

Limits of Instantons

京大・理 丸山正樹

1. Instanton bundles. S^4 上の instanton と $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上の階数2のベクトル束の関係について、よく知られてはいるが、以下で必要なことをまとめておく。以下簡単のため $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ を X で表す。実数体 $\mathbb{R}$ 上の四元数体 $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ を考える。 $\mathbb{H}$ の中の $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ を $\mathbb{C}$ と同一視することにより、 $\mathbb{C}$ が $\mathbb{H}$ に左から作用するから、 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として、 $\mathbb{C}^2$ と同型である。従って、 $\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{C}^4$ と同型になる。 $\mathbb{H}^2$ への j の左からの作用は $\mathbb{C}^4$ 上の antilinear map を導く。 X を $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ と同一視すれば、この map は X から X への同相写像 $|\sigma|$ を定める。 $\mathcal{O}_X$ の local section a に対して、 $\sigma^*(a) = \overline{a \cdot |\sigma|}$ と定義すれば、 $\sigma^*(a)$ も $\mathcal{O}_X$ の local section になり、 σ^* は $\mathcal{O}_X$ 上の antilinear 写像になる。 $|\sigma|$ と σ^* の組 $\sigma = (|\sigma|, \sigma^*)$ は X 上の real form を定める。すなわち、 $\mathbb{R}$ -scheme $X_{\mathbb{R}}$ が存在し、 X は $X_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同型、 σ は $\text{id} \otimes \gamma$ と同一視できる、ここで γ は $\mathbb{C}$ の共役写像である。このようにして、 X には実構造が入るが、これは $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ から定まる実構造とは全く違うものである。例えば、 X の real points の集合 $X_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は空集合であることに注意して

欲しい。 X の中の直線 ($\cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) は σ の作用で同じ直線に移る時、実直線であると言われる。次のことは明らかであろう。

(1.1) 直線 l が実直線 $\iff l \ni x$ について, l は x と $\sigma(x)$ を結ぶ直線である。

一方, 自然な実解析的写像

$$\pi: X = \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{H}^* \cong S^4$$

がある。(1.1) から

(1.2) 直線 l が実直線 $\iff \exists y \in S^4, l = \pi^{-1}(y)$

がわかる。

$\sigma^2 = \text{id}_X$ であるから, $\mathcal{O}_X$ -加群 F について, 自然な同型 $F \cong \sigma^* \sigma^*(F)$ がある。以下は基本的な概念である。

定義 1.3. F は X 上の連接層であるとする。

(1) F が quaternionic であるとは, 同型 $\lambda: F \longrightarrow \sigma^*(F)$ で, $\sigma^*(\lambda) \cdot \lambda = -\text{id}_F$ となるものがあるときに言う。

(2) F が real であるとは, 同型 $\lambda: F \longrightarrow \sigma^*(F)$ で, $\sigma^*(\lambda) \cdot \lambda = \text{id}_F$ となるものがあるときに言う。

F が real であることと, $X_{\mathbb{R}}$ 上の連接層 $F_{\mathbb{R}}$ が存在して, F

が $F_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同型になることは同値である。例えば,

$$\Omega_X(n) \begin{cases} \text{quaternionic} & \text{if } n \text{ odd} \\ \text{real} & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

Ω_X は real.

命題 1.4. F が単純連接層 (すなわち, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, F) \cong \mathbb{C}$) で, quaternionic ならば, 決して real にはならない.

