\omega}_n) := \begin{cases} \int_{\underline{\omega}_n}^{\bar{\omega}_n} f(x) dx & \bar{\omega}_n \geq \underline{\omega}_n \\ 0 & \bar{\omega}_n < \underline{\omega}_n \end{cases}$$

とおくと, 以下の式を得る.

$$p_\theta^n(T_n \leq \theta - \epsilon) = \int_{\bar{\theta}(\lambda) \leq \epsilon} n(n-1)g(\underline{\omega}_n, \bar{\omega}_n)^n f(\underline{\omega}_n) f(\bar{\omega}_n) d\underline{\omega}_n d\bar{\omega}_n. \quad (56)$$

$f(\underline{\omega}_n)f(\bar{\omega}_n)$ 及び $g(\underline{\omega}_n, \bar{\omega}_n)$ の連続性より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_\theta^n(T_n \leq \theta - \epsilon) &= \sup_{\bar{\theta}(\lambda) \leq \epsilon} -\log g(\underline{\omega}_n, \bar{\omega}_n) \\ &= -\log \left(\int_a^{b - \frac{\epsilon}{1-\lambda}} f(x) dx \right) \end{aligned}$$

を得る. よって (52) を得た. (53) についても同様に導くことができる. なお (56) より以下の式が導ける.

$$p_\theta^n(T_n \leq \theta - \epsilon) \leq \left(\int_a^{b - \frac{\epsilon}{1-\lambda}} f(x) dx \right)^n. \quad (57)$$

□

ここで後の議論のため補題 3 の極限として得られる $\beta^-(T, \theta', \theta'')$, $\beta^+(T, \theta, \theta'')$ に関する補題を示す.

補題 11 $\theta, \theta' \in \Theta$ とする. さらに $\theta > \theta'' > \theta'$ となる $\theta'' \in \Theta$ を考える. $r \in \mathbb{R}$ について以下の不等式が成立する.

$$\min\{\beta^-(T, \theta', \theta'') + r, \beta^+(T, \theta, \theta'')\} \leq \sup_{0 < s < 1} rs + I^s(p_{\theta'} \| p_\theta). \quad (58)$$

証明 $p_\theta, p_{\theta'}$ の仮説検定を考えて補題 3 を適用すればよい.

□

この補題の極限として以下の補題を得る. 次に補題 11 から α^+ に関する評価式を導く.

補題 12 条件 (A.5) が成立し, $0 < \gamma_1 = \gamma_2 \leq 2, A_1 = A_2, t = 1$ とする. このとき以下の式を得る.

$$\alpha^+(g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{2^{\gamma_1(1-\gamma_1)}}{\gamma_1} A_1 B\left(\frac{1+\gamma_1}{2}, 1-\gamma_1\right) & 0 < \gamma_1 < 1, \quad g(x) = |x|^{\gamma_1} \\ 2A_1 & \gamma_1 = 1, \quad g(x) = |x| \\ \frac{A_1 2^{\gamma_1}}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\gamma_1-1}{2}\right) B\left(\frac{1+\gamma_1}{2}, 2-\gamma_1\right) & 1 < \gamma_1 < 2, \quad g(x) = |x|^{\gamma_1} \\ A_1 & \gamma_1 = 2, \quad g(x) = -x^2 \log |x|. \end{cases} \quad (59)$$

$0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 1$ のときに注目すると (47) で与えた評価よりも (59) で与えた評価の方が優れていることが分る. したがって必ずしも補題 6 の極限から得られる限界が達成可能とは限らない.

証明 定理 1 を参考にしながら補題 11 に $r = 0, \theta'' = \theta + \epsilon, \theta' = \theta + 2\epsilon$ を代入して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると (59) を得る.

□

3.2 極限の取り替え

以下では, ある極限操作の取り替えに関する議論を行う. 著者の知る限り同種の極限操作の取り替えに関する議論は長岡 [8, 9] にはじめて見られる. 以下で扱う状況では個々の極限操作が, 点推定と区間推定の極限に対応することに注目し, それらが, 非正則なモデルでは必ずしも一致しないことを確認する.

尤度比推定量と呼ばれる推定量 $\tilde{\theta}_{c,\epsilon} = \{\tilde{\theta}_{n,c,\epsilon}\}$ を導入する. 尤度比推定量はモデルが正則であるときには Huber[10] により定義されたが, 本稿では非正則な場合にもこれを拡張する. この推定量は S が $\mathbb{R}$ 上の確率分布がシフトするモデルであり, $d_\epsilon(x) := f(x+\epsilon)/f(x-\epsilon)$ が $-\infty, \infty$ を含めて x に関して単調減少のときに定義される.

以下の手順で尤度比推定量 $\tilde{\theta}_{c,\epsilon}$ を定数 c と $\epsilon > 0$ に依存して定義する.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log f(x_i + \tilde{\theta}_{n,c,\epsilon} + \epsilon) - \log f(x_i + \tilde{\theta}_{n,c,\epsilon} - \epsilon) \right) - c = 0. \quad (60)$$

(60) の解として $\tilde{\theta}_{c,\epsilon} := \{\tilde{\theta}_{n,c,\epsilon}(x_1, \dots, x_n)\}$ を定義する. もし解が存在しないときは ((60) の左辺が不連続で 0 を飛び越えるときは) 0 を飛び越えたときの値を推定値とする. また解が複数存在するときはどれをとってもかまわない. ただし, f のサポートが (a, b) のときは以下のように定義を書き換える必要がある. $\underline{\theta}_n - \bar{\theta}_n > 2\epsilon$ のときは (60) の解 $\tilde{\theta}_{n,c,\epsilon}$ は $\underline{\theta}_n - \epsilon$ から $\bar{\theta}_n + \epsilon$ の範囲でのみ考えて推定値 $\tilde{\theta}_{c,\epsilon}$ を決定する. $\underline{\theta}_n - \bar{\theta}_n \leq 2\epsilon$ のときは $\tilde{\theta}_{n,c,\epsilon} := \frac{1}{2} (\underline{\theta}_n + \bar{\theta}_n)$ と定義する.

ここで, 定義した尤度比推定量 $\tilde{\theta}_{c,\epsilon}$ は shift-invariant である. この推定量について以下の補題が成立する. (正則な場合については Huber[10] Sievers[11] Fu[12] を参照のこと.) 以下の補題の $c = 0$ の場合は区間推定の限界を表していると考えることができる.

補題 13 $d_\epsilon(x)$ が $-\infty, \infty$ を含めて単調減少であるとする. このとき, 尤度比推定量 $\tilde{\theta}_{c,\epsilon}$ について以下の式が成立する.

$$\min\{\beta^-(\tilde{\theta}_{c,\epsilon}, \theta, \theta - \epsilon) + c, \beta^+(\tilde{\theta}_{c,\epsilon}, \theta, \theta + \epsilon)\} = \sup_{0 < s < 1} cs + I^s(F_{\theta+2\epsilon} \| F_\theta).$$

上記の条件を満たすものは定理 1 で扱った例の中では $1 \leq \gamma_1, \gamma_2$ のときに限られる. さらに, 上記の条件を満たすとき推定量として $T_n := \tilde{\theta}_{n,c,\epsilon} + \eta\epsilon$ ($-1 < \eta < 1$) と定義すると補題 11 で $\theta' = \theta + 2\epsilon, \theta'' = \theta + (1 - \eta)\epsilon$ の場合の式 (58) で等号が成立する.

位置共変モデルで条件 (A.5) の下で $1 \leq \gamma_1, \gamma_2$ で尤度比推定量が存在するときについては以下の式が成立する.

$$\sup \{ \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \} = \sup_{0 < s < 1} I^s(F_{\theta+2\epsilon} \| F_\theta).$$

ここで $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取ると以下の式を得る.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{g(\epsilon)} \sup \{ \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{g(\epsilon)} \sup_{0 < s < 1} I^s(F_{\theta+2\epsilon} \| F_\theta). \quad (61)$$

(61) は区間推定の極限を表す式と考えることができ, 以下点推定の場合に対応する式 (補題 7 が与える下限) との比較を条件 (A.4) が成り立つ場合と (A.3) が成立する場合の 2 つの場合について行う.

条件 (A.4) が成り立ち十分小さな $\epsilon > 0$ について尤度比推定量が存在するとき以下のように極限の順序を取り替えることによって以下のように異なる値が得られる.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \sup \{ \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \} = 2 \max\{f(a), f(b)\} \quad (62)$$

$$\sup \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \right\} = f(a) + f(b). \quad (63)$$

なお条件 (A.3) の下で尤度比推定量が存在する場合には以下の式が成立し (62), (63) のような病的な現象は起きない.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon^2} \sup \{ \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \} = \frac{J_f}{2} \quad (64)$$

$$\sup \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon^2} \min \{ \beta^-(T, \theta, \theta - \epsilon), \beta^+(T, \theta, \theta + \epsilon) \} \mid T: \text{位置共変推定量} \right\} = \frac{J_f}{2}. \quad (65)$$

条件 (A.5) の下で $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ となり, 尤度比推定量が存在する場合には十分な解析が出来ていないが条件 (A.3) が成立する場合と同じように両者は一致すると思われる.

3.3 2 次漸近論

モデルが条件 (A.4) を満たす場合の 2 次の評価を大偏差の視点から行う. 大偏差の枠組みでの高次の議論は Fu[4] によりなされたが, 非正則な場合については全くなされていない. 一方, 情報量損失の観点からの 2 次の評価は非正則な場合について Akahira[1] によりなされた研究がある.

