

ベクトル値ポアッソン積分と調和セクション の作る Hardy class について

名大 理学部 浦川 肇

§ 1. 序

$D = \{z \in \mathbb{C}^1; |z| < 1\}$ 単位球 とし, $B = \{e^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ を D の境界とする。また $db = \frac{1}{2\pi} dt$ を B 上の回転で不変な測度と
し, B 上の関数 ϕ に対して次のような積分 (ポアッソン積分)
を考える:

$$\mathcal{P}_\mu \phi(z) := \int_B P(z, b)^\mu \phi(b) db$$

ここで μ は複素数であり, $P(z, b)$ (ポアッソン核と呼ばれる) は

$$P(z, e^{it}) := \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$$

によって与えられるものとする。この時次のような事実が成
り立つことが知られている。

$z = x + iy$, $\Delta := -(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ D 上の Laplace - Bel-
trami 作用素とした時,

$$\Delta \mathcal{P}_\mu \phi = 4\mu(1-\mu) \mathcal{P}_\mu \phi$$

が成り立つ。更に

(i) μ : 正なる実数, B 上の連続関数 ϕ に対し, B 上の各点 e^{it} において

$$\lim_{r \uparrow 1} c_\mu (1-r^2)^{\mu-1} \mathcal{F}_\mu \phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立つ。ここで $c_\mu = \Gamma(\mu)^2 / \Gamma(2\mu-1)$, $\Gamma(\mu)$ はいわゆるガンマ関数である。

(ii) $\mu = 1$ の時, (i) $\phi \in L^1(B)$ に対しては, ほとんど至る所の e^{it} において

$$\lim_{r \uparrow 1} \mathcal{F}_1 \phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立ち, 特に (i) $p > 1$ に対しては次のことが成り立つ。

D 上の関数 f に対して, $f_r(u) := f(ru)$, $0 \leq r < 1$, $u \in B$ によって B 上の関数 f_r を定義し, db に依る L^p -norm を $\|f_r\|_p$ とおく。

そこで Hardy class と呼ばれる関数空間 $H^p(D)$ を,

$$H^p(D) := \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{C}, \text{ } C^\infty\text{-関数} \mid \Delta f = 0 \text{ かつ } \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p < \infty \right\}$$

と定義すると, $H^p(D)$ はノルム $\|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p$ に関して Banach 空間となり, $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_1$ によって, $L^p(B) \cong H^p(D)$ なる Banach 空間としての同型が与えられる。

ところで, 一般に, 非コンパクト型のエルミート対称空間 G/K において, ポアソン積分は次のように拡張された (K. Okamoto [11]): G/K を Harish-Chandra の imbedding により, 複素

空間の有界領域 Ω として、正則同型に埋め込む。この時、 Ω の
 Silov境界は、均質空間 $G/B(E)$ と同一視できる($B(E)$ は G の極大
 parabolic部分群)。 K の表現 τ に associate した G/K 上の vector
 bundle E_τ を考え、 $G/B(E)$ 上の vector bundle の section の作る空間
 から、 E_τ の section の作る空間への写像としてポアッソン積分
 を一般化する。すなわち、境界 $G/B(E)$ 上の G の表現を G/K 上
 の G の表現に写す写像として定義された。

そこで我々は、単位円板 D 上の Hardy class $H^p(D)$ を拡張し、
 一般化されたポアッソン積分の境界値を調べることにより、
 どのような境界 $G/B(E)$ 上の表現が、ポアッソン積分によって一
 般化された Hardy class に写されるかを調べる。この結果、疎
 系列とその limit に続く非ユニタリ有界表現のある系列が現
 れてくることになった。これは、Knapp - Okamoto [5] の結果
 の analogy である。

§2. ポアッソン積分の境界値について

G を非コンパクト半単純リー群、 K を G の極大コンパクト
 部分群とし、均質空間 G/K が対称空間になっているとする。
 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ を G , K のリー環とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ を Cartan 分解とする。
 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{s}$ の極大可換部分環、 $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{s}$ を含む $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環と
 する。 Σ を $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系とする。(一般に実
 リー環 $\mathfrak{m}$ に対し、その複素化を $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ と書くことにする。) また σ

