

Penalty method を用いた反射壁 SDE の近似

熊本大学工学部数理情報システム 税所 康正 (SAISHO, Yasumasa)

Introduction

多次元領域における反射壁確率微分方程式, いわゆる Skorohod SDE の近似については近年さまざまなアプローチがある. 大別すると, 直接折れ線で近似する Euler-Maruyama 型のもの ([2],[8],[10],[14],[15]) と, もう一つは, 反射壁の方程式を一旦反射壁ではない通常の確率微分方程式 (SDE) で近似して (いわゆるペナルティ・メソッドと呼ばれる方法による), さらにその方程式を Euler-Maruyama 近似する方法である^{注1}. ただし, [4],[9] では領域として有界で凸であることが仮定されている.

本稿では, まず前者の, Skorohod SDE に対する Euler-Maruyama 型の近似の結果を紹介し, その後ペナルティ・メソッドと Euler-Maruyama 型の近似を組み合わせた後者の方法による新しい結果を紹介する. ここでは扱われる領域の条件として有界性や凸であることを要求しない (Theorem 4.1).

§1 では Skorohod SDE 及びそのもとになる Skorohod problem(equation) についてまとめておく. §2 では Skorohod SDE の Euler-Maruyama 型の近似の結果を紹介し, §3 でペナルティ・メソッドについての結果をまとめておく. §4 で反射壁ブラウン運動の場合に対して上述の新しい結果を与える.

1 Skorohod problem/equation and Skorohod SDE

[12] にしたがって, 領域 $D \subset \mathbf{R}^d$ に対する条件, Condition (A), (B) を述べておく. まず, normal vector を定義する:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{x,r} &= \{\mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1, B(x - r\mathbf{n}, r) \cap D = \emptyset\}, \quad r > 0, \\ \mathcal{N}_x &= \bigcup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}, \quad x \in \partial D.\end{aligned}$$

ここで, $B(y, r) = \{z \in \mathbf{R}^d : |z - y| < r\}$, $y \in \mathbf{R}^d$, $r > 0$.

Condition (A) ある定数 $r_0 > 0$ が存在して, すべての境界点 $x \in \partial D$ に対して

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset.$$

^{注1} 1次元反射壁確率微分方程式の場合はその他に, 付随する局所時間を近似する方法が知られているがここでは触れない.

Condition (B) ある定数 $\delta > 0$ と $\beta \in [1, \infty)$ が存在して、次のことが成立する：任意の $x \in \partial D$ に対して単位ベクトル ℓ_x が存在して、

$$\langle \ell_x, n \rangle \geq 1/\beta \quad \text{for any } n \in \bigcup_{y \in B(x, \delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y.$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{R}^d$ の通常の内積。

Remark 1.1 D が凸のときは任意の $r_0 > 0$ に対して Condition (A) がみたされる。

Remark 1.2 ([12] Remark 1.3) 領域 D が Condition (A) を満たし $\text{dist}(x, \overline{D}) < r_0$ であるとき、 $\text{dist}(x, \overline{D}) = |x - \bar{x}|$ を満たす $\bar{x} \in \overline{D}$ が一意的に存在する。特に $x \in D$ のときは $\bar{x} = x$ で、 $x \notin D$ のときには $\bar{x} \in \partial D$ である。

Skorohod problem/equation 与えられた連続関数^{注2} w に対して、次を満たす組 (x, φ) を見つける問題を Skorohod problem といい、また次の方程式を Skorohod equation とよぶ。

$$\begin{cases} x(t) = w(t) + \varphi(t), & t \geq 0, \\ w(0) \in \overline{D}, \end{cases}$$

ここで、

- ・ $x(t) \in \overline{D}$, 連続
- ・ $\varphi(t)$: 連続で有界変動, $\varphi(0) = 0$
- ・ $\varphi(t) = \int_0^t n(s) d|\varphi|_s$, $|\varphi|_t = \int_0^t I_{\{x(s) \in \partial D\}}(s) d|\varphi|_s$
- ・ $n(s) \in \mathcal{N}_{x(s)}$ if $x(s) \in \partial D$.