定義 1 推定量 $T = \{T_n\}$ に対して 2 次式 h が以下の条件 (66) を満たすとき 2 次式 h を $h(T, \theta)$ で表すことにする.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\beta(T, \theta, \epsilon) - h(\epsilon)}{\epsilon^2} = 0. \quad (66)$$

(66) を満たす 2 次式 h は存在すれば一意である. $h(T, \theta)$ は存在すれば一意である. 同様に $h^+(T, \theta), h^-(T, \theta)$ を定義する. 推定量 $T = \{T_n\}$ について式 (66) の左辺が θ_0 の適当な近傍で一様収束するとき両側 2 次 LD 型局所一様であるということにする. さらに推定量 $T = \{T_n\}$ が両側 2 次 LD 型局所一様性に加えて

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} h(T, \theta) = h(T, \theta_0)$$

を満たすとき両側 2 次 LD 型局所共変と呼ぶことにする. 同様に右側 (左側) 2 次 LD 型局所一様性及び右側 (左側) 2 次 LD 型局所共変性を定義することとする.

ただ, β^+ と β^- に関する trade-off を含めた意味での 2 次の評価は極めて難しいので先ほどまでのように trade-off を扱う議論は行わず, もう少し特殊な問題設定の下で考える.

定理 3 モデルが条件 (A.4) を満たしかつ $f(a) = f(b)$ とする. 推定量 $T = \{T_n\}$ が両側 2 次 LD 型局所共変であるとき以下の式が成立する.

$$h(T, \theta)(x) \leq \begin{cases} 2f(a)x + 2(f(a)^2 + f'(a))x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} > 1 \\ 2f(a)x + 2\left(f(a)^2 - f'(b) + \frac{(J_f + f'(a) + f'(b))^2}{J_f}\right)x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad 0 \leq \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} \leq 1 \\ 2f(a)x + 2(f(a)^2 - f'(b))x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} < 0 \\ 2f(a)x + 2(f(a)^2 + \min\{f'(a), -f'(b)\})x^2 & \text{if } J_f = 0 \end{cases} \quad \forall x > 0. \quad (67)$$

証明 補題 11 より $\beta(T, \theta, \epsilon) \leq \sup_{0 < s < 1} I^s(F_\theta \| F_{\theta+2\epsilon})$ が成り立つ. さらに (14) の s に関する一様収束性及び T の両側 2 次 LD 型局所共変性より

$$\begin{aligned} h(T, \theta)(x) &\leq \sup_{0 < s < 1} f(a)2x + (sf'(a) - (1-s)f'(b) + s(1-s)J_f + f^2(a)) \frac{(2x)^2}{2} \\ &= \begin{cases} 2f(a)x + 2(f(a)^2 + f'(a))x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} > 1 \\ 2f(a)x + 2\left(f(a)^2 - f'(b) + \frac{(J_f + f'(a) + f'(b))^2}{J_f}\right)x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad 0 \leq \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} \leq 1 \\ 2f(a)x + 2(f(a)^2 - f'(b))x^2 & \text{if } J_f \neq 0, \quad \frac{J_f + f'(a) + f'(b)}{2J_f} < 0 \\ 2f(a)x + 2(f(a)^2 + \min\{f'(a), -f'(b)\})x^2 & \text{if } J_f = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

となり題意が成り立つ. □

定理 3 の (67) が与える限界を達成する推定量の存在が興味のあるところであるが残念ながら今のところそのような推定量の存在は確認できていない. 例えば先に定義した推定量 $\check{\theta}(\lambda)$ については $\lambda = 1/2$ のときには式 (52), (53) より $f(a) = f(b)$ となる条件に注意すると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} h^+ \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right), \theta \right) (x) &= 2f(b)x + 2(-f'(b) + f^2(b))x^2 \\ h^- \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right), \theta \right) (x) &= 2f(a)x + 2(f'(a) + f^2(a))x^2 \\ h \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right), \theta \right) (x) &= 2f(a)x + 2(\min\{f'(a), -f'(b)\} + f^2(a))x^2, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

特に $J_f = 0$ のとき (例えば一様分布族) の場合には (67) が与える限界を達成していることが分る. しかしながら $J_f \neq 0$ となる場合についてはここで提案した推定量では (67) が与える限界を達成しない. Akahira[1] によると, 最大値 $\bar{\theta}$ 最小値 $\underline{\theta}$ に対数微分を組み合わせたものが, 漸近 2 次の意味で情報量損失が無い. したがって $\check{\theta}(\frac{1}{2})$ に如何に対数微分の情報を組み合わせて推定量を改良するかが課題となる.

3.4 超有効性と LD 型局所共変性

以下では §3.1 で導入した LD 型局所共変性と Ibragimov and Has'minskii [3] により指摘された超有効性との関係について考える. 以下の内容に関する総合的な日本語の文献として赤平 [13] がある. モデルが条件 (A.1) を満たす (正則である) 場合では大偏差型の限界は Bahadur [5] により Kullback-Leibler の divergence の単調性を利用して弱一様性のみを課すだけで限界が得られることが知られている. そのため, MSE 型の評価と異なり超有効性が生じない. しかしながら, 本稿で扱う例のように support が重ならない非正則なモデルでは divergence が発散するため divergence の単調性からは意味のある限界を導くことができない. そのため本稿では相対レニーエントロピーを用いて大偏差型の限界を導出した. §3.1 での限界の導出には弱一様性に加えてさらに強い条件すなわち LD 型局所共変性を課した. 非正則なモデルについては推定量に弱一様性を課すのみでは Ibragimov and Has'minskii [3] により指摘された以下の例 1 にあるように超有効性を排除できない. 例 1 は §3.1 で与えられた限界の導出に関して LD 型局所共変性が本質的であることを示している.

例 1 一様分布族を考える. すなわち密度関数 $f_\theta(x)$ が以下で定義される確率分布族 $\{p_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$ を考える.

$$f_\theta(x) := \begin{cases} 1, & |\theta - x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |\theta - x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

そして $X_1, \dots, X_n$ を確率分布 p_θ に従う確率変数とする. $\check{\theta}(\frac{1}{2})$ は限界を達成する LD 型局所共変推定量であった. $\check{\theta}(\frac{1}{2})$ を以下のように変形して $\check{\theta}(\frac{1}{2})'$ を以下のように構成する.

$$\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'_n := \begin{cases} 0 & \text{全ての } k \text{ について } X_k \in [-1/2, 1/2] \\ \check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)_n & \text{上記以外.} \end{cases}$$

このとき, 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-2\epsilon)^n - (1-\theta)^n &\leq p_\theta^n \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'_n \geq \theta + \epsilon \right) \leq \frac{1}{2}(1-2\epsilon)^n & \text{if } 0 < \theta \\ p_\theta^n \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'_n \geq \theta + \epsilon \right) &= 0 & \text{if } 0 = \theta \\ p_\theta^n \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'_n \geq \theta + \epsilon \right) &\leq \frac{1}{2}(1-2\epsilon)^n & \text{if } -\epsilon < \theta < 0 \\ (1+\theta)^n, \frac{1}{2}(1-2\epsilon)^n &\leq p_\theta^n \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'_n \geq \theta + \epsilon \right) \leq \frac{1}{2}(1-2\epsilon)^n + (1+\theta)^n & \text{if } \theta < -\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって任意の $\epsilon > 0$ について以下の式を得る。

$$\beta^+ \left(\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)', \theta, \theta + \epsilon \right) = \begin{cases} = -\log(1 - 2\epsilon), & \text{if } 2\epsilon \leq \theta \\ \geq -\log(1 - 2\epsilon), & \text{if } 0 < \theta < 2\epsilon \\ = \infty, & \text{if } \theta = 0 \\ \geq -\log(1 - 2\epsilon), & \text{if } -\epsilon < \theta < 0 \\ = -\log(1 + \theta), & \text{if } -2\epsilon < \theta \leq -\epsilon \\ = -\log(1 - 2\epsilon), & \text{if } \theta \leq -2\epsilon. \end{cases}$$

この場合は (35) で一様収束していないので定理 9 は適用できないが $g(x) = |x|$ とすると以下のように計算できる。

$$\alpha^+ \left(g, \check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)', \theta \right) = \begin{cases} \infty & \text{if } \theta = 0 \\ 2 & \text{if } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (68)$$

同様にして以下の式を得る。

$$\alpha^- \left(g, \check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)', \theta \right) = \begin{cases} \infty & \text{if } \theta = 0 \\ 2 & \text{if } \theta \neq 0. \end{cases}, \quad \alpha \left(g, \check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)', \theta \right) = \begin{cases} \infty & \text{if } \theta = 0 \\ 2 & \text{if } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (69)$$

上記の例 1 では LD 型局所共変性を満たさない推定量 $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'$ は (54), (55), (68) 及び (69) より $\alpha(x, \check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)', \theta)$ に注目する限り, $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'$ よりも良くなったように見えるが, 以下に述べる理由から必ずしも良くなったとは言えない。

まず, あくまでも $\alpha(g, T, \theta)$ は $\beta(T, \theta, \epsilon)$ の $\epsilon > 0$ が十分小さいときの挙動をあらわすために導入した量であることに注意してもらいたい。本来, 推定量 T' が推定量 T より大偏差の意味での優越はたとえば以下で定義されるべきである。すなわち, 任意の $\theta \in \Theta, \epsilon > 0$ について $\beta(T', \theta, \epsilon) \geq \beta(T, \theta, \epsilon)$ となるときに推定量 T' は推定量 T より大偏差の意味で優越すると言える。