を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に属する conjugation とし、 $\mathbb{L}$ の順序 $>$ を、" $\alpha > 0$ かつ α の $\mathfrak{h}$ の制限が恒等的に零でなければ、 $\delta(\alpha) > 0$ " となるように定義する — order。 $\mathbb{L}_0$ を $\mathfrak{h}$ で恒等的に零になる $\mathbb{L}$ の元全体とし、 $\mathbb{L} - \mathbb{L}_0$ の元の $\mathfrak{h}$ の制限を 制限根 といふ。 $\mathbb{L}$ の上の順序 β 、制限根の集合に順序 β を定義し、 F を制限根のこの順序に属する基本系とする。 F の部分集合 E に対して、
 Muru [10] に従って次のような集合を定義する：

$$\mathfrak{n}(E) := \{ H \in \mathfrak{n} ; \gamma(H) = 0 \quad \forall \gamma \in E \}$$

$$\mathbb{L}_0(E) := \{ \alpha \in \mathbb{L} ; \pi(\alpha) = \sum_{\gamma \in E} n_{\gamma} \gamma, \quad n_{\gamma} : \text{整数} \} \quad (\pi \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の } \mathfrak{h} \text{ の } \textcircled{\text{制限}})$$

$$\mathbb{L}_+(E) := \{ \alpha \in \mathbb{L} - \mathbb{L}_0(E) ; \alpha > 0 \}, \quad \mathbb{L}_-(E) := \{ \alpha \in \mathbb{L} - \mathbb{L}_0(E) ; \alpha < 0 \}$$

この時、 $\sum_{\alpha \in \mathbb{L}_+(E)} \mathbb{C} E_{\alpha}$, $\sum_{\alpha \in \mathbb{L}_-(E)} \mathbb{C} E_{\alpha}$ は δ で不変な $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分環で、 $\mathfrak{g}$ とのそれぞれの共通部分を $\mathfrak{n}(E)$, $\bar{\mathfrak{n}}(E)$ とする (E_{α} は α に対する root vector)。また $\mathfrak{z}(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$ の $\mathfrak{g}$ における正規化環、 $\mathfrak{m}(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$ の K における中心化環 $B(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$ の G における正規化群、 $M(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$ の K における中心化群とする。また $N(E)$, $\bar{N}(E)$, $A(E)$ を $\mathfrak{n}(E)$, $\bar{\mathfrak{n}}(E)$, $\mathfrak{a}(E)$ に対応する G の部分群とする。 E が空集合の時、 E をはぶいて、 $\mathfrak{n}$, A , $\mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{n}}$, N , $\bar{N}$, $\mathfrak{z}$, m , B , M とかくことにする。

定義 $\lambda := \sum p_E \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$, $\sum \in \mathbb{C}^1$ とする。ここで $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ は $\mathfrak{n}$ の双対空間 $\mathfrak{n}^*$ の複素化とし、 p_E は $\mathbb{L}_+(E)$ の元の和の半分とする。また τ を K の有限次元ユタリ表現で、その表現空間を V_{τ} と

する。この時

$$C_{\tau, \lambda}(G/B(E)) := \{ \phi : G \rightarrow V_{\tau} \mid \text{連続写像で条件 (1) を満たす} \}$$

とおく。ここで

$$(1) \quad \phi(gman) = e^{-(i\lambda + \rho_E)(\log a)} \tau(m^{-1}) \phi(g)$$

$m \in M(E)$, $a \in A$, $n \in N$ で, $\log a$ は $a = \exp(\log a)$ を満たす
 $\mathbb{R}$ の元。 $B(E) = M(E)AN$ となることに注意。 $p \geq 1$ に対し

$$L^p_{\tau, \lambda}(G/B(E)) := \{ \phi : G \rightarrow V_{\tau} \mid (1), (2) \text{ を満たす} \} \text{ とおく。}$$