さて, S^4 上の $SU(2)$ -bundle E 上の connection ∇ を考える。 ∇ の curvature form $\Theta(\nabla)$ について, $*\Theta(\nabla) = \Theta(\nabla)$ となるとき, ∇ は self-dual connection, 又は instanton であるという。 E の Pontryagin 数と ∇ の instanton 数と定義する。 $\pi^*(E)$ 上の connection $\pi^*(\nabla)$ が $\pi^*(E)$ 上の複素構造を定めることと, ∇ が instanton になっていることは同値である。従って, instanton ∇ は X 上の正則ベクトル束を導く。GAGA-principle により, このベクトル束は代数的になる。次は M.F. Atiyah と R.S. Ward による基本定理である。

定理 1.5. Pontryagin 数 n の instanton の同型類の集合は, 次の 3つの性質を持つ X 上の階数 2 の代数的ベクトル束 (局所自由層) F の同型類の集合と, 上の対応で全単射になっている:

$$(1) \quad c_2(F) = n,$$

(2) F は quaternionic,

(3) すべての実直線 l について, $F|_l \cong \mathcal{O}_l^{\oplus 2}$.

n, r は正整数で, $2n \geq r$ となるものとする. $\overline{M}(n, r)$ で X 上の階数 r の半安定層 E で, Chern 類 $c_1(E)=0, c_2(E)=n, c_3(E)=0$ を持つものの moduli 空間であるとする. $\overline{M}(n, r)$ は射影的 scheme である. X の実構造はこれらの moduli 空間に実構造を導く, すなわち, 実射影的 scheme $\overline{M}(n, r)_{\mathbb{R}}$ が存在して, $\overline{M}(n, r) \cong \overline{M}(n, r)_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. real な半安定層はもろく $\overline{M}(n, r)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元を定めるが, quaternionic 半安定層も $\overline{M}(n, r)_{\mathbb{R}}$ の実点に対応している. 一方, instanton 数 n を持つ instanton の全体は $8n-3$ 次元の連結, 実解析多様体となる. これを instanton の moduli と言い, $I(n)$ で表す. 上の定理により, $I(n)$ は $\overline{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間になるが, 性質(3)により, $I(n)$ は "classical" topology での $\overline{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の開集合になっている. $\overline{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は compact であるから, $I(n)$ の $\overline{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での閉包は $I(n)$ の compact 化になる.

記号 1.6. $I(n)$ の $\overline{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での閉包を $\overline{I}(n)$ で表す.

instanton から定まる X 上のべクトル束を, 以下 instanton bundle と呼ぶことにする.

2. Universal extension と Donaldson の compactification.

$\overline{M}(n, 2)$ の元 E で $H^2(X, E) = 0$ となるものの全体は開集合 $\mathcal{U}$ をなす。 $E \in \mathcal{U}$ ならば, $\dim H^1(X, E) = 2n - 2$ となる。自然な同型

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(H^1(X, E) \otimes \mathcal{O}_X, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X, E), H^1(X, E))$$

で右辺の id に対応する左辺の元を $\mathcal{U}(E)$ で表す。 $\mathcal{U}$ は層の拡大

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{U}(E) \longrightarrow H^1(X, E) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

を定める。

定義 2.1. $\mathcal{U}(E)$ を E の universal extension と呼ぶ。

$\mathcal{U}(E)$ の性質をまとめておく。

命題 2.2. E は上の $\mathcal{U}$ の元であるとする。

$$(1) \quad r(\mathcal{U}(E)) = 2n, \quad c_1(\mathcal{U}(E)) = 0, \quad c_2(\mathcal{U}(E)) = n, \quad c_3(\mathcal{U}(E)) = 0,$$

$$(2) \quad H^i(X, \mathcal{U}(E)) = 0, \quad \forall i.$$

(3) E が μ -stable ベクトル束ならば, $\mathcal{U}(E)$ は安定である (もちろん, μ -stable ではない)。

$E \in \mathcal{U}$ について, $\mathcal{U}(E)$ は必ずしも半安定ではない。 E が μ -stable でも, ベクトル束でなければ, $\mathcal{U}(E)$ は半安定にさえ

ならないことがある。そこで、 $V \subset U$ を $E \in U$ で $U(E)$ が半安定になるものの全体とする。 V は $\overline{M}(n, 2)$ の中で Zariski 開集合である。 V の元 E について、 $U(E)$ の S -同値類を対応させることにより、 V から $\overline{M}(n, 2n)$ への写像 $\varphi(n)$ を得る。

