

トーラス上の保測変換についての補足 (II)

津田 塾 伊藤 俊次

十時氏草稿における微分方程式(1)と(2)は differentiable の範囲で考えることが出来るべきで、実際 草稿を述べられている Gnani, Kolmogorov 及び Arnold の仕事はこのようなものである。例えは

定理: γ は (1) の rotation number とするとき γ が "not too well" ならば (1) と (2) は同型 (differentiable な保測変換がある) となる。

この定理は次のように理解するのが自然である。 (2) という基本的な方程式を time change したとき、どこまで "変わりうるか" という問いに対して、 R^1 上の measure の変換の γ に対して "全く変わらない" という主張である。あるいは (1) という方程式は "殆んど全く" (2) と同じとなる。

それでは γ が measure の変換であるが "too well" な近似と見なされる方程式はどのようなものがあるか。

定理 (Kato) (1) の方程式の γ が "too well" (not too well の対偶、無論 γ が無理数 α とするとき) であるとき、

(1) は singular, simple spectrum ともつ。

この定理は次のように理解される。(2)の方程式は discrete spectrum (ふつ, singular simple) ともつが, その time change (1)は変化しても singular, simple spectrum まで で ことばない Lebesgue spectrumと対峙 と主張がある。草稿の Sklover と合わせれば, 実際 singular simple, continuous なスペクトル ともつ (1)なる方程式があることと言っている。江川氏, 丸山氏の質問と整理すれば

(1) continuous ではなく, 又 discrete ではなく (1)なる方程式が存在するかは知られていない。

(2) Katok の結果から (1)の方程式の metrical entropy は "零" である。topological entropy については知られていないが 他方 "零" となるであろう。一般に flow が与えられるとき, その time change の topological entropy がどう変わるかについては知られていない。

$\mathbb{R}^2$ 上の簡単な Anosov 系 としその群同型写像 A が考えられるが, これは深く上記の (2) の方程式と結びついている。(これについては補足(I)を参照) とする $\mathbb{Z}$ transverse T との方程式 (2) type の方程式) の rotation number は 2 次方程式の解であるの $\mathbb{Z}$ "not too well" である。ここでは A に近い Anosov system とし Sinai-Arnold にある small perturbation

A_ε を考えよう。 A と A_ε は同型 (topological 意味で) であることの主張 (structure stable であること) であるが, perturbation の仕方に一定の制限をつけたとき, 例えは " A_ε は Lebesgue measure と絶対連続となる A_ε によって保たれる測度をもつとき, 果たして, differentiable な意味で保たれる同型写像があるか" という問題がある。これについて yes の可能性の予想として,

A_ε は transversal flow が存在して (1) の形としてゐること及び同じ rotation number をもち "not too well" であること。から transversal flow を用いた同型の可能性を求めたのだが" ... (補足(I)参照)