ここで

$$(2) \quad \int_K \|\phi(k)\|^p dk < \infty$$

$\|\cdot\|$ は V_{τ} におけるノルムで dk は K の Haar 測度である。

K. Okamoto [11] に従って, $C_{\tau, \lambda}(G/B(E))$ または $L^p_{\tau, \lambda}(G/B(E))$ の各元 ϕ に対し
 ϕ の Poisson 積分 を

$$(3) \quad \mathcal{P}_{\tau, \lambda} \phi(g) := \int_K \tau(k) \phi(gk) dk$$

によって定義する。この時、定義から $\mathcal{P}_{\tau, \lambda} \phi(gk) = \tau(k^{-1}) \mathcal{P}_{\tau, \lambda} \phi(g)$

を満たし、 $\mathcal{P}_{\tau, \lambda} \phi$ は、 τ に associated した G/K 上の vector bundle の
section になっているが、 $\mathcal{P}_{\tau, \lambda} \phi$ の境界値は次のようになっている

こととわかる。ここで $g \in G$ に対し、 $g = k(g) \exp H(g) n$
 $(k(g) \in K, H(g) \in \mathbb{R}, n \in N)$ を右既分解 $G = KAN$ に従った分
解としておく。

命題 1

$\mathcal{O}^+(E) := \{ H \in \mathfrak{a}(E) : \alpha(H) > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma_+(E) \}$ とする。 $H \in \mathcal{O}^+(E)$

に対して, $a_t = \exp tH$ とおく. この時次のことが $\forall \varepsilon$ の $\varphi \in G$ と $\phi \in C_{\tau, \lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ に対して成り立つ:

$$(4) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(i\lambda + \rho_E)(\log a_t)} \int_{\tau, \lambda} \phi(g a_t) = \int_{\bar{N}(\mathbb{R})} \tau(k(\bar{n})) \phi(g) e^{(i\lambda - \rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n}$$

命題 2

$1 < p < \infty$ とする. $\forall \varepsilon$ の $\phi \in L^p_{\tau, \lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ に対して,

$$(5) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_K \left\| e^{(i\lambda + \rho_E)(\log a_t)} \int_{\tau, \lambda} \phi(k a_t) - \int_{\bar{N}} \tau(k(\bar{n})) \phi(k) e^{(i\lambda - \rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} \right\|^p dk = 0$$

が成り立つ.

この命題から, $1 < p < \infty$ かつ $\operatorname{Re} \langle i\lambda, \alpha \rangle < 0$ for all $\alpha \in \Sigma_+(\mathbb{R})$ が成り立つ時, $\phi \in L^p_{\tau, \lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ に対して,

$$(6) \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \int_K \left\| e^{(i\lambda + \rho_E)(\log a_t)} \int_{\tau, \lambda} \phi(k a_t) \right\|^p dk \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C_E |-\lambda_2| \|\phi\|_{L^p(X_{H(\mathbb{R})})}$$

が成り立つ. ここで, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ かつ $C_E |-\lambda_2| = \int_{\bar{N}(\mathbb{R})} e^{-(\lambda_2 + \rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} < \infty$ であり, $\|\phi\|_{L^p(X_{H(\mathbb{R})})}$ は $\|\phi(k)\|$ の普通の L^p -ノルムである.

これでポアソン積分 $\int_{\tau, \lambda}$ の像の性質がわかったわけであるが, エルミート対称空間に対する次のような準備をしておく.

