

(Free talking)

不連続なマルチンゲールについて

東工大 理 士 岩 正 明

§1. 序

これは、フリー トー キングで、話したことに、少々付け加えたものである。

2 乗可積分、右連続なマルチンゲールの作る空間 $\mathcal{M}_d$ に留意して、その不連続な部分空間 $\mathcal{M}_d^d$ の構造が、S. Watanabe [4] (additive functional の場合)、H. Kunita & S. Watanabe [1] (Hunt process の上の $\mathcal{M}_d$ の場合) において、明らかにされ、種々の応用が、とてなされている。

最近、P. A. Meyer が [2] において、マルチンゲールの確率積分の拡張をしている。

それが、どの位拡張になっているかという = とが、 $\mathcal{M}_d$ の表現と関連して与える = とが出来る。(Theorem 1)

これは最初、本尾氏が予想された = とである。

これを additive functional の場合にみてもみると、もう少し、具体的な形で与えられる (Theorem 3)。

そこで、渡辺信三氏の結果[4]の $\mathcal{M}_d(A)$ の表現に類似の表現が得られる。その間の関係もある程度分る。

しかし、Theorem 3 の表現を得るとき、[4]の結果を使用しないと、今のところ証明出来ない。

§2. マルチンゲールの場合.

notation, definition については詳しくは、P.A. Meyer [2] を参照のこと。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: complete separable probability space.

$(\mathcal{F}_t)$: increasing family of sub σ -fields of $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

$\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の null set をすべて含む。

更に、 $(\mathcal{F}_t)$ は不連続時間をまたないことを仮定する。

i.e. $\forall T_n \uparrow T$ (stopping time の列), $\mathcal{F}_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$

考える process は、すべて $(\mathcal{F}_t)$ -well adapted として、

マルチンゲールに等しいとして、 $(\mathcal{F}_t)$ に関して考える。

• process $\{X_t\}$ が very well measurable (well measurable)

$\xLeftrightarrow{\text{def}} (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ は、左連続 (右連続), 右極限 (左極

限) をもつ process を可測にする $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の最小の σ -field に関して、可測となる。

例 $\equiv$ 2乗可積分、右連続なマルチンゲール。

$\mathcal{O}^+ \equiv \{ \text{右連続 increasing process } (A_t); A_0 = 0, E(A_t) < +\infty \forall t \geq 0 \}$

$\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}^+ - \mathcal{O}^+ \equiv \{ A = A^1 - A^2; A^i \in \mathcal{O}^+, i=1,2, \}$

$\mathcal{M}_c \equiv \{ \mathcal{M} \text{ の元で連続なもの } \}$

$\mathcal{M}_c^+, \mathcal{O}_c$ も同様に定義する.

知らしめておく = とを以下にあげる. $\mathcal{M} \ni X, X_0 = 0$ とおく.

① $\forall X, Y \in \mathcal{M}$ に対し, $\exists_1 \langle X, Y \rangle \in \mathcal{O}_c$;

$$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{martingale}.$$

$\langle X, Y \rangle = 0$ のときは, X と Y は直交する という.

$\mathcal{M}_d \equiv \{ X \in \mathcal{M}; \forall Y \in \mathcal{M}_c, \langle X, Y \rangle = 0 \}$

② $X^n, X \in \mathcal{M}$,

$$X^n \rightarrow X \text{ (in } \mathcal{M} \text{) as } n \rightarrow \infty$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} E \{ (X_t^n - X_t)^2 \} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)} \quad \forall t \geq 0.$$

$\mathcal{M}_c, \mathcal{M}_d, \mathcal{M}$ は上の limit の意味で閉じている.

③ $X \in \mathcal{M}$ は, $X = X^c + X^d$ $X^c \in \mathcal{M}_c, X^d \in \mathcal{M}_d$

と一意に分解出来る.

$X, Y \in \mathcal{M}$ に対し,

$$[X, Y]_t \equiv \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \in \mathcal{O}$$

$$[X, X]_t \equiv [X]_t \quad \text{例. } \Delta X_s \equiv X_s - X_{s-}.$$

とおく.