しかしながら一般に任意の $\epsilon > 0$ についての $\beta(T, \theta, \epsilon)$ などの大小関係から推定量の優越を議論することは変数などが多く一般には極めて難しい。この議論を簡単にするために導入された量が $\alpha(g, T, \theta)$ などである。これらの量は先に定義した LD 型局所共変性を満たすときはこれらの量の大小関係が以下の議論を経ることによって $\beta(T, \theta, \theta + \epsilon)$ 等の量の大小関係に結び付けることが可能である。

すなわち真のパラメータが Θ のコンパクト部分集合 Θ_0 に含まれていることが既知であるとする。任意の $\theta \in \Theta_0$ について $\alpha(g, T', \theta) \geq \alpha(g, T, \theta)$ とすると任意の $\delta > 0$ に対して十分小さな $\epsilon_0 > 0$ をとると以下の式が成立する。

$$\beta(T', \theta, \epsilon) + \delta g(\epsilon) \geq \beta(T, \theta, \epsilon), \quad \epsilon_0 > \epsilon > 0, \theta \in \Theta_0 \quad (70)$$

すなわち LD 型局所共変性が満たされるときは上記のように $\alpha(g, T, \theta)$ に関する不等式を $\beta(T, \theta, \epsilon)$ に関する不等式に結び付けることができる。

逆に LD 型局所共変性が満たされないときは, 未知のパラメータ $\theta \in \Theta_0$ に関して一様に $\epsilon_0 > 0$ を取ることができないので $\alpha(g, T, \theta)$ に関する不等式を $\beta(T, \theta, \epsilon)$ に関する不等式に結び付けることはできない。先の例 1 で扱った推定量 $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'$ は LD 型局所共変性をみたしておらず, α の大小関係を β の大小関係に結び付けることができない。そのため, このような状況ではたとえ α の大小関係において $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'$ の方が $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)$ より優れているとしても $\check{\theta} \left(\frac{1}{2} \right)'$ の方が優れていると判断できない。したがって, $\alpha(g, T, \theta)$ を用いて推定量の優越を評価するためには, 先に導入した LD 型局所共変性を満たす推定量に制限する必要がある。同様の現象は以下に扱う以下の例 2 においても現れる [3]。

例 2 確率密度関数 $f(x)$ が条件 (A.3) を満たすときについて考える。最尤推定量を $\hat{\theta}_{ML} := \{\hat{\theta}_{ML,n}\}$ と書き $g(x) = x^2$ とすると以下の不等式を得る。

$$\alpha(g, \hat{\theta}_{ML}, \theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\hat{\theta}_{ML}, \theta, \epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{J_f}{2}. \quad (71)$$

したがって (41) が与える限界を最尤推定量は達成している. また, 最尤推定量は位置に関して共変であるから, (71) は θ に関して一様収束している. さらに, 次に最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ を変形して $\hat{\theta}'_{ML} := \{\hat{\theta}'_{ML,n}\}$ を以下のように構成する.

$$\hat{\theta}'_{ML,n} := \begin{cases} 0 & \text{全ての } k \text{ について } X_k \in [-1, 1] \\ \hat{\theta}_{ML,n} & \text{上記以外.} \end{cases}$$

このとき先ほどと同じような計算をすると, $g(x) = x^2$ の下で以下の式を得る.

$$\alpha(g, \hat{\theta}'_{ML}, \theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(\hat{\theta}'_{ML}, \theta, \epsilon)}{\epsilon^2} = \begin{cases} \infty, & \text{if } \theta = 0 \\ \frac{J_\theta}{2}, & \text{if } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (72)$$

LD-型局所共変であれば不等式 (41) が成立する事実の対偶を考えると, (72) から推定量 $\hat{\theta}'_{ML}$ は LD-型局所共変でないことが確かめられる.

4 極限分布に関する漸近論

この節では大偏差ではなく極限分布に注目することによって漸近論を展開する.

4.1 極限分布に関する右側誤差と左側誤差の trade off

まずはじめに §3.1 で扱った右側誤差と左側誤差に関する trade-off を極限分布に注目する形で議論する. 単調増加数列 $\vec{a} := \{a_n\}$ 及び推定量 T に対して以下の量収束するとき $P(\vec{a}, T, \theta)(x, y)$ を以下のように定義する.

$$P(\vec{a}, T, \theta)(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_\theta^n(\theta + y/a_n \geq T_n \geq \theta + x/a_n).$$

そして $P(\vec{a}, T, \theta)(x, y)$ で定義される $\mathbb{R}$ 上の確率分布を $P(\vec{a}, T, \theta)$ で表すことにする. 数列 $\vec{a}$ に対して推定量 T が以下の条件を満たすとき θ で $\vec{a}$ -局所共変であると呼ぶことにする.

$$P(\vec{a}, T, \theta)(x - \epsilon, y - \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\theta + \epsilon/a_n}^n(\theta + y/a_n \geq T_n \geq \theta + x/a_n).$$

補題 14 推定量 T を θ で $\vec{a}$ -局所共変推定量とする. このとき以下の不等式を得る.

$$I^s(P(\vec{a}, T, \theta) \| P(\vec{a}, T, \theta)_\epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta + \epsilon/a_n}^n).$$

証明 相対レニーエントロピーの単調性と局所共変性を用いると明らか. □

補題 15 数列 $\vec{a}$ がある $0 < s < 1$ について以下の条件を満たすとする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta + \epsilon/a_n}^n) = 0.$$

このとき θ で $\vec{a}$ -局所共変推定量は存在しない.

以下では数列 $\vec{a} = \{a_n\}$ が以下の条件を満たす場合についてのみ考え, 推定量 T は θ で $\vec{a}$ -局所共変とする.

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta + \epsilon/a_n}^n) < \infty \quad \text{for } 0 < \forall s < 1.$$

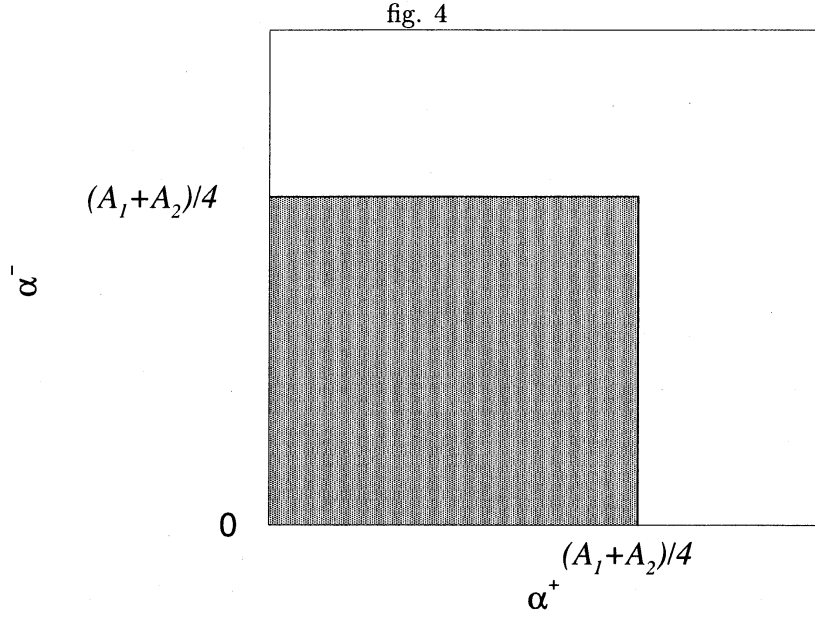
そして $\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta), \alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)$ を以下で定義する.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) := - \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty)}{g(L)}, \quad \alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta) := - \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\log P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L)}{g(L)}.$$

$(\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta), \alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta))$ のなす集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ ((73) で定義される.) について次の定理が成立する.

$$\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta) := \{(\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta), \alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)) | T : \vec{a}\text{-局所共変推定量}\}. \quad (73)$$

定理 4 条件 (A.2) の下では適当な条件が満たされ, $\vec{a} = \{\sqrt{n}\}, g(L) = L^2$ とするとき, 集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は fig. 1 で与えられる. また条件 (A.4) の下では $\vec{a} = \{n\}, g(L) = L$ とするとき, 集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は fig. 2 で与えられ, 条件 (A.5) の $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときは $\vec{a} = \{\sqrt{n \log n}\}, g(L) = L^2$ とすると集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は以下の fig. 4 で与えられる.



以下定理 4 の証明に必要な補題を準備する.