§3. エルミート対称空間のある性質

以後, G/K は a tube domain と正則同型な エルミート対称

領域と仮定する。また G は複素化 $G^{\mathbb{C}}$ をもつと仮定する。 $\mathfrak{g}$ を R の Cartan 部分環とすると、これは $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環にもなっている。 $T^{\mathbb{C}}, K^{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $G^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ に対応するリー群とする。 R を、 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系とし、 $\alpha \in R$ に対し、 $\mathfrak{g}_{\alpha}$ を α に対応するルート空間とすると、 $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ 又は $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ となっているから、それによって、 α をコンパクト・ルート、非コンパクト・ルートと呼ぶ。 R_R, R_{π} をコンパクト・ルートの集合 (非コンパクト・ルートの集合) としておく。また、 $\mathfrak{g}$ と G/K の原点 eK における接空間 $T_{eK}(G/K)$ とを自然に同一視し、 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ と $T_{eK}(G/K)$ の複素化 $T_{eK}^{\mathbb{C}}(G/K)$ とを同一視する。 $\mathfrak{g}_{-} (\mathfrak{g}_{+})$ をそれぞれ $T_{eK}^{\mathbb{C}}(G/K)$ の正則 (反正則) バクトル全体の作る $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ の部分空間とすると、 $\mathfrak{g}_{+}, \mathfrak{g}_{-}$ は、 $\text{ad}(R^{\mathbb{C}})$ 不変な可換な $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ の部分環で、 $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{+} + \mathfrak{g}_{-}$ となっている。 P_{+}, P_{-} を対応する $G^{\mathbb{C}}$ のリー部分群とする。 R の部分集合 P_n で、 $\mathfrak{g}_{+} = \bigcup_{\alpha \in P_n} \mathfrak{g}_{\alpha}$ なるものが存在するから、 R の順序 $\prec$ として、 R の正のルートの集合 P が P_n を含むように定義する。 $P_R = P \cap R_R$ とおく。

さて今、 τ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト real form $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の conjugation とし、 $\alpha \in R$ に対して $\tau E_{\alpha} = -E_{-\alpha}$ となるようにとる。 Δ を Harish-Chandra [1] の構成した非コンパクト正ルートで strongly orthogonal (i.e. 二つのルート α, β が strongly orthogonal とは、 $\alpha \pm \beta$ がルートでないことをいう) なものの極大集合とする。そこで $\alpha \in \Delta$ に対して、 $X_{\alpha}^{\circ} := E_{\alpha} + E_{-\alpha}$,

611

$Y_\alpha^0 := (-\sqrt{1})(E_\alpha - E_{-\alpha})$, $H'_\alpha := \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha$ とおく。ただし H_α

は $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ を満たす $H \in \mathfrak{q}^c$ に対して満たす $\sqrt{1}$ の元である。

更に, $X^0 := \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha^0$, $\Sigma^0 := -\frac{\sqrt{1}}{2} \sum_{\alpha \in \Delta} H'_\alpha$ とおき, $\mathfrak{q}^- := \sqrt{1} \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H'_\alpha$

$\mathfrak{q}^+$ を $\mathfrak{q}^-$ の $\mathfrak{q}$ における Killing form B に関する直交補空間とし, $\mathfrak{q}^-$

$\mathfrak{q}^+$ に対応する T のリー部分群を T^-, T^+ とする。 $\mathfrak{a} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} X_\alpha^0$ と

すると $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換環で, $\mathfrak{g} := \mathfrak{q}^+ + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環

となっており, A, H を G の対応するリー部分群としておく。

さて, Okamoto-Knapp [5] に従って

$$u_t := \exp\left(\frac{\pi t}{4} \sum_{\alpha \in \Delta} (-\sqrt{1}) Y_\alpha^0\right) \in G^c, \quad 0 \leq t \leq 1$$

と定義する。この時、次のことが成り立つ。

補題 1

G/K は既約なエルミート対称空間とする (a tube domain と正則同型であることは仮定しなくてもよい)。この時 u_t は次のように

分解する:

$$(7) \quad u_t = z_t k_t z_t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ここで, $z_t = \exp\left(\tan \frac{\pi t}{4} \sum_{\alpha \in \Delta} E_{-\alpha}\right) \in P_-$, $k_t = \exp\left(\log(\cos \frac{\pi t}{4}) \sum_{\alpha \in \Delta} H'_\alpha\right) \in T^c$