ただし、 $|\varphi|_t$ は φ の $[0, t]$ における全変動を表し、 $I_A(s) = \begin{cases} 1, & s \in A, \\ 0, & s \notin A \end{cases}$ である。

Skorohod SDE $\sigma: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$, $b: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ を有界で、Lipschitz 連続な関数とする：ある定数 $K > 0$ があって、任意の $x, y \in \overline{D}$ に対して

$$|\sigma(x)| + |b(x)| \leq K, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

このとき、次の確率微分方程式を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の Skorohod SDE とよぶ。

$$(1.1) \quad \begin{cases} X(t) = x + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X(s)) ds + \Phi(t), & 0 \leq t \leq T, \\ x \in \overline{D}, \end{cases}$$

ここで、

^{注2} w が連続でない場合、たとえば右連続で左極限を持つ関数の場合でも同様の問題／方程式を考えることができる。これらも含めて Skorohod problem/equation と呼ぶ。

- ・ $X(t) \in \overline{D}$, 連続
- ・ $\Phi(t)$: 連続で有界変動, $\Phi(0) = 0$
- ・ $\Phi(t) = \int_0^t \mathbf{n}(s) d|\Phi|_s$, $|\Phi|_t = \int_0^t I_{\{X(s) \in \partial D\}}(s) d|\Phi|_s$
- ・ $\mathbf{n}(s) \in \mathcal{N}_{X(s)}$ if $X(s) \in \partial D$.

ただし, $B(\cdot)$ は原点を出発する $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動である.

これらの方程式の解の存在と一意性についてここで詳しくふれることはしないが ([3],[12],[16] 参照), (1.1) の方程式については次の結果がある.

Theorem 1.1 ([12]) 領域 D が Condition (A) と (B) をみたすとき, (1.1) は (強い) 解を一意的にもつ.

2 Euler-Maruyama scheme

$$\begin{aligned} \Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T \quad ([0, T] \text{ の分割}) \\ |\Delta_n| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|, \quad \Delta B(t_k) = B(t_k) - B(t_{k-1}), \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}. \end{aligned}$$

としたとき, Skorohod SDE に対するいわゆる Euler-Maruyama scheme は次で与えられる (たとえば, [8] p.300 を見よ).

$$\begin{cases} \tilde{X}^n(t) = x \in \overline{D}, & 0 \leq t < t_1, \\ \tilde{X}^n(t) = \tilde{X}^n(t_{k-1}) + \sigma(\tilde{X}^n(t_{k-1}))\Delta B(t_k) + b(\tilde{X}^n(t_{k-1}))\Delta t_k, & t_k \leq t < t_{k+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{W}^n(t) = x \in \overline{D}, & 0 \leq t < t_1, \\ \tilde{W}^n(t) = \tilde{W}^n(t_{k-1}) + \sigma(\tilde{X}^n(t_{k-1}))\Delta B(t_k) + b(\tilde{X}^n(t_{k-1}))\Delta t_k, & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ \Phi^n(t) = \tilde{X}^n(t) - \tilde{W}^n(t). \end{cases}$$

Remark 2.1 $D = \mathbf{R}^d$ のときは通常の SDE に対する Euler-Maruyama scheme そのものである ([1],[5]). [1] の結果 (Theorem 3) によると, 収束の速さも精密に調べられている:

$$(2.1) \quad E\{\|\tilde{X}^n - X\|_T^p\} = o(|\Delta_n|^{p/2}(-\log|\Delta_n|)^\varepsilon), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varepsilon > p/2, \quad 2 \leq p < \infty.$$

ここで, $\|w\|_T \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)|$.

この結果を用いると, 次のように概収束の結果を容易に導くことができる.