補題 16 $t = \frac{\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)}{\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)}$ とするとき以下の式が成立する.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)}}{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\inf_{0 \leq \eta \leq 1} (1-s)tg((1-\eta)L) + sg(\eta L)}{g(L)}} \quad (74)$$

$$= \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{\inf_{0 \leq \eta \leq 1} (1-s)tg((1-\eta)L) + sg(\eta L)}. \quad (75)$$

さらに g が凹関数であるとき (74) は以下のように書き換えられる.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{1}{\min\{s, (1-s)t\}} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)}.$$

証明 m を任意の正の整数とする. そして任意の $\epsilon > 0$ に対して以下の条件を満たす $L_0 > 0$ を取る. 任意の $L \geq L_0$ に対して以下の不等式が成立する.

$$\log P(\vec{a}, T, \theta) \left(\frac{L}{m}, \infty \right) \leq -\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g(L) + \epsilon, \quad \log P(\vec{a}, T, \theta) \left(-\infty, -\frac{L}{m} \right) \leq -\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g(L) + \epsilon.$$

補題 16 及び相対レニーエントロピーの単調性より以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}
& - \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n) \\
& \leq \log \left((P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, 0))^s (P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L))^{1-s} + (P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty))^s (P(\vec{a}, T, \theta)(0, \infty))^{1-s} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \left(P(\vec{a}, T, \theta) \left(\frac{i-1}{m}L, \frac{i}{m}L \right) \right)^s \left(P(\vec{a}, T, \theta) \left(\frac{i-1-m}{m}L, \frac{i-m}{m}L \right) \right)^{1-s} \right) \\
& \leq \log \left((P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L))^{1-s} + (P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty))^s + \sum_{i=1}^m \left(P(\vec{a}, T, \theta) \left(\frac{i-1}{m}L, \infty \right) \right)^s \left(P(\vec{a}, T, \theta) \left(-\infty, \frac{i-m}{m}L \right) \right)^{1-s} \right) \\
& \leq \log \left(\exp(1-s) (-\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g(L) + \epsilon) + \exp s (-\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g(L) + \epsilon) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \exp \left(s \left(-\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{i-1}{m}L \right) + \epsilon \right) + (1-s) \left(-\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{m-i}{m}L \right) + \epsilon \right) \right) \right) \\
& \leq \log \left((m+2) \exp \left(- \min_{1 \leq i \leq m} s\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{i-1}{m}L \right) + (1-s)\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{m-i}{m}L \right) + \epsilon \right) \right) \\
& = \log(m+2) - \left(\min_{1 \leq i \leq m} s\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{i-1}{m}L \right) + (1-s)\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{m-i}{m}L \right) \right) + \epsilon.
\end{aligned}$$

さらに両辺を $g(L)$ で割った上で $L \rightarrow \infty$ の極限を考えると以下の式を得る.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)} \geq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\min_{1 \leq i \leq m} s\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{i-1}{m}L \right) + (1-s)\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{m-i}{m}L \right) - \epsilon}{g(L)}.$$

ここで $\epsilon > 0$ は任意であるから以下の式を得る.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)} \geq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\min_{1 \leq i \leq m} s\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{i-1}{m}L \right) + (1-s)\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g \left(\frac{m-i}{m}L \right)}{g(L)}.$$

さらに, m が任意であることと f の連続性より以下の式を得る.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)} \geq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\inf_{0 \leq \eta \leq 1} s\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)g(\eta L) + (1-s)\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)g((1-\eta)L)}{g(L)}.$$

さらに $\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta) = t\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)$ であるから, 以下の式を得る.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n)}{g(L)} \geq \alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\inf_{0 \leq \eta \leq 1} sg(\eta L) + (1-s)tg((1-\eta)L)}{g(L)}.$$

したがって, $0 < s < 1$ が任意であることから (74) を得る. □

補題 8 の証明と同様にして以下の補題を得る.

補題 17 条件 (A.2) が満たされ, 適当な正則性条件が満たされるとき $\vec{a} = \{\sqrt{n}\}$ とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(p_\theta^n \| p_{\theta+L/a_n}^n) = \frac{s(1-s)}{2} J_\theta L^2.$$

が得られる. さらに $g(x) = x^2$ とするとさらに $\{\sqrt{n}\}$ -局所共変推定量 T に対して以下の式が成立する.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{J_\theta}{2} & t < 1 \\ \frac{J_\theta}{2t} & t \geq 1 \end{cases} \quad (76)$$

条件 (A.2) の下では $\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta)$ と $\alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta)$ の取りうる範囲の集合については $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta) \subset \{(x, y) | x \leq \frac{J_\theta}{2}, y \leq \frac{J_\theta}{2}\}$ がわかる. なお適当な正則性条件の下で最尤推定量は $\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) = \alpha^-(\vec{a}, g, T, \theta) = \frac{J_\theta}{2}$ を満たす. したがって最尤推定量が最適となりこの場合は trade off を考える必要が無い. よって条件 (A.2) の下では適当な正則性条件の下で $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は fig. 1 と一致する.

さらに, 補題 9 と同様に以下補題が得られる.

補題 18 条件 (A.5) の下で以下の式が成り立つ. なお, 条件 (A.4) の下では $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の場合と同種の式が成立する. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ の場合は $\vec{a} = \{n^{1/\gamma_1}\}$, $g(x) = x^{\gamma_1}$ とおく. さらに $\{n^{1/\gamma_1}\}$ -局所共変推定量 T に対して以下の式が成立する. $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 1$ のときについては以下の式が得られる.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} \left(A_1 B \left(\frac{t+\gamma_1}{1+t}, 1-\gamma_1 \right) + A_2 \frac{1}{t} B \left(\frac{1+t\gamma_1}{1+t}, 1-\gamma_1 \right) \right). \quad (77)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ の場合以下の式を得る.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq A_1 + \frac{1}{t} A_2. \quad (78)$$

さらに $1 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$ の場合は以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & \alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \\ & \leq \inf_{\{s|0 < s < 1\}} \frac{A_1 s(1-s(\gamma_1-1))B(s+\gamma_1(1-s), 2-\gamma_1) + A_2(1-s)(1-(1-s)(\gamma_1-1))B(1-s+\gamma_1 s, 2-\gamma_1)}{\gamma_1 \inf_{\{\eta|0 \leq \eta \leq 1\}} s\eta^{\gamma_1} + (1-s)t(1-\eta)^{\gamma_1}}. \end{aligned} \quad (79)$$

そして $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときについては $a_n = \sqrt{n \log n}$, $g(x) = x^2$ とすると $\{\sqrt{n \log n}\}$ -局所共変推定量 T に対して以下の式が成立する.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, T, \theta) \leq \begin{cases} \frac{A_1+A_2}{4} & t < 1 \\ \frac{A_1+A_2}{4t} & t \geq 1. \end{cases} \quad (80)$$

$\gamma_1 = \gamma_2 > 2$ のときは補題 17 を参照のこと. また $\gamma_1 < \gamma_2$ のときについては A_2 のところに 0 を代入すると良い.

証明 $0 < \gamma_1 < 2$ のときについては以下の式を得る.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^s \left(p_\theta^n \left\| p_{\theta + \frac{L}{n^{1/\gamma_1}}}^n \right\| \right) = \begin{cases} \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} L^{\gamma_1} (A_1 s B(s+\gamma_1(1-s), 1-\gamma_1) + A_2(1-s) B(1-s+\gamma_1 s, 1-\gamma_1)) & 0 < \gamma_1 < 1 \\ (A_1 s + A_2(1-s)) L & \gamma_1 = 1 \\ \frac{A_1 s(1-s(\gamma_1-1))B(s+\gamma_1(1-s), 2-\gamma_1) + A_2(1-s)(1-(1-s)(\gamma_2-1))B(1-s+\gamma_2 s, 2-\gamma_2)}{\gamma_1} L^{\gamma_1} & 1 < \gamma_1 < 2. \end{cases}$$

この式と補題 16 を組み合わせれば, 補題 9 と同様に以下 $0 < \gamma_1 < 2$ のときについては補題の主張を示すことができる. 次に $\gamma_1 = 2$ のときについて考える.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s \left(p_\theta^n \left\| p_{\theta + \frac{L}{\sqrt{n \log n}}}^n \right\| \right) &= \frac{(A_1 + A_2)s(1-s)}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} -n \left(\frac{L}{\sqrt{n \log n}} \right)^2 \log \frac{L}{\sqrt{n \log n}} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s(1-s)}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{L^2}{\log n} \left(\log L - \frac{1}{2}(\log n + \log \log n) \right) = \frac{(A_1 + A_2)s(1-s)}{4} L^2. \end{aligned}$$

したがって補題 16 を組み合わせると, 補題 8 と同様に以下, (80) を示すことが出来る. $\square$

次に具体的な推定量の下で上記 bound を達成しているか調べる.

Akahira and Takeuchi[2] によると, 条件 (A.5) の $\gamma_2 = \gamma_1 = 2$ の場合は最尤推定量 $\hat{\theta}$ を用いると極限分布 $P(\{\sqrt{n \log n}\}, \hat{\theta}, \theta)$ は分散 $\frac{2}{A_1+A_2}$ の正規分布となり $t = 1$ を代入した (80) の等号を達成する. したがって条件 (A.5) の $\gamma_2 = \gamma_1 = 2$ の場合はと集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は fig. 4 で与えられる.

補題 19 $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < 2$, $a_n = n^{\frac{1}{\gamma_1}}$ とする. このとき, 以下の式を得る.

$$P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \leq e^{-A_2 L^{\gamma_1}} \quad (81)$$

$$P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty) \leq e^{-A_1 L^{\gamma_1}}. \quad (82)$$

証明 (57) より,

$$P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \int_{b - \frac{L}{(1-\lambda)n^{\frac{1}{\gamma_1}}}}^b f(x) dx \right)^n = e^{-A_2 L^{\gamma_1}} \quad (83)$$

となり (81) を得る. 同様に (82) を得る. $\square$

よって補題 19 を用いると, 補題 18 で扱ったモデルについて §3.1 で導入した推定量 $\check{\theta}(\lambda)$ の $\alpha^+(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta)$, $\alpha^-(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta)$ は以下のように計算できる.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta) \geq \frac{A_1}{\gamma_1 \lambda^{\gamma_1}}, \quad \alpha^-(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta) \geq \frac{A_2}{\gamma_1 (1-\lambda)^{\gamma_1}}.$$

なおここで $\gamma_1 = \gamma_2$ とし, $\vec{a} = \{n^{1/\gamma_1}\}$, $g(x) = |x|^{\gamma_1}$ とした. 特に $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときについては推定量 $\check{\theta}(\lambda)$ が任意の点で $\vec{a}$ -局所共変推定量であることから, (78) が適用でき以下の式を得る.

$$\alpha^+(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta) = A_1 \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \right), \quad \alpha^-(\vec{a}, g, \check{\theta}(\lambda), \theta) = A_2 \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} + 1 \right).$$

したがって $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときについては Order だけではなく最高次の係数の意味で限界を達成している. 同種の議論から条件 (A.4) の場合には集合 $\mathcal{C}(\vec{a}, g, \theta)$ は fig. 2 で与えられる. よって定理 4 が示せた.