$z_t = \exp\left(-\tan \frac{\pi t}{4} \sum_{\alpha \in \Delta} E_\alpha\right) \in P_+$ とする。更に $0 < t < 1$ に対して,

$$(8) \quad z_t = a_s h_r \eta_t$$

ここで, $a_s = \exp s X_0 \in A$, $(\tanh s = \tan \frac{\pi t}{4})$,

$$h_r = \exp\left(r \sum_{\alpha \in \Delta} H'_\alpha\right) \in T^c \quad (e^r = 1/\cosh(s))$$

$$\eta_t = \exp\left(-\tanh s \cdot e^{-2r} \sum_{\alpha \in \Delta} E_\alpha\right) \in P_+$$

と分解することになる。

また次のことはよく知られている:

$$(9) \quad \text{Ad}(u_1) = \text{id} \quad \text{on } \mathfrak{g}^+, \quad \text{Ad}(u_1)(H_\alpha) = X_\alpha^0, \quad \alpha \in \Delta$$

従って $\text{Ad}(u_1)(\mathfrak{g}^0) = \mathfrak{g}^0$ となる。 $\text{Ad}(u_1)$ を Cayley transform といふ。(cf. Moore [10]). このことから、 Σ を $(\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0)$ に属するルート系とすると、 ${}^t\text{Ad}(u_1^{-1})$ によって、 R は Σ に写る。そこで、我々は、 Σ の順序 $>$ を、 Σ の正ルート全体が、 ${}^t\text{Ad}(u_1^{-1})P$ と一致するよう定義する。この時、

補題 2 G/K が a tube domain と正則同型であることを仮定すると、上記の Σ の順序 $>$ は、 σ -order となる。

“ $0 < \alpha' \in \Sigma$ で、 α' が α ので恒等的に零でなければ”

$\sigma(\alpha') > 0$ が成り立つ。”

この補題から、§2 における Σ_0, Σ_+, F を考え、 $E := \{\alpha \in F : \alpha(X^0) = 0\}$ を考えると、 $\alpha(E) = \mathbb{R}X^0$ で、 $M(E)$ は、 X^0 の K における中心化群で、 $u_1^{-1}B(E)u_1 \in K^0P_+$ となっている。また、 δ を R の正ルートの和の半分、 ρ を Σ_+ のルートの和の半分、 ρ_E を、 $\Sigma_+(E)$ のルートの和の半分とすると、

$$(10) \quad \rho = {}^t\text{Ad}(u_1^{-1})\delta \quad \text{on } \alpha$$

$$\rho_E(X^0) = \rho(X^0) = \delta\left(\sum_{\alpha \in \Delta} H_\alpha\right)$$

が成り立っていることに注意する。

§4 Hardy class の構成

以上のあうな準備の下に, Hardy class を構成しよう。 Λ を d^0 上の dominant (K に對して) 整形式 とする。この Λ に対し τ_Λ を, K の既約ユニタリ表現で, 最高ウェイトが Λ なるものとし, その表現空間を V_Λ とする。この時 τ_Λ は P_+ 上恒等変換になるよう $K^0 P_+$ の正則な表現に拡張できる。そこで $\tau := \tau_\Lambda^*$ を V_Λ の双対空間 V_Λ^* の反傾表現とし, $\tilde{E}_\Lambda$ を τ に同様な $G/K^0 P_+$ 上のハッセル-バンドル とする。 $G \cap K^0 P_+ = K$ で, G/K は $G/K^0 P_+$ における原点の G -orbit と同一視でき, E_Λ を $\tilde{E}_\Lambda$ の G/K への制限として定義する。

定義

$$\Gamma(\Lambda) := \{ f : G/K^0 P_+ \rightarrow V_\Lambda^*, \text{ } C^\infty \text{ 写像で, 条件 (i), (ii) を満たす} \}$$

ここで (i) $f(gb) = \tau(\bar{b}) f(g)$, $g \in G/K^0 P_+$, $b \in K^0 P_+$

$$(ii) \|f\|_2^2 := \lim_{t \uparrow 1} \int_K \|f(ku_t)\|^2 dk < \infty.$$

補題 1 と条件 (i) より, $f(ku_t)$ は well-defined である。 $\Gamma(\Lambda)$ は E_Λ

の C^∞ 切断の作る空間であり, また, $\phi \in L^2_{2,\lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ に対して,