定理 2.3. $\varphi(n)$ は V から $\overline{M}(n, 2n)$ の morphism となる。 $V_0^M(n)$ で V の元で μ -stable ベクトル束となるものがなす Zariski 開集合とすると、 $\varphi(n)$ は $V_0^M(n)$ から $\overline{M}(n, 2n)$ への埋め込み (immersion) を導く。 $\varphi(n)$ は X の実構造と可換、すなわち、 $\mathbb{R}$ -morphism $\varphi(n)_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}$ が存在して、 $\varphi(n) = \varphi(n)_{\mathbb{R}} \circ \mathcal{I}$ となる。

$I(n)$ が $(V_0^M(n))_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間であることはよく知られている。従って、 $\varphi(n)_{\mathbb{R}}$ は $I(n)$ の $\overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ への埋め込みを導く。

記号 2.4. $I(n)$ と $\overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間とみなしきの関係を $\overline{I}(n)$ で表す。

$\varphi(n)$ の構造を調べるために、 μ -stable ベクトル束の "modification" を考えよう。 $\overline{M}(n-a, 2)$ の元 E で、 μ -stable ベクトル束になっているものを取り。 $l_1, \dots, l_u$ は互に交らない X の直線でありとする。さらに、 $E|_{l_i} \cong \mathcal{O}_{l_i}^{\oplus 2}$ と仮定しておく。 $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の

global section s_1, s_2 で, $\{s_1=0\} \cap \{s_2=0\} = \emptyset$ となるものを取り
 と, $E|_{\ell_i} \cong \mathcal{O}_{\ell_i}^{\oplus 2}$ の basis s_1, s_2 に対応させることにより, 全
 射 $E|_{\ell_i} \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ を得る. 制限射 $E \rightarrow E|_{\ell_i}$ との合成をとる
 ことにより, 全射 $\gamma_i: E \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ がきまる. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_a)$
 として, 全射

$$\gamma: E \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\ell_i}(1)$$

が定まる. $E(l_1, \dots, l_a; \gamma_1, \dots, \gamma_a) = \ker(\gamma)$ とおく.

命題 2.5. $F = E(l_1, \dots, l_a; \gamma_1, \dots, \gamma_a)$ とおく.

(1) F は μ -stable であり, $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = n$, $c_3(F) = 0$ とな
 る. 従って, F は $M(n, 2)$ の元になる.

(2) $U(F)$ の連接部分層による filtration $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$
 $\subset F_a \subset F_{a+1} = U(F)$ で, $F_i/F_{i-1} \cong Q(\ell_i)$ ($1 \leq i \leq a$), $F_a/F_a \cong$
 $U(E)$ となるものが存在する. ここで, $Q(\ell_i)$ は自然な全射
 $H(X, \mathcal{O}_{\ell_i}(1)) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ の kernel である.

$Q(\ell_i)$ は $c_1(Q(\ell_i)) = 0$, $c_2(Q(\ell_i)) = 1$, $c_3(Q(\ell_i)) = 0$ となる階数
 2 の安定層であることがわかるから, 上記 (2) の filtration が
 $U(F)$ の S -equivalence 類を与えるものであることが知られる.
 すなわち, $\eta(U(F)) = \left(\bigoplus_{i=1}^a Q(\ell_i) \right) \oplus U(E)$ となる. ここで,
 各 ℓ_i は $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の Zariski 開集合で parametrized されていて, この
 parametrization で $(\gamma_1, \dots, \gamma_a)$ が $(\gamma'_1, \dots, \gamma'_a)$ と違っているのは,

$E(l_1, \dots, l_a; \gamma_1, \dots, \gamma_a)$ は $E(l_1, \dots, l_a; \gamma'_1, \dots, \gamma'_a)$ と同型であることは明らかである。ところが、それぞれの universal extension の S -equivalence 類は同じ $(\bigoplus_{i=1}^a Q(l_i)) \oplus \mathcal{U}(E)$ で代表される。結局 $\varphi(n)$ は $\overbrace{\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^3(\mathbb{C})}^a$ のある Zariski 開集合を一点に写している。