一方, それ以外のときについては下限は Order については推定量 $\check{\theta}(\lambda)$ は限界を達成しているがその最高次の係数までは限界を達成していない.

4.2 極限の取り替え

§3.2 で扱ったものと類似の極限の取り替えについて考える. 極限分布に注目した場合も §3.2 と同様の式が得られたが, 以下の内容を読めば分かるようにその極限操作の取り替えを区間推定の極限と点推定という捉え方ができない. 以下, §3.2 と同じように $\mathbb{R}$ 上の確率分布がシフトするモデルのみ扱い尤度比推定量に注目する. まず $\tilde{\theta}^L := \{\tilde{\theta}_{0,n,L/a_n}\}$ と推定量 (推定量の無限列) を定義する. 十分小さい任意の $\epsilon > 0$ に対して $d_\epsilon(x)$ が単調減少であるとき

$$-\log \max \left\{ P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(-\infty, -L) \right\} \geq \sup_{0 < s < 1} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}}) \quad (84)$$

が成り立つ.

(84) の証明 Markov の不等式より $0 < s < 1$ となる s について

$$-\log p_\theta^n(\theta + L/a_n \leq \tilde{\theta}_n^L) \geq I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}}) \quad (85)$$

を得る. (85) は Chernoff の上界式と呼ばれる [14, 15]. $P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(L, \infty)$ の定義に注意して $n \rightarrow \infty$ の極限を取ると

$$-\log P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(L, \infty) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}})$$

となる. s について $\sup$ を取ると,

$$-\log P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(L, \infty) \geq \sup_{0 < s < 1} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}})$$

となる. 同様に

$$-\log P(\vec{a}, \tilde{\theta}^L, \theta)(-\infty, -L) \geq \sup_{0 < s < 1} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}})$$

を得る. したがって (84) を得た. □

そして $L \rightarrow +\infty$ の極限を考えると (61) に対応する式として以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{g(L)} \sup \{ -\log \max \{ P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \} | T : \text{位置共変推定量} \} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{g(L)} \sup_{0 \leq s \leq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}}). \end{aligned} \quad (86)$$

(86) の証明 位置共変推定量 T として $\tilde{\theta}^L$ を考えると (84) のより $\geq$ は導ける. 以下 $\leq$ を導く. 各 L について L に関して単調増加な整数 n_L 及び n_L 個のデータに対する位置共変推定量 $T_{n_L}^L$ (各 L 毎に決めることにする) を以下の式が成立するように取るとする.

$$\begin{aligned} & \left| -\log p_\theta^{n_L}(\theta + L/a_n \leq T_{n_L}^L) - \sup \{ -\log P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty) | T : \text{位置共変推定量} \} \right| < \frac{1}{Lg(L)} \\ & \left| -\log p_\theta^{n_L}(T_{n_L}^L \leq \theta - L/a_n) - \sup \{ -\log P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) | T : \text{位置共変推定量} \} \right| < \frac{1}{Lg(L)} \\ & \left| I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_{n_L}}}) - \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}}) \right| < \frac{1}{Lg(L)}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}})$ は $0 < s < 1$ について一様収束することに注意せよ. このとき

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{-1}{g(L)} \log \{ \max \{ p_\theta^{n_L}(\theta + L/a_n \leq T_{n_L}^L), p_\theta^{n_L}(T_{n_L}^L \leq \theta - L/a_n) \} \} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{-1}{g(L)} \sup \{ \log \{ \max \{ P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \} \} | T : \text{位置共変推定量} \}, \\ & \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{g(L)} \sup_{0 < s < 1} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_{n_L}}}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{g(L)} \sup_{0 < s < 1} \lim_{n \rightarrow \infty} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_n}}) \end{aligned}$$

となる. ここで補題 4 の $r = 0$ の場合を適用すると以下の式を得る.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{-1}{g(L)} \log \{ \max \{ p_\theta^{n_L}(\theta + L/a_n \leq T_{n_L}^L), p_\theta^{n_L}(T_{n_L}^L \leq \theta - L/a_n) \} \} \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{g(L)} \sup_{0 < s < 1} I^s(F_\theta \| F_{\theta + \frac{2L}{a_{n_L}}}).$$

よって (86) を得た. □

以下 (86) と補題 16 が与える下限との比較をなお条件 (A.4) の場合と条件 (A.5) の $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ となる場合及び条件 (A.3) の場合の 3 つの場合の間の比較を行う.

まず, 条件 (A.4) の場合は十分小さな $\epsilon > 0$ について尤度比推定量が存在するとき以下のように極限の順序を取り替えることによって以下のように異なる値が得られる. ここでは $\vec{a}$ として $\{n\}$ を考える.

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \sup \{ -\log \{ \max \{ P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \} \} | T : \text{位置共変推定量} \} = 2 \max \{ f(a), f(b) \} \quad (87)$$

$$\sup \left\{ \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{-1}{L} \log \{ \max \{ P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L) \} \} \middle| T : \text{位置共変推定量} \right\} = f(a) + f(b). \quad (88)$$

条件 (A.5) の $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ のときは以下の式が成立し (87), (88) のような病的な現象は起きない. 以下の式では $\vec{a}$ は数列 $\{\sqrt{n \log n}\}$ を表すこととする.

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L^2} \sup \{ -\log(\max\{P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L)\}) \mid T: \text{位置共変推定量} \} = \frac{A_1 + A_2}{4} \quad (89)$$

$$\sup \left\{ \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{-1}{L^2} \log(\max\{P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L)\}) \mid T: \text{位置共変推定量} \right\} = \frac{A_1 + A_2}{4}. \quad (90)$$

(90) は不等式 (80) から $\leq$ が導かれ, 最尤推定量 $\hat{\theta}$ に関する極限分布 $P(\vec{a}, \hat{\theta}, \theta)$ が分散 $\frac{2}{A_1 + A_2}$ の正規分布になる事実から $\geq$ が導かれる. すなわち, 位置共変推定量 T として最尤推定量 $\hat{\theta}$ を選ぶと (90) が与える限界を達成する.

条件 (A.3) の下では以下の式が成立し同様に (87), (88) のような病的な現象は起きない. なお, $\vec{a}$ は数列 $\{\sqrt{n}\}$ を表すこととする.

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L^2} \sup \{ -\log(\max\{P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L)\}) \mid T: \text{位置共変推定量} \} = \frac{J_f}{2} \quad (91)$$

$$\sup \left\{ \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{-1}{L^2} \log(\max\{P(\vec{a}, T, \theta)(L, \infty), P(\vec{a}, T, \theta)(-\infty, -L)\}) \mid T: \text{位置共変推定量} \right\} = \frac{J_f}{2}. \quad (92)$$

(92) は不等式 (76) と最尤推定量 $\hat{\theta}$ に関する極限分布 $P(\vec{a}, \hat{\theta}, \theta)$ が分散 $\frac{1}{J_f}$ の正規分布になる事実から導かれる. すなわち, 位置共変推定量 T として最尤推定量 $\hat{\theta}$ を選ぶと (92) において等号が成立する.

5 結論

異なる未知パラメータに対応する確率分布が互いに絶対連続にならないという意味での非正則なモデルについて漸近論を展開した. 定理 1 の (8)(9) で現れた再定義された Fisher 情報量についてどのように解釈すべきか不明である. 今後, 導出方法などを洗練することにより, より深い解析を行う必要がある.

§3.1 で行った推定に関する大偏差型の限界の導出 (主に補題 6) で用いられた手法は韓 [16] で用いられた「情報スペクトル切り出し」と呼ばれる手法極めて類似している. この議論の特徴は相対エントロピーの単調性を用いないで推定の大偏差型の限界が導出できる点にある. 著者が推定に関する大偏差型の限界の導出のためにこのような手法をはじめて用いたのは量子状態族のパラメータ推定の大偏差型の限界を量子相対エントロピーの単調性を用いないで導出するためである [17]. (量子相対エントロピーから得られる限界は推定本来の限界よりも弱い.)

大偏差, 及び極限分布双方の基準の下で trade-off を考慮にいたれた推定量に対する限界を導出した. 条件 (A.5) の下では $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときを除いて限界を達成する推定量を構成することができなかった. 基本的に順序統計量を用いる方針で問題ないと思われるが, 最大値及び最小値以外の統計量に含まれる情報をどのように利用するかが問題になると思われる. $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ のときについては大偏差のときに限って 2 次の漸近論を展開したが残念ながら限界を達成する推定量を一般に構成することができなかった. この場合についても最大値及び最小値以外の統計量に含まれる情報をどのように利用するかが問題になると思われる. Akahira[1] はこのような状況の下で漸近 2 次のレベルで情報量損失が無い統計量を導出している. 今後, このモデルで Akahira[1] が導出した統計量の組から, 2 次のレベルで限界を達成する推定量を構成することが 1 つの課題となる.

最後に, §3.2 及び §4.2 で行った極限の取り替えについて触れておく. §3.2 での極限の取り替えときの相違については区間推定と点推定の相違として捕らえるという解釈が可能であるが, §4.2 での同種の議論ではそのような解釈が不可能である. §4.2 での極限の取り替えに関する議論をどう解釈するかは今後の課題となる. また, このような病的な現象が生じる原因をうまく説明する描像についてもいまのところ獲得できていない. 今後, このような現象が起きる原因について別な視点から考える必要がある.