ϕ のポアソン積分 $\mathcal{P}_{2,\lambda}\phi$ は, E_Λ の C^∞ 切断とみなせる。ここで

E は §3 におけるものを, τ は上記の $\tau = \tau_\Lambda^*$ を考えている。更に次のことが言える。

定理 1 G/K が a tube domain と正則同型なエルミット対称空間とし, $\lambda = \sum p_E \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*$, $\sum p_E = \Lambda$ かつ次の条件を満たすと

ある:

$$(11) \quad \operatorname{Re} \langle i\lambda, \alpha \rangle < 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma_+(\mathbb{E})$$

$$(12) \quad \Lambda\left(\sum_{\alpha \in \Delta} H_{\alpha}\right) = -(\lambda + \rho_{\mathbb{E}})(x^0)$$

この時 $\mathcal{F}_{\varepsilon, \lambda} L^2_{\varepsilon, \lambda}(G/B(\mathbb{E})) \subset \Gamma(\Lambda)$

が成り立つ。

$\Gamma(\Lambda)$ は G の表現になっ てはいないので, $\Gamma(\Lambda)$ に次のような境界条件をつけた部分空間 $\Gamma_0(\Lambda)$ を考え, G の有界表現を構成する。

定義 $\Gamma_0(\Lambda) := \{ f \in \Gamma(\Lambda) \mid f \text{ は条件 (iii), (iv) を満たす} \}$

ここで (iii) $\forall g \in G, \lim_{t \uparrow 1} f(gu_t) = \text{存在}$, この極限を

$f(gu_1)$ と書いた時, この境界値 $f(gu_1)$ が,

$$(13) \quad \|f(gmanu_1)\| \leq M(m) |e^{\Lambda(\operatorname{Ad}(u_1^{-1})x)}| \|f(gu_1)\|$$

($g \in G, m \in M = \sum_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}), a = \exp X, X \in \mathcal{L}(\mathfrak{a}^+), n \in N,$) を満

す。—— この条件は, $f(gu_1)$ が実際 “境界値” となるための条件。

(iv) $G \ni g \mapsto \|f(gu_1)\|$ が連続関数となる。

このように $\Gamma_0(\Lambda)$ を定義した時, G の $\Gamma_0(\Lambda)$ への作用を,

$$U_{\Lambda}(g)f(x) := f(g^{-1}x),$$

と定義すると, $\Gamma_0(\Lambda)$ は G -不変になっ ている。 $\Gamma_0(\Lambda)$ を $\{f \in \Gamma_0(\Lambda);$

$\|f\|_2 = 0\}$ で割った空間を考え, その完備化を, $\Gamma_2(\Lambda)$ とする。この

時, $U_{\Lambda}(g)$ は, ノルム $\|\cdot\|_2$ に関して, 有界作用素となるように, $\Gamma_2(\Lambda)$

に拡張できることがわかる。

他方、 $L^2_{\tau,\lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ に G は、 $U_{\tau,\lambda}(g)\phi(x) := \phi(g^{-1}x)$ により
有界作用素として、作用しているが、ポアソン積分の定義より、

$$(14) \quad U_{\Lambda}(g) \cdot \mathcal{F}_{\tau,\lambda} = \mathcal{F}_{\tau,\lambda} \circ U_{\tau,\lambda}(g)$$

を成すことがわかるが、更に、次のことが言える。

定理 2 定理 1 の仮定の下に、 $\mathcal{F}_{\tau,\lambda}$ は、 $L^2_{\tau,\lambda}(G/B(\mathbb{R}))$ から、