命題 2.5 では $l_1, \dots, l_a$ は互いに交わっていないと仮定したが、 $(\bigoplus_{i=1}^a Q(l_i)) \oplus \mathcal{U}(E)$ の S -equivalence class は l_i, l_j が交わっても、あきいば一致しても $\overline{M}(n, 2n)$ の点を与えている。定理 2.4 を考慮すると、これは $V_0^M(n-a) \times \Sigma^a \text{Gr}(3, 1)$ が $\overline{M}(n, 2n)$ に入っていて、そのある開集合が $\varphi(n)$ の像に含まれていることを示している、ここで $\Sigma^a \text{Gr}(3, 1)$ は X の直線のなす Grassmann の a 個の対称積である。

実構造のことを考慮して、上の考察をふりかえってみよう。 $l_1, \dots, l_a$ は X の実直線で互いに異なるものとする。このとき、 i と j が異なれば、 $l_i \cap l_j = \emptyset$ である。 $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ は quaternionic 層であるから、 σ の l_i への作用は $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の作用に拡張されている。 $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の零でない global section s_i を取り、 $t_{i1} = s_i + \sigma^* s_i$, $t_{i2} = s_i - \sigma^* s_i$ とおく。 $\sigma^* t_{i1} = -t_{i2}$, $\sigma^* t_{i2} = t_{i1}$ である。 c_2 が $n-a$ である instanton bundle E を取って、 $E|_{l_i} \cong \mathcal{O}_{l_i}^{\oplus 2}$ の quaternionic 層としての symplectic 基 e_{i1}, e_{i2} を選んで、 $\gamma_i(e_{i1}) = t_{i1}$, $\gamma_i(e_{i2}) = t_{i2}$ で、 $\gamma_i : E \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1)$ を定める。 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_a)$

とおけば, γ は real 射で $E(l_1, \dots, l_a; \gamma_1, \dots, \gamma_a)$ は quaternionic 層となる. この場合, $Q(l_i)$ も quaternionic になり, $(\bigoplus_{i=1}^a Q(l_i)) \oplus U(E)$ が, $\varphi(n)(E(l_1, \dots, l_a; \gamma_1, \dots, \gamma_a))$ を代表している. $I(n-a) \times \Sigma^a S^4$ が $\overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ に含まれていることは上と同様であるが, 次の定理が証明される. 証明は非常に複雑で, 長い.

定理 2.6. $\overline{I}(n) = \coprod_{a=0}^n I(n-a) \times \Sigma^a S^4$. ここで, $I(0)$ は一点である. $\overline{I}(n)$ は $\overline{M}(n, 2n)$ の中で semi-algebraic.

Donaldson は上の定理の右辺に適当な位相を導入して (instanton の極限を取ると, いくつかの pole を持つ "connection" を得るが, それらの pole は除去可能である. pole を除去すると, pole の数だけ instanton 数 が下り, $I(n-a)$ の元を得る. $\Sigma^a S^4$ は pole の位置を parametrize (している), それが $I(n)$ の compact 化になっていることを示した. 上の定理は Donaldson の compact 化が "代数幾何学的" に構成でき, 従って semi-algebraic な構造を持つことを示している.

3. Limits of instantons.

$I(n)$ の $\overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での関与は定理 2.6 で完全に決まり, それが Donaldson の compact 化であることまでわかった. しかし,

$\bar{M}(n, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の中での開包 $\bar{I}(n)$ は、はるかに難しい。例えば E を $I(n-1)$ から取ってきて、実直線 l , real 射 γ により $E(l; \gamma)$ を作る。定理 2.6 は $U(E(l; \gamma))$ の S -equivalence 類は $I(n)$ の点列の極限になっていることを示している。証明をみると、実は $Q(l) \oplus U(E)$ が $I(n) \subset \bar{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の中の 1-parameter family の極限になっていることが証明されていて、 $U(E(l; \gamma))$ がどうなっているかはわかっていなかった。

