

Schrödinger 方程式の固有解と群の表現

早大 理工 大庭圭司 雅一
Maminda Masaichi

§1 序. 次の様な微分作用素を考へる.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{a}{|x|} \quad \hbar, m, a \in \mathbb{R}, \hbar > 0, m > 0, a \neq 0.$$

$$X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

$$\sqrt{|x|} Y_k = x_k \Delta - D \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{n-1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ma}{\hbar^2} \frac{x_k}{|x|} \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$\Rightarrow \text{v. } x = (x_1, \dots, x_n), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \quad D = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

おと. H は formally Hermitian, Δ, X_{ij}, Y_k

は formally skew Hermitian となる. $\Delta \in H$

は X_{ij}, Y_k と可換であり, 次の commuting relations

$$(1) \begin{cases} [X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk} X_{il} + \delta_{il} X_{jk} + \delta_{ik} X_{lj} + \delta_{jl} X_{ki} \\ [X_{ij}, Y_k] = \delta_{jk} Y_i - \delta_{ik} Y_j \\ [Y_i, Y_j] = \left(\frac{2m}{\hbar} H \right) X_{ij} \end{cases}$$

を満す。従って次の Schrödinger 方程式

$$(2) \quad H u = E u \quad (E \in \mathbb{R})$$

の解空間では $E > 0$, $E = 0$, $E < 0$ に応じて, (1) は Lorentz 群 $SO_0(1, n)$, Euclid 運動群 $M(n)$, 回転群 $SO(n+1)$ の各々の Lie 代数の commutating relations と同値となる。従って, 上の空間に, 各々の Lie 代数の infinitesimally unitary な表現が実現出来る。

さらに, 次の式

$$\sum_{k=1}^n Y_k^2 = \left(\frac{\sum m}{\hbar^2} H\right) \left(|x|^2 \Delta - D^2 - (n-2)D - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{m a}{\hbar^2}\right)^2$$

と

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{ij}^2 = |x|^2 \Delta - D^2 - (n-2)D$$

が成立するから

$$\Omega = \sum_{k=1}^n Y_k^2 - \left(\frac{\sum m}{\hbar^2} H\right) \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{ij}^2$$

とあると,

Ω は各々の Lie 代数の Casimir operator の定数倍に等しい。従って, (2) の解空間では scalar

$$\Omega = -\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sum m E}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{m a}{\hbar^2}\right)^2$$

となる。故に, 上の表現は, 各々の群の, ある既約 $\mathbb{C}$ - $\mathcal{U}$ 表現の微分表現と関係が付くことが予想出来る。

この論説は, 方程式 (2) との関係で, 上の様な表現を構

成ることを目的とする。

$M=3$ の場合, (2) は良く知られた, Coulomb potential を持つ静電場に居る電子の運動方程式で, 考えている表現は, 隠された対称性を記述している。([1])
この時, Y_1 は角運動量, Y_2 は Runge-Lenz-Pauli のベクトル, E がエネルギーとなる。さらに, この古典力学的対応物は Kepler 運動で, E の符号は, その orbit が, 双曲線, 放物線, 楕円にそれぞれ対応している。

§2. 方程式 (2) の変換と表現の構成

$x=(x_1 \cdots x_n)$, $y=(y_1 \cdots y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積 (x, y) と
 $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. 又, Euclidean measure $dx = dx_1 \cdots dx_n$ と書く。 $\mathcal{F}$ は Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と

$\mathcal{F}u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i y \cdot x} u(x) dx$
 で定義する。(2) を運動量表示で考える為,

$$\varphi(p) = \mathcal{F}u(k^{-1}p).$$

とおくと, $C_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$ として, (2) は

$$(3) \quad \left(\frac{|p|^2}{2m} - E \right) \varphi(p) + \frac{a}{2\pi^2 C_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(p')}{|p-p'|^{n-1}} dp'$$