$X \in \mathcal{M}$ に対し

$$L^2(X) \equiv \{ H = H_s(\omega); H \text{ は well measurable, } E \left[\int_0^t H_s^2 d[X]_s \right] < +\infty \forall t \geq 0 \}$$

Theorem 0 (P.A. Meyer [2])

$$\forall X \in \mathcal{M}, \forall H \in L^2(X)$$

$$\Rightarrow \exists Y \in \mathcal{M}, [Y, M]_t = \int_0^t H_s d[X, M]_s \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{M}$$

上の Y を $\int H_s dX_s$ とおき、これを「確率積分」という。

$$k < 1. \quad X \in \mathcal{M}_d \Rightarrow \int H_s dX_s \in \mathcal{M}_d.$$

Theorem 1

$$\exists M \in \mathcal{M}_d; \quad \mathcal{M}_d = S[M] \equiv \left\{ \int H_s dM_s; H \in L^2(M) \right\}$$

(証明略)

Remark 1

上の M は - $\frac{1}{2}$ 2nd order

$$\bullet T \text{ : accessible } \Leftrightarrow P(M_T = M_{T-} : T < \infty) = P(T < \infty)$$

$$\bullet T \text{ : totally inaccessible } \Leftrightarrow P(M_T \neq M_{T-} : T < \infty) = P(T < \infty)$$

Remark 2

$A \in \mathcal{R}^+$, quasi-left continuous & purely discontinuous

$$A \ll [M]$$

$$\Rightarrow \tilde{A} \ll [M] \quad (\tilde{A} \in \mathcal{R}_c^+, A - \tilde{A} = \text{martingale})$$

§3 Additive functional の場合.

notation, definition については [1], [4] 参照.

$(X_t, \mathcal{F}_t, \zeta, P_x, x \in E)$; Hunt process

Meyer の (L) を仮定する.

$\mathcal{A}(A) \equiv \{ \text{平均 0, 2 乗 可積分, additive functional} \}$

$\mathcal{A}_c(A) \equiv \{ \mathcal{A}(A) \text{ の元で continuous なもの } \}$

$\mathcal{A}_d(A) \equiv \{ \mathcal{A}(A) \text{ の元で } \mathcal{A}_c(A) \text{ と直交するもの } \}$

$X \in \mathcal{A}(A)$

$$L^2(X) \equiv \left\{ f = f(x, y); \begin{array}{l} f \text{ は } B(E \times E) \text{-可測} \\ E_x \left[\int_0^t f^2(X_s, X_s) d[X]_s \right] < +\infty \quad \forall t \geq 0, \forall x \end{array} \right\}$$

$B(E \times E)$; $E \times E$ 上の有界な Borel function 全体.

Theorem 2

$X \in \mathcal{A}(A), f \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists Y \in \mathcal{A}(A),$

$$[Y, M]_t = \int_0^t f(X_{s-}, X_s) d[X, M]_s \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{A}(A)$$

$Y = \int f(X_{s-}, X_s) dX_s$ (確率積分) となる.

$X \in \mathcal{A}_d(A) \Rightarrow Y \in \mathcal{A}_d(A)$

(証明略)

Theorem 3

$\exists M \in \mathcal{A}_d(A) ;$

$$\mathcal{M}_d(A) = S[M] = \left\{ \int f(x_s, x_s) dM_s ; f \in L^2(M) \right\}$$

(証明略)

Remark 3

上の M は path x_t から具体的に $x_t = x_t$ として与えられる。

このとき, $n(x, dy)$: kernel として存在して

$$\left\langle \int f(x_s, x_s) dM_s \right\rangle_t = \int_0^t \int_E f^2(x_s, y) n(x_s, dy) d\langle M \rangle_s$$

と与えられる。予想される。

文献

- [1] H. Kunita & S. Watanabe : On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. vol.30. (1967.)
- [2] P.A. Meyer : Integrales Stochastiques I, II, III, IV.
Seminaire de Probabilités. Univ. de Strasbourg (1966)
- [3] M. Motoo & S. Watanabe : On a class of additive functionals of Markov Processes.
Jour. of Math. of Kyoto Univ. vol. 9, No. 3 (1965)
- [4] S. Watanabe : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov process.
Jap. Jour. of Math. vol XXXIV (1964)