以下で、比較的簡単な構造を持つ、 n 階数 2 の安定 quaternionic 層は $\bar{I}(n)$ に含まれているという、我々の結果について解説する。本質的な部分で、大変な計算にたよっており、その大部分は共同研究者である G. Trautmann による。

$l_1, \dots, l_a$ は相異なる実直線とする。 $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ は quaternionic 束から $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_{l_i}(1), \mathcal{O}_{l_i}(1))$ は自然な実構造を持っている。この中で real point を取り、それに対応する $\mathcal{O}_X$ -加群としての拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1) \rightarrow L_{i1} \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1) \rightarrow 0$$

を考え、 L_{i1} は quaternionic になる。 L_{ij} まで quaternionic 層が定義されることを、上と同様に $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(L_{ij}, \mathcal{O}_{l_i}(1))$ の real point で決まる拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{l_i}(1) \rightarrow L_{ij+1} \rightarrow L_{ij} \rightarrow 0$$

は quaternionic 層である。この様にして定まる quaternionic $\mathcal{O}_X$ -加群で、その support が l_i であるもの L_i を取る。 L_i は b_i 個の

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ の拡大 $\hookrightarrow$ となる $b = \sum_{i=1}^a b_i$ とし、 E は $I(n-b) \subset \overline{M}(n-b, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元とする。 E から $L = \bigoplus_{i=1}^a L_i$ への全射 γ があつたとして、 $E(L) = \ker(\gamma)$ とおく。

よく知られた instanton bundle の性質により $H^i(X, E(-2)) = 0$ $i=1, 2$, $H^2(X, E) = 0$ がわかるから、 $E(L)$ の定義から $H^i(X, E(L)) = 0$ $i=1, 2$, $H^2(X, E(L)) = 0$ となる。従つて、Beilinson のスペクトル列を使って次の補題を得る。

補題 3.1. 複体

$$\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{k} \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{m} \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

で、 k が単射 m が全射になるものが存在して、 $E(L)$ はこの複体の cohomology 層になっている。

容易にわかるように、準同型 k (必ずしも単射ではない) を与えることと、 $\mathbb{C}$ -線型写像 $K: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V$ を与えることは同値である、ここで V は $X = \mathbb{P}(V)$ となる 4次元 $\mathbb{C}$ -vector space. 同様に m は $M: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V$ と対応している。行列の積 $K \wedge M$ を $\wedge^2 V$ の係数を持つものとして自然に定義できるが、これは $\mathbb{C}$ -線型写像の結合

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{K} \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V \xrightarrow{M \otimes 1} \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V \rightarrow \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V$$

に対応するものである。 m が 0 になることと $K \wedge M = 0$ とは同値である。 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V)$ の部分

scheme Y_n を次の条件で定める: $(K, M) \in Y_n \iff$

- ① $K \wedge M = 0$,
- ② k は単射, m は全射,
- ③ k, m が定める複体の cohomology 層が安定.

Y_n 上には $G = GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \times GL(2n-2, \mathbb{C})$ が

$G \ni (R, S, T), Y_n \ni (K, M)$ に対して,

$$(K, M) \mapsto (RKS^{-1}, SMT^{-1})$$

と作用する。これは, $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2}$ の座標の取りかえに対応する。 $t \in \mathbb{C}^*$ に対して (tI_n, tI_n, tI_{2n-2}) が自明に作用しているから, $\bar{G} = G/\mathbb{C}^*$ が Y_n に作用している。