Proposition 2.1 $D = \mathbf{R}^d$ のとき, $|\Delta_n| \leq 1/n$ とすると,

$$|\Delta_n|^\beta \|\tilde{X}^n - X\|_T \rightarrow 0 \quad a.e., \quad n \rightarrow \infty, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0.$$

Proof. $\alpha_n = |\Delta_n|^{\delta/2} (-\log |\Delta_n|)^{\varepsilon/p}$, $\beta = -\frac{1}{2} + \delta + \frac{1}{p}$, $\delta > 0$, $2 \leq p < \infty$ とすると, $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ で, (2.1) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\Delta_n|^\beta \|\tilde{X}^n - X\|_T > \alpha_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\{\|\tilde{X}^n - X\|_T^p\}}{\alpha_n^p |\Delta_n|^{-p\beta}} \\ &\leq \text{Const.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Delta_n|^{p/2} (-\log |\Delta_n|)^\varepsilon}{\alpha_n^p |\Delta_n|^{-p\beta}} \\ &= \text{Const.} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|^{1+p\delta/2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+p\delta/2} < \infty. \end{aligned}$$

Borel-Cantelli の lemma を用いて,

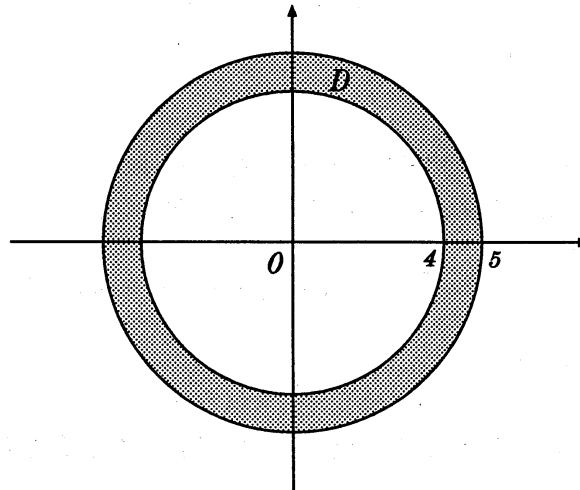
$$P\left(|\Delta_n|^\beta \|\tilde{X}^n - X\|_T > \alpha_n \quad \text{i.o.}\right) = 0. \quad \square$$

3 Penalty method

領域 D が Condition (A) をみたしているとき, 次のような関数 $U: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$ が存在する ([11],[13]) 注³:

- ・ $U \in C^1(\mathbf{R}^d)$
- ・ $U(x) = |x - \bar{x}|^2$ if $\text{dist}(x, \bar{D}) \leq r_0/2$
- ・ ∇U は有界で Lipschitz 連続 (この Lipschitz 定数を L とする).

例



注³ さらに $\nabla U = 2(x - \bar{x})$, $\text{dist}(x, \bar{D}) \leq r_0/2$ もわかる.

上図のような平面内の領域 $D = \{\mathbf{x} = (x, y) \mid 4 \leq |\mathbf{x}| \leq 5\}$ では, たとえば

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4, & |\mathbf{x}| < 1 \text{ or } |\mathbf{x}| > 8 \\ -\frac{1}{4}(5 - |\mathbf{x}|)^3 + \frac{7}{4}(5 - |\mathbf{x}|)^2 - 2(5 - |\mathbf{x}|), & 1 \leq |\mathbf{x}| < 3 \\ (|\mathbf{x}| - 4)^2, & 3 < |\mathbf{x}| \leq 4 \\ 0, & 4 < |\mathbf{x}| < 5 \\ (|\mathbf{x}| - 5)^2, & 5 \leq |\mathbf{x}| < 6 \\ -\frac{1}{4}(|\mathbf{x}| - 4)^3 + \frac{7}{4}(|\mathbf{x}| - 4)^2 - 2(|\mathbf{x}| - 4), & 6 \leq |\mathbf{x}| \leq 8 \end{cases}$$

とすれば上の条件を満たすことがわかる. $\square$

そこで, $m = 1, 2, \dots$ として拡散係数 σ の中に (1.1) の Skorohod SDE の解 X の値を入れた SDE

$$X_m(t) = x + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X_m(s)) ds - \frac{m}{2} \int_0^t \nabla U(X_m(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

を考えると, [13] Theorem 2 を用いれば, この方程式の解は一意的に存在することがわかる. また, $\tilde{X}_m$ を

$$\tilde{X}_m(t) = x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_m(s)) dB(s) + \int_0^t b(\tilde{X}_m(s)) ds - \frac{m}{2} \int_0^t \nabla U(\tilde{X}_m(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

の解とする. 各 m に対してこの存在と一意性はよく知られている^{注4}. これらの方程式については次のような結果が知られている.