幾何学視点から非正則モデルを捉えなおすことは興味あるテーマである. 非正則モデルに関する幾何学的考察として甘利 [18] による先駆的研究があるが本研究と甘利 [18] との関連にまで触れることができなかった. このような非正則モデルの幾何学的考察は今後の課題となる.

A 補題 2 の証明

はじめに条件 (A.3) の下で (19) 及び (20) を示す. 条件 (A.3) の下では容易に以下の変形が可能となる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c \left(f(x) + f^{1-s}(s)(f^s)'(x)\epsilon + f^{1-s}(s)(f^s)''(x)\frac{\epsilon^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_a^c f(x) dx + f(c)\epsilon s + f'(c)s\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_a^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2.
 \end{aligned} \tag{93}$$

同様に以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_c^{b-\epsilon} \left(f(x) + f^{1-s}(s)(f^s)'(x)\epsilon + f^{1-s}(s)(f^s)''(x)\frac{\epsilon^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_c^b f(x) dx - f(c)\epsilon s - f'(c)s\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_c^b f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2.
 \end{aligned} \tag{94}$$

したがって (19) 及び (20) を得た.

次に条件 (A.4) の下で (21) 及び (22) を示す.

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c \left(f(x) + f^{1-s}(x)(f^s)'(x)\epsilon + f^{1-s}(x)(f^s)''(x)\frac{\epsilon^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_a^c \left(f(x) + f'(x)s\epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 + \frac{s}{2} f''(x) \right) \epsilon^2 \right) dx \\
 &= \int_a^c f(x) dx + f(c)\epsilon s + f'(c)s\frac{\epsilon^2}{2} - f(a)s\epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} \int_a^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx - \frac{s}{2} f'(a) \right) \epsilon^2.
 \end{aligned} \tag{95}$$

よって (21) が示せた. また $\tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon)$ の極限について以下の式が成立する.

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^{b-\epsilon} \left(f(x) + f'(x)s\epsilon + f^{-1}(x)(f')^2(x)\frac{s(s-1)}{2}\epsilon^2 + f''(x)\frac{s}{2}\epsilon^2 \right) dx \\
 &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b \left(f(x) + f'(x)s\epsilon + f^{-1}(x)(f')^2(x)\frac{s(s-1)}{2}\epsilon^2 + f''(x)\frac{s}{2}\epsilon^2 \right) dx - \int_{b-\epsilon}^b (f(x) + f'(x)s\epsilon) dx \\
 &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx + (f(b) - f(c))s\epsilon + (f'(b) - f'(c))\frac{s}{2}\epsilon^2 + \left(\int_c^b f^{-1}(x)(f')^2(x) dx \right) \frac{s(s-1)}{2}\epsilon^2 \\
 &\quad - \int_{b-\epsilon}^b (f(b) + f'(b)(x-b) + f'(b)s\epsilon) dx \\
 &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 + f(b)s\epsilon + f'(b)\frac{s}{2}\epsilon^2 + \left(\int_c^b f^{-1}(x)(f')^2(x) dx \right) \frac{s(s-1)}{2}\epsilon^2 \\
 &\quad - f(b)\epsilon + f'(b)\frac{\epsilon^2}{2} - f'(b)s\epsilon^2 \\
 &\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 \\
 &\quad + f(b)(s-1)\epsilon + f'(b)(1-s)\frac{\epsilon^2}{2} + \left(\int_c^b f^{-1}(x)(f')^2(x) dx \right) \frac{s(s-1)}{2}\epsilon^2.
 \end{aligned} \tag{96}$$

よって (22) が示せた.

以下条件 (A.5) の下でそれぞれの場合について (23)(24) を示す. 以下では δ を $0 < \delta < c - a$ となる任意の実数とする. はじめに $1 > \gamma_1 > 0$ のときの $\tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. このとき以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^c \left(f(x) + f^{1-s}(x)(f^s)'(x)\epsilon + f^{1-s}(x)(f^s)''(x)\frac{\epsilon^2}{2} \right) dx + \int_a^{a+\delta} f^{1-s}(x)f^s(x+\epsilon) dx \\
& = \int_a^c f(x) dx + \left(\int_{a+\delta}^c f'(x) dx \right) s\epsilon + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2 + \frac{s}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f''(x) dx \right) \epsilon^2 \\
& \quad + \int_a^{a+\delta} (f^{1-s}(x)f^s(x+\epsilon) - f(x)) dx \\
& = \int_a^c f(x) dx + (f(c) - f(a+\delta))s\epsilon + (f'(c) - f'(a+\delta))\frac{s}{2}\epsilon^2 + \frac{s(s-1)}{2} \int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \epsilon^2 \\
& \quad + \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon f^{1-s}(x)(f^s)'(x+y) dy dx \\
& = \int_a^c f(x) dx + f(c)s\epsilon + \frac{s}{2}sf'(c)\epsilon^2 \\
& \quad - f(a+\delta)s\epsilon - f'(a+\delta)\frac{s}{2}\epsilon^2 + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2 \\
& \quad + \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon f^{1-s}(x)(f^s)'(x+y) dy dx. \tag{97}
\end{aligned}$$

以下さらに $f(x) \cong A_1(x-a)^{\gamma_1-1}$ ($x \rightarrow a+0$) であるから以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\gamma_1-1)A_1s} \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon f^{1-s}(x)(f^s)'(x+y) dy dx \\
& = \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon \frac{x^{(\gamma_1-1)(1-s)}}{(x+y)^{(\gamma_1-1)(1-s)+2-\gamma_1}} dy dx \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{\frac{\delta}{y}} \frac{z^{(\gamma_1-1)(1-s)}}{(z+1)^{(\gamma_1-1)(1-s)+2-\gamma_1}} dz y^{\gamma_1-1} dy \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{\frac{\delta}{y}} z^{\gamma_1-2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{(\gamma_1-1)(1-s)+\gamma_1-2} dz y^{\gamma_1-1} dy \\
& = \int_0^\epsilon B(\gamma_1+s-\gamma_1s, 1-\gamma_1) y^{\gamma_1-1} - \int_{\frac{\delta}{y}}^\infty z^{\gamma_1-2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{(\gamma_1-1)(1-s)+\gamma_1-2} dz y^{\gamma_1-1} dy \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \frac{B(\gamma_1+s-\gamma_1s, 1-\gamma_1)}{\gamma_1} \epsilon^{\gamma_1} - \int_0^\epsilon \int_{\frac{\delta}{y}}^\infty z^{\gamma_1-2} \left(1 + ((\gamma_1-1)(1-s)+\gamma_1-2)\frac{1}{z} \right) dz y^{\gamma_1-1} dy \\
& = \frac{B(\gamma_1+s-\gamma_1s, 1-\gamma_1)}{\gamma_1} \epsilon^{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_1-1} \delta^{\gamma_1-1} \epsilon - \frac{(\gamma_1-1)(s-1)+2-\gamma_1}{2(\gamma_1-2)} \delta^{\gamma_1-2} \epsilon^2. \tag{98}
\end{aligned}$$

ここで $z = \frac{x}{y}$ とおいた. $f(a+\delta) = A_1\delta^{\gamma_1-1}$, $f'(a+\delta) = A_1(\gamma_1-1)\delta^{\gamma_1-2}$ であることに注意して (97) に (98) を代入すると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c f(x) dx + f(c)s\epsilon + \frac{s}{2}sf'(c)\epsilon^2 \\
& \quad + \frac{A_1s(\gamma_1-1)}{\gamma_1} B(\gamma_1+s-\gamma_1s, 1-\gamma_1)\epsilon^{\gamma_1} + \left(\frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{A_1(\gamma_1-1)^2}{\gamma_1-2} \delta^{\gamma_1-2} \right) \right) \epsilon^2. \tag{99}
\end{aligned}$$

次に $\gamma_1 = 1$ のときの $\tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. (95) を用いると以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c f(x) dx + \epsilon s f(c) + \frac{\epsilon^2}{2} s f'(c) - A_1 s \epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} \int_a^c f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2. \end{aligned} \quad (100)$$

次に $1 < \gamma_1 \leq 2$ のときの $\tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. このとき以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^c \left(f(x) + f^{1-s}(x) (f^s)'(x) \epsilon + f^{1-s}(x) (f^s)''(x) \frac{\epsilon^2}{2} \right) dx + \int_a^{a+\delta} f^{1-s}(x) f^s(x+\delta) dx \\ & = \int_a^c (f(x) + f'(x) s \epsilon) dx + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2 + \frac{s}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f''(x) dx \right) \epsilon^2 \\ & \quad + \int_a^{a+\delta} f^{1-s}(x) f^s(x) - f(x) - \epsilon f^{1-s}(x) (f^s)'(x) dx \\ & = \int_a^c f(x) dx + (f(c) - f(a)) s \epsilon + (f'(c) - f'(a+\delta)) s \frac{\epsilon^2}{2} \\ & \quad + \frac{s(1-s)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2 + \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} f^{1-s}(x) (f^s)''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx. \end{aligned} \quad (101)$$