となる。表現を構成する為, E の符号に応じて, 次の

る通りの場合に分ける。

(I) $E > 0$ の場合。

$p_0 = \sqrt{2mE}$ $p = {}^t(p_0, \mathbb{P})$, $\langle p, p \rangle = p_0^2 - |\mathbb{P}|^2$ とする。この時, (3) は。

$$(4) \quad \langle p, p \rangle \varphi(\mathbb{P}) = \frac{m a}{\pi \hbar c_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\mathbb{P}')}{|\mathbb{P} - \mathbb{P}'|^{n-1}} d\mathbb{P}'$$

と書ける。

$G = SO_0(1, n)$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}_m \mid R \in SO(n) \right\}$, 又。

$\mathcal{B} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$ 又 G の $\mathcal{B}$ 上の作用 ε 。

$$g x = \frac{g_{11} x + g_{10}}{g_{01} x + g_{00}} \quad g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix}_m \in G \quad x \in \mathcal{B}$$

により定義する。あると $G/K \propto \mathcal{B}$ 。この時, $\mathcal{B}$ の G -invariant measure $d\mu$ は 適当な normalization として

$$d\mu(x) = \frac{2^{n-1}}{c_n} \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \frac{dx}{(1-|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

となる。次に $\Psi: \{ \mathbb{P} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbb{P}| \neq p_0 \} \rightarrow \mathcal{B}$ 2 対 1 の

differentiable mapping ε , $\Psi(\mathbb{P}) = 2p_0 \mathbb{P} / (p_0^2 + |\mathbb{P}|^2)$

により与える。 (4) を Ψ によって $\mathcal{B}$ 上の方程式に変換する為にさらに次の記号を導入する。

$$\xi(\mathbb{P}) = \xi(\varepsilon, x) = \frac{1}{\langle p, p \rangle} {}^t(p_0^2 + |\mathbb{P}|^2 \quad 2p_0 \mathbb{P})$$

$$= {}^t(x \quad \varepsilon) \quad x = 2p_0 \mathbb{P} / (p_0^2 + |\mathbb{P}|^2), \quad \varepsilon = \langle p, p \rangle / |\langle p, p \rangle|$$

又, $\xi = (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に對して,

$$E(\xi) = \xi_0 / |\xi_0| \quad (\xi_0 \neq 0), \quad \langle \xi, \xi \rangle = \xi_0^2 - |\xi|^2.$$

とある. $\eta = \tau$,

$$\Phi(\xi(P)) = \frac{\langle P, P \rangle}{|\langle P, P \rangle|^{\frac{n+1}{2}}} \psi(P) \quad P \in \mathbb{R}^n, |P| \neq p_0$$

$j = \pm 1$ に對して,

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{2} (\Phi(\xi(1, x)) + j \Phi(-\xi(1, x))) \quad x \in \mathbb{B}.$$

とある,

$$k(\xi, \xi') = E(\xi') |\langle \xi - \xi', \xi - \xi' \rangle|^{-\frac{n-1}{2}} \quad (\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n+1})$$

$j = \pm 1$ に對して,

$$k_j(x, y) = k(\xi(1, x), \xi(1, y)) - j k(\xi(1, x), -\xi(1, y))$$

とある. ($x, y \in \mathbb{B}$).

この時, 計算の結果, (4) の Φ によつて次の方程式

$$(5) \quad \Phi_j(x) = \lambda_n \int_{\mathbb{B}} k_j(x, y) \Phi_j(y) d\mu(y)$$

$$j = \pm 1, \quad \lambda_n = \text{const}(\frac{n}{2}) / (2^n p_0 \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}))$$

と変換される. と分かる.

$\mathbb{B}$ 上の function f (resp. distribution T) は

right K -invariant な G' 上の function $\tilde{f}$ (

resp. distribution $\tilde{T}$) と 1対1 に対応が付く.