$\mathcal{B}(\Lambda)$ の G -equivariant な有界作用素となる。

注意 定理 1 の条件 (12) は、要するに " ${}^t\text{Ad}(u_1)\Lambda = -i(\lambda + \rho_E)$ " が
のりで成り立つ、ことであるが、 $\lambda \in \Omega^*$ の時、 G は、 $L^2_{\tau,\lambda}(G/B(\mathbb{R}))$
にユニタリ作用素として作用する。しかし、一方で、 Λ が、 $\mathcal{Q}^E$ の
整形式であることも要請しているので、 $\lambda \in \Omega^*$ の場合は、起り得
ないことがわかる。

さて、 $C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ を G から、 V_Λ^* の C^∞ 写像全体とし、 ν を G の、
 $C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ の左正則表現とし、 $\mathcal{Q}^E$ の $C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ の表現 ν を、

$$\nu(x)f(g) := \left[\frac{d}{dt} f(\exp(-tx)g) \right]_{t=0}$$

$g \in G$, $f \in C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ と定義し、 $\mathcal{U}(g)$ を、 $\mathcal{Q}^E$ の展開環と
した時、 ν より、 $\mathcal{U}(g)$ の $C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ の表現が定義できる。そこで、
 $\nu(C)$ を、 $C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ の ν に關する Casimir 作用素とし、 $C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(\mathbb{R}))$
を、 $C_{\tau,\lambda}(G/B(\mathbb{R})) \cap C^\infty(G, V_\Lambda^*)$ とおく。

そこで、Hardy class を、次のように定義する。

定義 $H_0(\Lambda) := \{ f \in \mathcal{B}(\Lambda) ; (\nu(C) - \langle \Lambda + 2\rho, \Lambda \rangle) f = 0 \}$

更に, $H_2(\Lambda)$ を, その完備化とする。この時できる, G の有界表現 $H_2(\Lambda)$ を, ハイトル-ハントレル E_Λ における Hardy class と定義する。

この $H_2(\Lambda)$ と, ポアソン積分 $\mathcal{F}_{\tau, \lambda}$ との関係は, 次のようになる。
 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^-$ の分解に従って, δ, Λ を,

$$\Lambda = \Lambda_+ + \Lambda_-, \quad \delta = \delta_+ + \delta_- \quad \text{と分解する。} \quad M_0 \text{ を}$$

$M = \mathbb{Z}_K(\mathbb{Q})$ の連結成分とする。 $\mathcal{F}^+$ は, M, M_0 の Cartan 部分環と成っているが, 更に, Λ_+ は, $\mathcal{F}_+^{\mathbb{C}}$ の整形式で,

$$\langle \Lambda_+, \alpha \rangle \geq 0, \quad \forall \alpha \in R, \quad \pi(\alpha) = 0$$

を満たしている。従って, M_0 の既約ユタリ表現 τ_{Λ_+} で最高ウェイトを Λ_+ に持つものが存在する。そこで, $(C_{\tau, \lambda}^\infty(G/B(\mathbb{E})))$ の射影作用素を,

$$e_{\Lambda_+} \phi(g) := d_{\Lambda_+} \int_{M_0} \bar{\theta}_{\Lambda_+}(m) \phi(gm) dm, \quad \phi \in (C_{\tau, \lambda}^\infty(G/B(\mathbb{E})))$$

と定義する。ここで, d_{Λ_+} は, τ_{Λ_+} の表現空間の次元で, θ_{Λ_+} は τ_{Λ_+} の指標で, $\bar{\theta}_{\Lambda_+}(m)$ は, $\theta_{\Lambda_+}(m)$ の複素共役である。この時,

$e_{\Lambda_+} (C_{\tau, \lambda}^\infty(G/B(\mathbb{E})))$ は, $(C_{\tau, \lambda}^\infty(G/B(\mathbb{E})))$ の G 不変部分空間であるが更に次のことがわかる。

定理 3 定理 1 の仮定の下に,

$$\mathcal{F}_{\tau, \lambda} e_{\Lambda_+} (C_{\tau, \lambda}^\infty(G/B(\mathbb{E}))) \subset H_2(\Lambda)$$

が成り立つ。

恐らく, $\mathcal{F}_{\tau, \lambda}$ は, $L_{\tau, \lambda}^2(G/B(\mathbb{E}))$ におけるノルムと, $H_2(\Lambda)$ におけるノルム