Theorem 3.1 ([11],[13]) D が Condition (A),(B) をみたすとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|X_m - X\|_T = 0 \quad a.e.$$

Theorem 3.2 ([6],[7]) D が有界かつ凸で, さらに境界が C^2 クラスの滑らかさを持っているとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E\{\|\tilde{X}_m - X\|_T^p\} = 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Remark 3.1 $2 \leq p < \infty$ に対して, $\lim_{m \rightarrow \infty} E\{\|X_m - X\|_T^p\} = 0$ ならば^{注5} $\lim_{m \rightarrow \infty} E\{\|\tilde{X}_m - X\|_T^p\} = 0$.

^{注4} この SDE は反射壁でない通常の SDE で, しかも係数がすべて有界で Lipschitz 連続であることに注意.

^{注5} $\lim_{m \rightarrow \infty} E\{\|X_m - X\|_T^p\} = 0$ は, “ X_m が $m \rightarrow \infty$ のとき L^p で一様収束すれば” でおきかえてもよい.

Corollary 3.1 $\sigma \equiv 1$ (identity matrix) のとき, Condition (A), (B) のもとで,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|X_m - X\|_T = 0 \quad a.e. \quad \text{かつ} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{X}_m - X\|_T = 0 \quad a.e.$$

4 Results

以下 D は Condition (A),(B) を満たす領域とし, $\sigma \equiv 1$ (identity matrix) を仮定する. また, 簡単のため $T = 1$ とする.

Proposition 4.1 ([12]) 任意の $\varepsilon \in (0, r_0)$ に対して, 次を満たす正整数 M が存在する:

$$X_m(t) \in D_\varepsilon \equiv \{x \mid \text{dist}(x, D) < \varepsilon\}, \quad 0 \leq t \leq 1, m \geq M.$$

さて, 逆に M によって $\sup_{0 \leq t \leq 1} \text{dist}(X_m(t), D)$ がどうなるのか調べることにする.

$$w_m(t) = x + B(t) + \int_0^t b(X_m(u)) du,$$

$$\Delta_{0,T,h}(w) = \sup_{\substack{0 \leq s, t \leq T \\ |t-s| < h}} |w(t) - w(s)|, \quad T > 0, h > 0$$

と書くと, [11] の Lemma II-2.2, Proposition II-2.1 (または, [13] Lemma 4.2, Proposition 4.1 を注意深く書き直したもの) から, M を

$$(4.1) \quad \Delta_{0,1,1/m}(w_m) < \frac{\varepsilon}{12} e^{-L}, \quad \forall m \geq M$$

となるように定めれば $X_m(t) \in D_\varepsilon, 0 \leq t \leq 1$ となることがわかる. ところが Brownian path の連続性の程度と係数 b の有界性から,

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1,1/m}(w_m) &\leq \Delta_{0,1,1/m}(B) + K \cdot \frac{1}{m} \\ &\leq \text{Const.} \sqrt{\frac{2}{m} \log m} + K \cdot \frac{1}{m} \\ &\leq \text{Const.} \sqrt{\frac{2}{m} \log m}, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

そこで, (4.1) より

$$\sqrt{\frac{1}{m} \log m} < \text{Const.} \varepsilon$$

とすると,

$$m < \exp\{\text{Const.} m \varepsilon^2\}.$$

これから, $c = \text{Const.}$ として, $\exp\{cm\varepsilon^2\} > 1 + cm\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(cm\varepsilon^2)^2$ に注意すれば, (4.1) が成り立つためには

$$\varepsilon^2 \leq -\frac{1}{cm} + \frac{1}{c\sqrt{m}} \sqrt{2 - \frac{1}{m}}$$

であれば十分であることがわかる. $m \rightarrow \infty$ のときに右辺は $o(m^{-\frac{1}{2}+\delta})$, $\forall \delta > 0$ であることに注意すると次のことがわかる.