(101) の最終項は $1 < \gamma_1 < 2$ のときはさらに $z = \frac{x}{y_2}$ とおくと以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1 s(\gamma_1 - 1)(s(\gamma_1 - 1) - 1)} \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} f^{1-s}(x) (f^s)''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\ & = \int_0^\delta \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} x^{(1-s)(\gamma_1-1)} (x+y_2)^{s(\gamma_1-1)-2} dy_2 dy_1 dx \\ & = \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_0^\delta x^{(1-s)(\gamma_1-1)} (x+y_2)^{s(\gamma_1-1)-2} dx dy_2 dy_1 \\ & = \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_0^{\frac{\delta}{y_2}} z^{(1-s)(\gamma_1-1)} (z+1)^{s(\gamma_1-1)-2} y_2^{\gamma_1-2} dz dy_2 dy_1 \\ & = \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \left(B(2-\gamma_1, (1-s)(\gamma_1-1)+1) - \int_{\frac{\delta}{y_2}}^\infty z^{(1-s)(\gamma_1-1)} (z+1)^{s(\gamma_1-1)-2} dz \right) y_2^{\gamma_1-2} dy_2 dy_1 \\ & = B(2-\gamma_1, (1-s)(\gamma_1-1)+1) \frac{1}{\gamma_1(\gamma_1-1)} \epsilon^\gamma - \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_{\frac{\delta}{y_2}}^\infty z^{\gamma_1-3} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{s(\gamma_1-1)-2} dz y_2^{\gamma_1-2} dy_2 dy_1 \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} B(2-\gamma_1, (1-s)(\gamma_1-1)+1) \frac{1}{\gamma_1(\gamma_1-1)} \epsilon^\gamma - \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_{\frac{\delta}{y_2}}^\infty z^{\gamma_1-3} dz y_2^{\gamma_1-2} dy_2 dy_1 \\ & = B(2-\gamma_1, (1-s)(\gamma_1-1)+1) \frac{1}{\gamma_1(\gamma_1-1)} \epsilon^\gamma - \frac{1}{2(\gamma_1-2)} \delta^{\gamma_1-2} \epsilon^2. \end{aligned} \quad (102)$$

したがって (101) と (102) を組み合わせると $1 < \gamma_1 < 2$ のときには以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c f(x) dx + f(c) s \epsilon + f'(c) \frac{s}{2} \epsilon^2 \\ & \quad + \frac{A_1 s(\gamma_1 - 1)(s(\gamma_1 - 1) - 1)}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)} B(2-\gamma_1, (1-s)(\gamma_1-1)+1) \epsilon^\gamma \\ & \quad + \left(\frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx + \frac{A_1(\gamma_1-1)^2}{\gamma_1-2} \delta^{\gamma_1-2} \right) \right) \epsilon^2. \end{aligned} \quad (103)$$

$\gamma_1 = 2$ のときについては (101) の最終項は $z = \frac{x}{y_2}$ とおくと以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 s(s-1)} \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} f^{1-s}(x)(f^s)''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\
&= \int_0^\delta \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} x^{1-s}(x+y_2)^{s-2} dy_2 dy_1 dx \\
&= \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_0^\delta x^{1-s}(x+y_2)^{s-2} dx dy_2 dy_1 \\
&= \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_{\frac{\delta}{y_2}}^{\frac{\delta}{y_2}} z^{1-s}(z+1)^{s-2} dz dy_2 dy_1.
\end{aligned} \tag{104}$$

一方, $v = \frac{z}{1+z}$ とおくと以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\lim_{y_2 \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\delta}{y_2}} \left(z^{1-s}(z+1)^{s-2} - \frac{1}{1+z} \right) dz &= \int_0^1 \frac{1-v^{1-s}}{1-v} dv = -E_u - \psi(2-s) \\
\lim_{y_2 \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\delta}{y_2}} \frac{1}{1+z} dz - (\log \delta - \log y_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{105}$$

(105) の導出については例えば森口, 宇田川, 一松 [19] の p.225 を参照のこと. したがって

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 s(s-1)} \int_a^{a+\delta} \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} f^{1-s}(x)(f^s)''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\
&\cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \log \delta - \log y_2 - E_u - \psi(2-s) dy_2 dy_1 \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^2 \log \epsilon + \frac{1}{2} \left(\log \delta + \frac{3}{2} - E_u - \psi(2-s) \right) \epsilon^2
\end{aligned} \tag{106}$$

となる. $\gamma_1 = 2$ のときについては (101) と (106) を組み合わせると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^-(c, f, \epsilon) \\
&\cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_a^c f(x) dx + f(c)s\epsilon + f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 + \frac{A_1 s(1-s)}{2} \epsilon^2 \log \epsilon \\
&\quad + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + A_1 \log \delta \right) \epsilon^2 + \frac{A_1 s}{2} \left(-1 + (1-s) \left(-\frac{3}{2}(1-s) + E_u + \psi(2-s) \right) \right) \epsilon^2
\end{aligned} \tag{107}$$

$\gamma > 2$ のときは式 (93) が適用できて (23) がそのまま示せる.

次に (24) を示すために $\tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. はじめに以下の式が成立する.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\
&\cong_{\epsilon^2 \rightarrow +0} \int_c^{b-\delta} f(x) + \epsilon f^{1-s}(x)(f^s)'(x) + \frac{\epsilon^2}{2} f^{1-s}(x)(f^s)''(x) dx + \int_{b-\delta}^{b-\epsilon} f^{1-s}(x)f^s(x+\epsilon) dx.
\end{aligned} \tag{108}$$

以下 $0 < \gamma_2 < 1$ のときについて $\tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{b-\delta+\epsilon}^b (f^{1-s}(x-\epsilon)f^s(x) - f(x)) dx + \int_c^b f(x) dx - \int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} f(x) dx \\
& \quad + \left(\int_c^{b-\delta} f^{1-s}(x)(f^s)'(x) dx \right) \epsilon + \left(\int_c^{b-\delta} f^{1-s}(x)(f^s)''(x) dx \right) \frac{\epsilon^2}{2} \\
& = \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 (f^{1-s})'(x+y) dy dx + \int_c^b f(x) dx - \int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} f(x) dx \\
& \quad + \left(\int_c^{b-\delta} f'(x) dx \right) s\epsilon + \left(\frac{s(s-1)}{2} \int_c^{b-\delta} (s-1)f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{s}{2} \int_c^{b-\delta} f''(x) dx \right) \epsilon^2 \\
& = \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 (f^{1-s})'(x+y) dy dx + \int_c^b f(x) dx - \int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} f(x) dx \\
& \quad + (f(b-\delta) - f(c))s\epsilon + (f'(b-\delta) - f'(c))\frac{s}{2}\epsilon^2 + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_c^{b-\delta} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2. \quad (109)
\end{aligned}$$

そこで右辺の第1項については $z = \frac{x}{y}$ とすると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_2(1-s)(\gamma_2-1)} \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 (f^{1-s})'(x+y) dy dx \\
& = \int_{-\delta+\epsilon}^0 \int_{-\epsilon}^0 \frac{(-x)^{s(\gamma_2-1)}}{(-x-y)^{s(\gamma_2-1)+2-\gamma_2}} dy dx \\
& = \int_{-\epsilon}^0 \int_{-\delta+\epsilon}^0 \frac{(-x)^{s(\gamma_2-1)}}{(-x-y)^{s(\gamma_2-1)+2-\gamma_2}} dx dy \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{\delta-\epsilon} \frac{x^{s(\gamma_2-1)}}{(x+y)^{s(\gamma_2-1)+2-\gamma_2}} dx dy \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{\frac{\delta-\epsilon}{y}} \frac{z^{s(\gamma_2-1)}}{(z+1)^{s(\gamma_2-1)+2-\gamma_2}} y^{\gamma_2-1} dz dy \\
& = \int_0^\epsilon \left(B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) - \int_{\frac{\delta-\epsilon}{y}}^\infty \frac{z^{s(\gamma_2-1)}}{(z+1)^{s(\gamma_2-1)+2-\gamma_2}} dz \right) y^{\gamma_2-1} dy \\
& = \int_0^\epsilon \left(B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) - \int_{\frac{\delta-\epsilon}{y}}^\infty z^{\gamma_2-2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{-s(\gamma_2-1)+\gamma_2-2} dz \right) y^{\gamma_2-1} dy \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \left(B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) - \int_{\frac{\delta-\epsilon}{y}}^\infty z^{\gamma_2-2} + (-s(\gamma_2-1) + \gamma_2 - 2)z^{\gamma_2-3} dz \right) y^{\gamma_2-1} dy \\
& = B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) \frac{1}{\gamma_2} \epsilon^{\gamma_2} + \frac{(\delta-\epsilon)^{\gamma_2-1}}{\gamma_2-1} \epsilon + \frac{(-s(\gamma_2-1) + \gamma_2 - 2)(\delta-\epsilon)^{\gamma_2-2}}{2(\gamma_2-2)} \epsilon^2 \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) \frac{1}{\gamma_2} \epsilon^{\gamma_2} + \frac{\delta^{\gamma_2-1}}{\gamma_2-1} \epsilon + \left(\frac{(-s(\gamma_2-1) + \gamma_2 - 2)\delta^{\gamma_2-2}}{2(\gamma_2-2)} - \delta^{\gamma_2-2} \right) \epsilon^2 \\
& = B(s(\gamma_2-1)+1, 1-\gamma_2) \frac{1}{\gamma_2} \epsilon^{\gamma_2} + \frac{\delta^{\gamma_2-1}}{\gamma_2-1} \epsilon + \left(-\frac{s(\gamma_2-1)\delta^{\gamma_2-2}}{2(\gamma_2-2)} - \frac{1}{2}\delta^{\gamma_2-2} \right) \epsilon^2. \quad (110)
\end{aligned}$$

そのほか以下の式が成立する.

$$\int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} f(x) dx \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} A_2 \left(\delta^{\gamma_2-1} \epsilon + \frac{\gamma_2-1}{2} \delta^{\gamma_2-2} \epsilon^2 \right) \quad (111)$$

$$f(b-\delta)s\epsilon = A_2 \delta^{\gamma_2-1} \quad (112)$$

$$f'(b-\delta) \frac{s}{2} \epsilon^2 = -A_2(\gamma_2-1) \delta^{\gamma_2-2}. \quad (113)$$