を度々ないであらうと思われるので、上記のことから、 $H_2(\Delta)$ が零にならないうことが言えるのではないかと思われる。実際、

$G = \mathrm{SU}(1,1)$ の場合は、次のようになる：

$$G = \mathrm{SU}(1,1) \text{ の時, } K = T = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}) \text{ に関するルート}$$

系 R は, $R = \{\pm \delta\}$.

$$\gamma: \mathfrak{q}^{\mathbb{C}} \ni \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \mapsto -2\alpha$$

により与えられる。 $E_{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{-\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, とおく。更に、

$$X_{\delta}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_{\delta}^0 = -\sqrt{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とある。} \quad \text{この時,}$$

$$\mathcal{O} = \mathbb{R} X_{\delta}^0$$

$$u_t = \exp\left(-\frac{\pi t}{4}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi t}{4} & \sin \frac{\pi t}{4} \\ -\sin \frac{\pi t}{4} & \cos \frac{\pi t}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{q}^{-} = \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q}^{+} = (0)$$

$$\delta: \mathfrak{q} \ni \begin{bmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{bmatrix} \mapsto -i\theta,$$

$$\rho: \mathcal{O} \ni \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} \mapsto t$$

となっている。 $\Delta := -n\delta$, n は整数 とおく。

この時、

$$\text{“疎系列が存在する”} \iff n > 1$$

となっている。

他方、 $\lambda = \sum \rho$, $z \in \mathbb{C}$. とおくと、

$$\text{主系列は, } i\lambda = iz\rho, \quad \mathrm{Re}(iz) = 0$$

によって与えられる。

補系列は, $i\lambda = izp$, $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$

によって与えられる。

ところで, 我々の条件は, " $\operatorname{Re}(i\lambda, \alpha) < 0$, $\alpha = 2p$, かつ, ${}^t\operatorname{Ad}(u_1)\Lambda = -i\lambda + p$ の形" であったが, これは,

$$i\lambda = (n-1)p, \quad n < 1.$$

となることがわかる。これは, Okamoto [11] で最後に具体的に計算してあるところの, (II). 4) の場合である。

特に $n=0$ i.e. $\Lambda=0$ の時, $i\lambda = -p$ かつ, τ_Λ は K の自明な表現となっているから, 我々の Hardy class $H_2(\Lambda)$ は, 序で述べた古典的な $H_2(D)$ となっている。

なおくわしい証明は, Wakama [16] を参照してください。

References

- [1] Harish-Chandra, Representations of semi-simple Lie groups : VI, Amer. J. Math., 78 (1956) 564-628
- [2] _____, Spherical functions on a semi-simple Lie groups : I. II, Amer. J. Math., 80 (1958) 241-310, 553-613
- [3] _____, On the theory of the Eisenstein integral, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 123-149
- [4] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., Vol. 5 (1970)
- [5] A. W. Knap and K. Okamoto, Limits of holomorphic discrete series, Jour. of Functional Analysis Vol. 9 (1972) 375-409
- [6] A. Korányi, The Poisson integrals for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math., 82 (1965) 332-350
- [7] _____, Boundary behavior of Poisson integrals on symmetric spaces, Trans. of Amer. Math. Soc., (1969) 393-409
- [8] _____ and J. A. Wolf, Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. of Math. (2) 81 (1965) 265-288
- [9] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 627-642
- [10] C. C. Moore, Compactifications of symmetric spaces : II, The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964) 358-378
- [11] K. Okamoto, Harmonic analysis on homogeneous vector bundles, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 255-271
- [12] _____ and H. Ozeki, On square-integrable $\bar{\partial}$ -cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. 4 (1967) 95-110

- [13] I. Satake, On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. 71 (1960)
- [14] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I, Springer (1972)
- [15] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd. ed. Cambridge Univ. Press, New York (1959)
- [16] H. Urakawa, On Hardy classes of harmonic sections and vector-valued Poisson integrals, a preprint 1973.