([4]) $\eta = \tau$ G' 上の K -biinvariant な function

$\tilde{f}_j$ を次の式で定義する.

$$F_j(g) = (2(g_{00}-1))^{-\frac{n-1}{2}} - j (2(g_{00}+1))^{-\frac{n-1}{2}} \quad j = \pm 1$$

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix}_m \in G.$$

あると、(5) は G 上の合成積方程式.

$$(6) \quad \widehat{\Phi}_j = \lambda_n \widehat{\Phi}_j * \widehat{F}_j$$

となる。又は、 π を $G/K = B$ 上の合成積方程式とも考えることが出来る。([4])。

あると、あつての積分が distribution として意味を持つとの仮定のもとで、 $B = G/K$ での Fourier 変換の理論 ([3], ~ [4]) を用いると。

$$F_1 * F_{-1} = F_{-1} * F_1 = T \quad (B \text{ 上の関数に収束する}).$$

であり、 ω を適当に normalize した G の Lie 代数の Casimir operator. $a_n = 2^{n-1} \sqrt{n-1} \Gamma(\frac{n}{2}) / \Gamma(\frac{n+1}{2})$, δ を B の原点に support を持つ Dirac measure とする。この時、 $\rho = (n-1)/2$ として、

$$(7) \quad \begin{cases} (\omega + \rho^2) T = -a_n^2 \delta \\ \Phi_j = \lambda_n^2 \Phi_j * T \quad j = \pm 1. \end{cases}$$

従って、

$$(8) \quad \omega \Phi_j = (\lambda^2 - \rho^2) \Phi_j \quad j = \pm 1 \quad \lambda = \pm \sqrt{1 - \frac{m a}{2 \rho_0 \hbar}}.$$

となる。 ω が B 上の elliptic differential operator となるから、 Φ_j が distribution として意味を持つから (8) より、 real analytic function となる。
 $\gamma = 2$ $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$E_\lambda(B) = \{ f \in C^\infty(B) \mid \omega f = (\lambda^2 - \rho^2) f \}$$

又、 τ_λ で $E_\lambda(B)$ 上の G の left regular representation を表わす。すると、 Poisson 変換の理論 ([31], [41]) により、 $\lambda \in \mathbb{FIR} \setminus \{0\}$ なら τ_λ は G のある既約 $\mathbb{C}$ -表現 (class 1 の principal series) と同値となる。

形式的な計算を忠実に実行することにより、 $Hu = \square u$ の解空間に実現した G の Lie 代数の表現は、以上の変換によって、 $(\tau_\lambda, E_\lambda(B))$ の微分表現と同値になることも確かめることが出来る。

(II) $E = 0$ の場合

このとき、方程式は

$$|\mathbb{P}|^2 \Phi(\mathbb{P}) = -\frac{ma}{\pi \hbar c_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\mathbb{P}')}{|\mathbb{P} - \mathbb{P}'|^{n-1}} d\mathbb{P}' \quad \text{となる}$$

$\gamma = 2$ 、次の変換

$$\Phi(\mathbb{P}) = |\mathbb{P}|^{-n-1} \varphi(\mathbb{P}/|\mathbb{P}|^2)$$

を行くと、この方程式は次の様になる。

$$(9) \quad \Phi = \lambda_n \Phi * T_1 = \lambda_n T_1 * \Phi. \quad \lambda_n = -\frac{m a}{\sqrt{\pi} \hbar c n^{-1}}.$$

==> T_1 は次の様に定義される $\mathbb{R}^n$ の tempered distributions T_α の $\alpha=1$ の場合.

$\alpha \in \mathbb{C}$ とする

$\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ の時.

$$\langle T_\alpha, f \rangle = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n} f(x) dx.$$

==> f の $\alpha=0$ での Taylor 展開を用いて α に
関して解析接続する。すると $\alpha \rightarrow \langle T_\alpha, f \rangle$
は与えられた f に対して holomorphic となるから、
任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対してこの値を $\langle T_\alpha, f \rangle$ とする
distribution を T_α と書く。 T_α に関して次のことが
知られている。 [21]

(i) δ は $\alpha=0$ に support を持つ Dirac measure.

$$T_{-2k} = \frac{(-1)^k c_n}{2^{2k-1}} \Delta^k \delta.$$

(ii) $0 < \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta), \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < n$ のとき.

$$T_\alpha * T_\beta = (\pi^{n/2} \Gamma(\frac{n-\alpha-\beta}{2}) / \Gamma(\frac{n-\alpha}{2}) \Gamma(\frac{n-\beta}{2})) T_{\alpha+\beta}.$$