Proposition 4.2 $m \rightarrow \infty$ のとき, ある $\varepsilon = \varepsilon(m) > 0$ に対して, $X_m(t) \in D_\varepsilon$, $0 \leq t \leq 1$. さらに, $\varepsilon = o(m^{-\frac{1}{4}+\delta})$, $m \rightarrow \infty$, $\forall \delta > 0$.

そこで, $\tilde{X}_m^n(t)$ を $X_m(t)$, $0 \leq t \leq 1$ に対する Euler-Maruyama 近似とすると, Proposition 2.1 と組み合わせて次が得られる.

Theorem 4.1 任意の $\delta, \delta' > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}-\delta} \|\tilde{X}_m^n - X_m\|_1 &\rightarrow 0 \quad \text{a.e., } n \rightarrow \infty, \\ m^{\frac{1}{4}-\delta'} \|X_m - X\|_1 &\rightarrow 0 \quad \text{a.e., } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Remark 4.1 実際の計算機シミュレーションを行うときには, 十分大きな m を 1 つとって固定し, その m に対して決まる X_m を Euler-Maruyama 近似することになる. したがって, 計算のスピードは反射壁でない通常の SDE の場合と全く変わらないことになる.

Remark 4.2 D が有界かつ凸であるとき, 同様の結果 (ただし収束は L^2) は [4] あるいはさらに精密にした [9] や [10] で与えられている:

Theorem 4.2 ([9] Theorem 3.1) D が有界かつ凸であれば,

$$E\{\|\tilde{X}_m^n - X_m\|_T^2\} = O\left(\left(\frac{1}{n} \log n\right)^{1/2}\right), n \rightarrow \infty.$$

References

- [1] S. Kanagawa, On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations, Yokohama Mathematical Journal **36** (1988) 79-86.
- [2] D. Lépinle, Un Schema d'Euler pour équations différentielles stochastiques réfléchies, C.R.Acad.Sci.Paris I **316** (1993) 601-605.
- [3] P.L. Lions and A.S. Sznitman, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. XXXVII (1981) 511-537.

- [4] Y. Liu, Numerical approaches to reflected diffusion processes, Manuscript, Department of Mathematics, Purdue University, Indiana (1993).
- [5] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **4** (1955) 48-90.
- [6] J.L. Menaldi, Stochastic variational inequality for reflecting diffusion, *Indiana Univ. Math. Jour.* **32** (1983) 733-744.
- [7] J.L. Menaldi and M. Robin, Reflected diffusion processes with jumps, *Ann. Probab.* **13** (1985) 319-341.
- [8] R. Pettersson, Approximation for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries, *Stoch. Processes Appl.* **59** (1995) 295-308.
- [9] R. Pettersson, Penalization schemes for reflecting stochastic differential equations, to appear in *Stoch. Processes Appl.*
- [10] R. Pettersson, Projection scheme for stochastic differential equations with convex constants, preprint.
- [11] Y. Saisho, Multi-dimensional Skorohod equations and reflecting diffusions, A dissertation submitted to Keio University (1986).
- [12] Y. Saisho, Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary, *Probab. Theory Rel. Fields* **74** (1987) 455-477.
- [13] Y. Saisho and H. Tanaka, On the symmetry of a reflecting Brownian motion defined by Skorohod's equation for a multi-dimensional domain, *Tokyo J. Math.* **10** (1987), 419-435.
- [14] L. Słomiński, On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions, *Ann. Inst. H. Poincaré* **29** (1993) 163-198.
- [15] L. Słomiński, On approximation of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions, *Stoch. Processes Appl.* **50** (1994) 197-219.
- [16] H. Tanaka, Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979) 163-177.

SAISHO, Yasumasa

Department of Computer Science,
Faculty of Engineering,
Kumamoto University

saisho@tech.kumamoto-u.ac.jp

<http://math.tech.kumamoto-u.ac.jp/personal/saisho/index-j.html>