(109) に (110), (111), (112) 及び (113) を組み合わせると以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c) \frac{s}{2} \epsilon^2 \\ & + B(s(\gamma_2-1) + 1, 1-\gamma_2) \frac{A_2(1-s)(\gamma_2-1)}{\gamma_2} \epsilon^{\gamma_2} + \left(\int_c^{b-\delta} f^{-1}(x) (f'(x))^2 dx + \frac{A_2(\gamma_2-1)^2}{\gamma_2-2} \delta^{\gamma_2-1} \right) \frac{s(s-1)}{2} \epsilon^2. \end{aligned} \quad (114)$$

次に $\gamma_2 = 1$ のときについて $\tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. (96) を用いると以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\ & \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c) \frac{s}{2} \epsilon^2 + A_2(s-1)\epsilon + \left(\int_c^b f^{-1}(x) (f')^2(x) dx \right) \frac{s(s-1)}{2} \epsilon^2. \end{aligned} \quad (115)$$

次に $1 < \gamma_2 \leq 2$ のときについて $\tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon)$ の極限を調べる. (108) を参考にすると以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b (f(x) + f'(x)s\epsilon) dx - \int_{b-\delta}^b (f(x) + f'(x)s\epsilon) dx + \left(\int_c^{b-\delta} f^{1-s}(x)(f^s)''(x) dx \right) \frac{\epsilon^2}{2} \\
& \quad + \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) (f^{1-s}(x-\epsilon) - f^{1-s}(x) + (f^{1-s})'(x)\epsilon) dx + \int_{b-\delta+\epsilon}^b (f(x) - f^s(x)(f^{1-s})'(x)\epsilon) dx \\
& = \int_c^b f(x) dx + \left(\int_c^b f'(x) dx \right) s\epsilon + \left(\int_c^{b-\delta} \frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 + \frac{s}{2} f''(x) dx \right) \epsilon^2 \\
& \quad + \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \left(- \int_{-\epsilon}^0 (f^{1-s})'(x+y_1) - f^{1-s}(x) dy_1 \right) dx \\
& \quad + \int_{b-\delta+\epsilon}^{b-\delta} f(x) dx - \left(\int_{b-\delta}^b f'(x) dx \right) s\epsilon + \left(\int_{b-\delta+\epsilon}^b f'(x) dx \right) (s-1)\epsilon \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx + (f(b) - f(c))s\epsilon + \left(\int_c^{b-\delta} \frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{s}{2} f'(b-\delta) \right) \epsilon^2 \\
& \quad + \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \left(- \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 \right) dx \\
& \quad - \int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} (f(b-\delta) + f'(b-\delta)(x-(b-\delta))) dx - \left(\int_{b-\delta}^{b-\delta+\epsilon} f'(x) dx \right) s\epsilon - \left(\int_{b-\delta+\epsilon}^b f'(x) dx \right) \epsilon \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon + f(b)s\epsilon + \left(\int_c^{b-\delta} \frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{s}{2} f'(b-\delta) \right) \epsilon^2 \\
& \quad + \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \left(- \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 \right) dx \\
& \quad - \left(f(b-\delta)\epsilon + f'(b-\delta)\frac{\epsilon^2}{2} \right) - (f(b-\delta+\epsilon) - f(b-\delta))s\epsilon - (f(b) - f(b-\delta+\epsilon))\epsilon \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 + f(b)s\epsilon + \left(\int_c^{b-\delta} \frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{s}{2} f'(b-\delta) \right) \epsilon^2 \\
& \quad - \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\
& \quad - \left(f(b-\delta)\epsilon + f'(b-\delta)\frac{\epsilon^2}{2} \right) - f'(b-\delta)s\epsilon^2 - (f(b) - f(b-\delta) - f'(b-\delta)\epsilon)\epsilon \\
& = \int_c^b f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 + \left(\int_c^{b-\delta} \frac{s(s-1)}{2} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx \right) \epsilon^2 \\
& \quad - \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx - f(b)(1-s)\epsilon + f'(b-\delta)\frac{1-s}{2}\epsilon^2. \tag{116}
\end{aligned}$$

そして $1 < \gamma_2 < 2$ のときには (102) を参考にすると $z = \frac{x}{y_2}$ とすると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_2(1-s)(\gamma_2-1)((1-s)(\gamma_2-1)-1)} \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\
& \cong \int_0^\delta \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \frac{x^{s(\gamma_2-1)}}{(x+y_2)^{2-(1-s)(\gamma_2-1)}} dy_2 dy_1 dx \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_0^{\frac{\epsilon}{y_2}} \frac{z^{s(\gamma_2-1)}}{(z+1)^{2-(1-s)(\gamma_2-1)}} dz y_2^{\gamma_2-2} dy_2 dy_1 \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} B(2-\gamma_2, s(\gamma_2-1)+1) \frac{1}{\gamma_2(\gamma_2-1)} \epsilon^\gamma - \frac{1}{2(\gamma_2-2)} \delta^{\gamma_2-2} \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{117}$$

$1 < \gamma_2 < 2$ のときには (116) と (117) を組み合わせると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_a^c f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 \\
& \quad + \frac{A_2(1-s)(\gamma_2-1)((1-s)(\gamma_2-1)-1)}{\gamma_2(\gamma_2-1)} B(2-\gamma_2, s(\gamma_2-1)+1) \epsilon^\gamma \\
& \quad + \left(\frac{s(s-1)}{2} \left(\int_c^{b-\delta} f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + \frac{A_2(\gamma_2-1)^2}{\gamma_2-2} \delta^{\gamma_2-2} \right) \right) \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{118}$$

$\gamma_2 = 2$ のときには (106) を参考にして $z = \frac{x}{y_2}$ とおくと以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_2(1-s)((1-s)-1)} \int_{b-\delta+\epsilon}^b f^s(x) \int_{-\epsilon}^0 \int_0^{y_1} (f^{1-s})''(x+y_2) dy_2 dy_1 dx \\
& \cong \int_0^\delta \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \frac{x^s}{(x+y_2)^{2-(1-s)}} dy_2 dy_1 dx \\
& = \int_0^\epsilon \int_0^{y_1} \int_0^{\frac{\epsilon}{y_2}} \frac{z^s}{(z+1)^{2-(1-s)}} dz dy_2 dy_1 \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \epsilon^2 \log \epsilon + \frac{1}{2} \left(\log \delta + \frac{3}{2} - E_u - \psi(1+s) \right) \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{119}$$

したがって $\gamma_2 = 2$ のときには (116) と (119) を組み合わせると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \tilde{I}_s^+(c, f, \epsilon) \\
& \cong_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_a^c f(x) dx - f(c)s\epsilon - f'(c)\frac{s}{2}\epsilon^2 + \frac{A_2 s(1-s)}{2} \epsilon^2 \log \epsilon \\
& \quad + \frac{s(s-1)}{2} \left(\int_{a+\delta}^c f^{-1}(x)(f'(x))^2 dx + A_2 \log \delta \right) \epsilon^2 + \frac{A_2(1-s)}{2} \left(-1 + s \left(-\frac{3}{2}s + E_u + \psi(1+s) \right) \right) \epsilon^2.
\end{aligned} \tag{120}$$

$\gamma > 2$ のときは式 (94) が適用できて (24) がそのまま示せる.

参考文献

- [1] M. Akahira, Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions, Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 48, No. 2, 349-364 (1996).
- [2] M. Akahira and K. Takeuchi, *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency* Lecture Notes in Statistics No 7, Springer (1981).

- [3] I. A. Ibragimov and R. Z. Has'minskii, *Statistical Estimation*, Springer, (1981).
- [4] J. C. Fu, Large sample point estimation: A large deviation theory approach, *Ann. stat.*, **10**, 762-771 (1982).
- [5] R. R. Bahadur, *Some Limit Theorems in Statistics*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 4, SIAM (1971).
- [6] J. C. Fu, On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of point estimator, *Ann. stat.*, **1**, 745-749 (1973).
- [7] 韓 太舜, 大偏差理論に関する基礎的考察, IS Technical Reports, UEC-IS-1998-4, (1998).
- [8] 長岡 浩司, 量子状態推定の漸近理論について, 数理解析研究所講究録 **879**, 155-171, (1994).
- [9] H. Nagaoka, Two quantum analogues of the large deviation Cramér-Rao inequality, *Proc. of 1994 IEEE International Symposium on Information Theory*, p.118 (1994).
- [10] P. J. Huber, Robust confidence limits, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **10**, 269-278 (1968).
- [11] G. L. Sievers, Estimates of location: A large deviation comparison, *Annals of Statistics*, **6**, 610-618 (1978).
- [12] J. C. Fu, On exponential rates of likelihood ratio estimators for location parameters, *Stat. & Prob. Let.*, **3**, 101-105 (1985).
- [13] 赤平 昌文, 統計的推測と大偏差型確率, 数理科学 2月号, (1995).
- [14] H. Chernoff, A measure of asymptotic efficiency for tests for a hypothesis based on a sum of observations, *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 493-507 (1952).
- [15] 韓 太舜, 小林 欣吾, 情報と符合化の数理, 培風館 (1999).
- [16] 韓 太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館, (1998).
- [17] 林 正人, 量子 1-パラメータ族の推定における大偏差型評価, 「情報幾何の新しい展開」(統計数理研究所共同研究会) 講演資料, (1999).
- [18] 甘利 俊一, 非正則分布族のフィンスラー幾何学, 数理解析研究所講究録 **6**, 27, (1984).
- [19] 森口 繁一, 宇田川 かね久, 一松 信, 岩波数学公式 I, 岩波書店, (1956).