(iii) $\Delta T_\alpha = 2(\alpha-n) T_{\alpha-2}.$

従って (9) より $T = T_1 * T_1 = (\pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n-1}{2})^2) \Gamma(\frac{n-2}{2}) T_2$

とすると

$$\Phi = \lambda_m^2 \Phi * T, \quad \Delta T = -16\pi c_{n-1} \delta.$$

故に, $\Delta \Phi = -\lambda^2 \Phi$ ($\lambda = \pm \frac{4m}{\sqrt{n} \kappa}$) となる。

$$G = M(n) = SO(n) \times_s \mathbb{R}^n, \quad K = SO(n) \text{ とすると,}$$

$\mathbb{R}^n \approx G/K$. この時も G の既約 $\mathbb{C}$ -リ表現が構成出来て, この微分表現は $Hu=0$ の解空間に実現した Lie 代数の表現と "形式的" に同値となる. (infinitesimally equivalent)

(III) $E < 0$ の場合.

$$p_0 = \sqrt{2m|E|} \quad p = {}^*(p_0, \mathbb{P}) \quad p^2 = p_0^2 + |\mathbb{P}|^2 \text{ と}$$

ある。又 $G = SO(m+1)$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k \in SO(m) \right\}$.

G の $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|=1\}$ 上の作用は $\mathbb{R}^n$ での canonical な作用 $x \rightarrow gx$ の S^n への制限とある。あると $S^n \approx G/K$ とある。

又, imbedding $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ と

$$\Psi(\mathbb{P}) = \frac{1}{|\mathbb{P}|^2} \begin{pmatrix} p_0^2 - |\mathbb{P}|^2 \\ 2p_0 \mathbb{P} \end{pmatrix} \quad \mathbb{P} \in \mathbb{R}^n.$$

で定義すれば, S^n 上の normalized G -invariant measure $d\mu$ は $x = \Psi(\mathbb{P})$ とあると

$$d\mu(x) = \frac{(2p_0)^n}{c_{n+1}} \frac{d\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|^{2n}}$$

となる。又、 $\Phi(x) = |x|^{n+1} \varphi(x)$ $\lambda_n = ma / (p_0 \pi)^{n+1}$.
とすれば、(2) は次の様に変換される

$$(10) \quad \Phi(x) = -\lambda_n \int_{S^n} \frac{\Phi(x')}{|x-x'|^{n+1}} d\mu(x')$$

(I) と同様に、 S^n 上の function (or distribution)
と G 上の right K -invariant な function (or
distribution) と同一視しておく。

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} \in G \quad \text{とし。}$$

$$\tilde{F}(g) = (2(1-g_{00}))^{-\frac{n-1}{2}}$$

とすると、 $\tilde{F}$ は G 上 K -biinvariant な局所
可積分 (従って可積分) 関数となる

すると (10) は G 上の合成積方程式

$$(11) \quad \tilde{\Phi} = -\lambda_n \tilde{\Phi} * \tilde{F}$$

となる。よって、 $\tilde{T} = \tilde{F} * \tilde{F}$ とすれば (11) は

$$(12) \quad \tilde{\Phi} = \lambda_n^2 \tilde{\Phi} * \tilde{T}$$

となる。 $T \in \tilde{T}$ とする S^n 上の distribution

$\delta \in S^n$ の原点に support を持つ Dirac measure

又、 $\omega \in S^n$ を適当に normalize し Casimir

operator, $\lambda = \rho \lambda_m = \pm (ma)/2\rho + \rho = (n-1)/2$

とすると. ω は S^n 上の Laplace-Beltrami operator で

$$(13) \quad \begin{cases} (\omega + \rho^2) T = \rho^2 \delta \\ \omega \Phi = (\lambda^2 - \rho^2) \Phi \end{cases} \quad \text{となる。}$$

(13) の前半は複雑ではあるが計算により, 後半は (12) より分る. ω は elliptic 故, (I) と同様に (12) の解は real analytic となる. $\gamma = \tau$ $\lambda \in \mathbb{C}$ とし

$$E_\lambda(S^n) = \{ f \in C^\infty(S^n) \mid \omega f = (\lambda^2 - \rho^2) f \}$$