相対的 Beilinson スペクトル列の局所普遍性により, $Y_n/\bar{G}$ は (存在すれば) $H^i(X, F(-2)) = 0$ ($i=1, 2$), $H^2(X, F) = 0$, $\mathcal{R}(F) = 2$ の安定層 F で, $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = n$, $c_3(F) = 0$ となるものの moduli 空間となる。 $a=1, b_1=1$ の場合, すなわち $F = E(\mathcal{O}_E(1))$ に対して, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(F, F) = 0$ となることは, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(E, E) = 0$ (これは大変むずかしい) を使えば, それほど困難なく導ける。 故に, moduli 空間は F で smooth になっている。 我々は Y_n の F に対応している点での接ベクトルの状態を調べたいので, Y_n がその点で smooth になっていることを知りたい。 そのための標準的方法は, その点が $\bar{G}$ の作用に対して stable になっていること

とを示すことである。実はこれが非常に難しく誰も成功して
いない。Verdierが [Artigue 71-72, Exposé VII] で intrinsic な
証明を書いているが、彼の方法が拙いであることは [Mumford,
Geometric Invariant Theory, Ch 4, §3] にある 永田雅直氏の反例でわ
かる。“どんなに作用の状態が悪くても, stability はそれから
自動的にほでてこない”。結局は 1-parameter subgroup を使ったの計
算しかないようで、我々の場合にはあまりにも複雑すぎる。

ところで、次の補題は [EGA, Ch III 7.7.8, 7.7.9] を使えば、
良い演習問題程度である。

補題 3.2. $\bar{G}$ の Y_n への作用は (強い意味で) 自由である。

これにより、 $Y_n/\bar{G}$ は complex spaces の圏、または algebraic spaces
の圏で存在し、それは F で smooth かつ Y_n は $Y_n/\bar{G}$ の $\bar{G}$ を群とす
る principal fibre space となる。従って、 Y_n が F に対応する点
で smooth になることが分る。

$F = E(\mathcal{O}_2(1))$ を考える。 V の基底 (x, y, v, w) をうまく選ん
で、 σ が $x=y=0$ で定義され、 $\sigma^*x=y, \sigma^*y=-x, \sigma^*v=w,$
 $\sigma^*w=-v$ となるようにする。このとき、次の命題を得る。

命題 3.3. F は Y_n の点 (K, M) で次の形をしたもので代表さ
れる:

$$K = \left(\begin{array}{c|ccc} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ \hline A & & K' & & \end{array} \right), \quad M = \left(\begin{array}{c|ccc} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ \hline B & C & & & M' \end{array} \right)$$

ここで, (K', M') は Y_{n-1} の点で instanton bundle E に対応している. さらに, $A \wedge x \wedge y = 0$ としてよい.

Y_n の (K, M) での tangent space を考える. Y_n を定義する条件のうち ②と③は開集合を定める条件であることに注意して, 次の写像を見よう:

$$\mu: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^2 V) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^3 V)$$

$$\mu(K_1, M_1) = K_1 \wedge M + K \wedge M_1$$

μ の source は Y_n の ambient space の tangent space であり, μ は①の方程式の微分であるから, $\ker(\mu)$ が Y_n の (K, M) の tangent space $T_{(K, M)}$ になる. Y_n の中でベクトル束に対応しているものは開 scheme Y'_n をなしている.

命題 3.4. (K, M) は命題 3.3 のように取る.

(1) Y'_n は (K, M) で smooth, 余次元 1 の subscheme である.

(2) $T'_{(K, M)}$ は Y'_n の (K, M) での tangent space でありと取る.

$(K_1, M_1) \in T'_{(K, M)}$, $K_1 = (k_{ij})$ が $T'_{(K, M)}$ に含まれるための必要十分条件は $k_{ij} \wedge x \wedge y = 0$ となることである.

ここで, Y_n の実構造について注意としておく. σ の V への作用は $\wedge V$ への作用に拡張される. 従って, $(K, M) \in Y_n$ によって, $(\sigma^* K, \sigma^* M)$ が各行列の係数への σ の作用として定義

される. $(2n-2) \times (2n-2)$ 行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を取る. このとき, $(K, M) \in Y_n$ が quaternionic 層を与えることと, $(K, M) = (\sigma^* K, \sigma^* M J)$ となることは同値である. この条件を満たす点の全体が real scheme $Y_{n, \mathbb{R}}$ の real points となり, $Y_{n, \mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Y_n$ となる. 故に, 命題 3.4 は $Y_n \subseteq Y_{n, \mathbb{R}}(\mathbb{R})$ でおさかえても正しい.