とすると (11) の解は $E_\lambda(S^n)$ の元となる。

この場合も σ_λ で $E_\lambda(S^n)$ 上の G の left regular representation を表わす. ところが, この場合は (I) と異なり, すべての λ に対して自明でない解が存在するとは限らない. この様な λ を求める為に G 上の Fourier 変換を利用する ([5]) の為, 若干の準備をする。

$$\hat{G} = \left\{ \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{Z}^p \mid \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \dots \geq |\lambda_p| \quad p = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, m \in \mathbb{N}_+ \\ \text{or } \lambda_p \geq 0 \end{array} \right\}$$

とすると, $\hat{G}$ は dominant integral forms となる。

Cartan subalgebra に対応する。) の集合と同一視出来る。又これは highest weight を与えることにより G の既約な $\mathbb{C}$ -表現の同値類とも同一視出来る。よって, $\lambda \in \hat{G}$ に対し, $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を λ に対応する G の既約 $\mathbb{C}$ -表現, $(1)_\lambda \in V_\lambda$ の基底とすると $G(0) = \{ \lambda(e) = (l, 0, \dots, 0) \mid l \in \mathbb{N} \}$ とする。又 $\lambda = \lambda(e)$ の時 $\tau_\lambda = \tau_e$, $V_\lambda = V_e$, $(1)_\lambda = (1)_e$ 等と書く。 $V_\lambda^K = \{ v \in V_\lambda \mid \tau_\lambda(k)v = v \ \forall k \in K \}$ とすると $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda^K \leq 1$ で $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda^K = 1$ となるのは $\lambda \in G(0)$ となることから必要十分。又 $\lambda = \lambda(e)$ のとき $v_e \in V_e^K$ norm が 1 の vector とし $\varphi_e(g) = (\tau_e(g)v_e \mid v_e)_e$ とする。

T を G 上の distribution, $\lambda \in \hat{G}$ に対し

$\hat{T}(\lambda) = \int_G \tau_\lambda(g) dT(g)$ は well-defined で V_λ の linear endomorphism を与える。この時, $\{ \hat{T}(\lambda) \}_{\lambda \in \hat{G}}$ を T の Fourier 変換 (又は係数) と呼ぶ。次の結果はよく知られている。

(i) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \sum_{\lambda \in \hat{G}} (\dim V_\lambda) \int_G \tau_\lambda(g) \hat{T}(\lambda) \varphi(g) dg \\ &= \int_G \varphi(g) dg \end{aligned}$$

ここで dg は G の normalized Haar measure であり, L, R はそれぞれ left, right regular representation

を表現。

$$(ii) (L(g)T)^\wedge(\Lambda) = \tau_\Lambda(g) \hat{T}(\Lambda) \quad (R(g)T)^\wedge(\Lambda) = \hat{T}(\Lambda) \tau_\Lambda(g)$$

$$(iii) (T_1 * T_2)^\wedge(\Lambda) = \hat{T}_1(\Lambda) \hat{T}_2(\Lambda).$$

次に $P(\Lambda) : V_\Lambda \rightarrow V_\Lambda^K$ orthogonal projection とす

$$\text{す. すると } P(\Lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda(l) \in \hat{G}(0) \quad P(l) = P(\Lambda(l))$$

と書く. ($P(\Lambda) = \int_K \tau_\Lambda(k) dk$ dk K の normalized

Haar measure と書く.) T が left or right K -

invariant なら, (ii) より, $\hat{T}(\Lambda) = 0$ if $\Lambda \notin \hat{G}(0)$.

この時 $\hat{T}(\Lambda(l)) = \hat{T}(l)$ と書く. 又, $\hat{T}$ は F が

K -biinvariant なら, $\hat{T}(l) = a(\hat{T}, l) P(l)$, 二二で

$$a(\hat{T}, l) = \langle \hat{T}, \varphi_l \rangle, \text{ となる.}$$

以上より方程式 (11) は次の様に表わされる

$$(14) \quad \hat{\Phi}^\wedge(l) = -\lambda_n a(\hat{T}, l) \hat{\Phi}^\wedge(l) \quad l \in N.$$

φ_l は hypergeometric function で表わす. (5.1)

$\hat{T}$ が具体的に与えられているから, $a(\hat{T}, l)$ の値は簡単に計算出来, 次の様になる.

$$a(\hat{T}, l) = (n-1) / (2l+n-1).$$

故に, (14) より

$$(1 + \frac{m\alpha}{\rho_0 n} \frac{1}{2l+n-1}) \hat{\Phi}^\wedge(l) = 0 \quad l \in N.$$

従って $\rho = (m-1)/2$ と書くと.

$$\Phi^{\lambda}(l) \neq 0 \iff a < 0 \text{ と } \frac{m|a|}{2\rho_0\hbar} - \rho = l \in \mathcal{N}$$

故に、(11) が自明でない解を持つ為には

$$1^{\circ}) \quad a < 0$$

$$2^{\circ}) \quad \exists l \in \mathcal{N} \quad l = \frac{m|a|}{2\rho_0\hbar} \rho, \text{ i.e. } |E| = \frac{m|a|^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(l+\rho)^2}$$

とす。1^o), 2^o) が満たされている時、 $\lambda = \pm(l+\rho)$

$$\mathcal{C}_{l+\rho}(\mathcal{S}^n) \cong \{ \alpha(A T_{\rho}(p) E(l)) \mid A: V \rightarrow V \text{ linear \& endomorphism} \}$$

$$\dim \mathcal{C}_{l+\rho}(\mathcal{S}^n) \neq +\infty, \quad \mathcal{T}_{l+\rho} \subseteq \mathcal{T}_e. \quad \text{と存在}$$

が必要となる。

1^o) は H の potential が引力であることと表わしており、又 2^o) は エネルギーが量子化されていることを示している。又この場合も、Lie 代数の表現は $\mathcal{T}_e$ の微分表現と等値となる。

さらに、 $E < 0$ の場合は tempered distributions の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で考えれば以上の議論はすべて正当化出来る。($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $\mathcal{S}^n$ 上の distribution は互に双対な付与 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は Fourier 変換が安定、又考えられている関数もすべて高々多項式 order の増下度しか持たない。) 故に次の定理が成立する。

記号の通りとする。

定理: $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \quad m > 0 \quad a \neq 0$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{a}{|x|} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で次の方程式を解く。

$$Hu = Eu \quad E \in \mathbb{R}$$

この解のうち $\mathbb{R}^n$ の tempered distribution に拡張出来るものの全体を $\mathcal{O}(H, E)$ と書く。

$E < 0$ である時、 $\mathcal{O}(H, E) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は

$$1^\circ) \quad a < 0$$

$$2^\circ) \quad \exists l \in \mathbb{N} \quad |E| = \frac{ma^2}{(2\hbar)^2} \frac{1}{(l+p)^2} \quad p = \frac{n-1}{2}.$$

である。さらにこのとき、 $\mathcal{O}(H, E)$ は有限次元であり、 $G = SO(n+1)$ の highest weight

$\lambda(e) = (l, 0, \dots, 0)$ を持つ既約有限次元表現 π_λ の表現空間と存在。又 §1 で与えた微分作用素はこの表現の微分表現として実現されたものとは一致する。

References

- [11] V. Fock ; Zur Theorie des Wasserstoffatoms.
Zeitschrift für Physik Bd 98 145-154
- [12] I. M. Gel'fand, G. F. Shilov ; Generalized Functions
vol 1. Academic Press.
- [13] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto,
T. Oshima. and M. Tanaka ; Eigenfunctions of
invariant differential operators on a symmetric
space. Ann. of Math. 107 p.1-39.
- [14] S. Helgason ; A duality for symmetric spaces
with applications to group representations I.
Advances in Math. 5. 1-154.
- [15] N. J. Vilenkin ; Special Functions and the
theory of group representations, Translations of
Mathematical monograph vol 22. A.M.S.