命題 3.4 と上の注意により, $T_{(K, M)}$ の real vectn (K_1, M_1) で, $T'_{(K, M)}$ に入らないものがある. $K_1 = (k_{ij})$ と書くと, $k_{ij} \wedge x_j \wedge y_i \neq 0$ である. (K_1, M_1) を沿って (K, M) の近傍での real analytic 積分曲線 $(K(t), M(t))$ を作る.

$$K(t) = \left(\begin{array}{c|ccc} x \wedge y & 0 & \cdots & 0 \\ \hline A & & & K' \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c|c} k_{11} & \\ \hline & \end{array} \right) + t \text{ の高次項}$$

ところで, $F' \in \overline{M}(n, 2)$ が Y_n の元 (K', M') に対応したとする. $\mathbb{C}$ 上の 6 変数の多項式環 $S_{\mathbb{C}}(\wedge^2 V)$ の元として $\det K'$ を考え, $\{\det K' = 0\} \cap \text{Gr}(3, 1) \subseteq \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ が丁度 F' の "division of jumping lines" $\{\ell \in \text{Gr}(3, 1) \mid F'|_{\ell} \neq 0 \ell^{\oplus 2}\}$ になる. 定理 1.5. の条件 (3) は $\phi = \{\det K' = 0\} \cap S^4 \subseteq \mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ に他ならない. さらに, (K', M') が Y_n の点で $\{\det K' = 0\} \cap S^4 = \phi$ ならば, 対応する F' はベクトル

束になることも分る。さて、元々もどって実直線 $x=y=0$ に対応する S^4 の点を p とおいて、 $k_{ii}(p) = k_{ii} \wedge x \wedge y \in (V)_{\text{real}} = \mathbb{R}$ が正であると仮定してよい。すると $\epsilon(>0)$ が十分小さければ、 $\det K(t) = 0$ が S^4 と交わらないことは容易に示される。故に、十分小さい正の ϵ について、 $(K(t), M(t))$ は $I(n)$ の元に対応していることがわかるから、 (K, M) に対応する F が $\overline{I}(n)$ に入っていることが分る。

定理 3.5. L は実直線 E は $I(n-1) \subset \overline{M}(n-1, 2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元とする。任意の全射 $\gamma: E \rightarrow \mathcal{O}_L(1)$ に対して、 $\text{ker}(\gamma)$ は $\overline{I}(n)$ に入っている。

この定理の証明に現われる *real analytic curve* を使えば、 $b_1 = \dots = b_a = 1$ の場合に、すべての $E(L)$ が $\overline{I}(n)$ に入っていることもすぐわかる。 $b_i > 1$ の時は非常に複雑で、我々が得た最良の結果は次の通りである。

定理 3.6. $1 \leq i \leq a$ について、 $L_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{L_i}$ が *torsion free* であるとするとき、すべての $E(L)$ は $\overline{I}(n)$ に入っている。

注意 (1) 定理 3.5 の γ は $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ で *parametrize* されている。
§2 に使う開集合 U を使うと、写像 $\varphi(m): \overline{I}(n) \cap U \longrightarrow \overline{M}(n, 2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ が考えられるが、 $I(n-1) \times S^4 \subset \overline{I}(n)$ の点の

逆像 $\times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ が入っていることが分ったことになる。これは丁度 bubble の parameters である。

(2) 定理 3.6 の条件をみたす L_i は存在し、そのような L_i について $L = \bigoplus_{i=1}^a L_i$ を考えれば、 E から L への全射は必ず存在する。従って、上の (1) の写像 $\varphi(n)'$ の像は $\bar{I}(n)$ になっていることが分る。