

Classification of Nonrigid Family of K3 surfaces

北大理(教養) 齋藤 政彦

§0. 問題と動機: $\mathcal{X}$, S を $\mathbb{C}$ 上定義された連結非特異
導射影的多様体とする。射影的非特異な射 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ のす
べてのファイバーが連結の時, $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ を ファイバー空間
と言う。以下, $\mathcal{X}$ 上 f -relative nef & big な直線束 $\mathcal{L}$ も同
時に考える事にする。複素構造や正則写像の変形理論におけ
る Rigidity は興味ある問題である。特にファイバー空間の変
形理論ではファイバーが曲線の時, Arakelov が, 主偏曲ア
ーベル多様体の時は Faltings が Rigidity theorem を示し, 関
数体 $\mathbb{C}(S)$ 上の有限性定理を導いている。我々は, Faltings
の Rigidity theorem を一般の VHS (Variation of Hodge struc-
ture) に拡張した C. Peters の方法を足場に, 代数的な K3
曲面のファイバー空間で, Nonrigid なものを, generic fiber
の超越的サイクルのなす ホッジ構造の準同形環の言葉で分類
する。K3 曲面に対する Torelli 型定理 (全単射性) より,
ホッジ構造の言葉と, $\mathbb{Z}$ lattice の埋め込みの問題に帰着する

が, $\mathbb{Z}$ -lattice の埋め込みの問題は別にゆずるものとし, ホッジ構造の言葉で記述される部分のみを記す事にする。

(この仕事は, Johns Hopkins 大の Steven Zucker 氏との共同研究に基づく事を述べておく。)

まず, Rigidity の意味を明確にしておく。(別の意味にも使われるので)

定義 0.1: (T, ω) を非特異解析空間の芽とする。 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ の T 上の (S を固定する) 変形 とは, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{X}} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ S \times 0 & \hookrightarrow & S \times T \end{array}$$

で, $\tilde{\mathcal{X}}$ に $\tilde{f}$ -rel. ample (or nef & big) l. b. $\tilde{\mathcal{L}}$ で $\tilde{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}} = \mathcal{L}$ となるものが存在するものと言う。ファイバー空間 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ が Rigid とは, 非自明な変形を持たない時に言う。

この定義に従って, 次の基本的な問題を述べておく。

問題 (R): ファイバー空間 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ が Rigid になる「良い」十分条件を与えよ。

ファイバーを個々の対象 (例えば, 代数曲線, アーベル多様体, K3 曲面) に限った時には, 次の問題は上の問題 (R) と表裏一体である。

問題 (NR): Nonrigid な ファイバー空間の例をつくり、分類せよ。

ファイバー空間 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ が isotrivial とは、ある étale covering $\pi: S' \rightarrow S$ があり、 $f': \mathcal{X}_{S'} \rightarrow S'$ が直積 $X \times S' \rightarrow S'$ と双有理的になる時に言う。Arakelov は [1] において次の定理を示した。

定理 ([1]). $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ を isotrivial でない種数 2 以上の代数曲線のファイバー空間とする時、 f は Rigid である。

注) Arakelov は $S = \bar{S} - \{\text{pts}\}$, $\bar{S}$ は代数曲線の場合に示したが、一般の場合はそれから容易に導かれる。

この定理の拡張として、Faltings はアーベル多様体のファイバー空間の場合に、Rigidity の良い 必要 十分条件を与えた。(これについては後述する。)

有界性定理: M_g , A_n , $\mathcal{H}_{2k}$ で種数 g の曲線, n 次元の主偏極アーベル多様体, 次数 $2k$ の nef & big l.b. をもつ, $K3$ 曲面のモジュライ空間とする。これらは自然なスキームの構造をもつが、よく知られているように有界、すなわち、準射影的 (quasi projective) 多様体である。モジュライ

空間の幾何的, 関数論的性質は最近も活発に研究されている。

(例えば, 小平次元や アルバー-ネ-セ次元 等)

次のような集合を考える。(S は前の通り。)

- ① $\mathcal{C}_g(S) = \{ f: X \rightarrow S, \text{ファイバーは genus } g \text{ の曲線} \} / \text{iso.}$
- ② $A(n, S) = \{ \quad \quad \quad, \text{ファイバーは } n \text{ 次元 p.p. A.V.} \} / \text{iso.}$
- ③ $\mathcal{K}(2k, S) = \{ \quad \quad \quad, \text{ファイバーは 次数 } 2k \text{ の K3 曲面} \} / \text{iso.}$

①, ②, ③ はそれぞれ正則写像の空間 $\text{Hol}(S, \mathcal{M}_g)$,

$\text{Hol}(S, A_n)$, $\text{Hol}(S, K_{2k})$ のある部分空間となる。

Arakelov は [1] において $\mathcal{C}_g(S)$ の有界性を示した。

Rigidity Th. と合せると次の有限性定理を得る。

有限性定理 (Arakelov [1]): S 上の nonisotrivial な
種数 2 以上のファイバー空間は有限個。

(関数体 $k(S)$ 上の Šafarevich 予想)

Faltings は, $A(n, S)$ の有界性を示した。([3]) によって
Rigidity Th. の成立するものについては, 有限性定理が成立
する。Deligne の Th. Hodge II の定理と合せると, ファイバー
が simple p.p. a.v. で次元が 3 以下かつ nonisotrivial なもの
については有限性定理が言える。

野口の有界性定理: $\mathcal{D}$ を有界対称領域, Γ を tor-
sion free な $\text{Aut}(\mathcal{D})$ の discrete 群で $\text{Vol}(\mathcal{D}/\Gamma) < +\infty$ なるも
のとする。 $\text{Hol}(S, \mathcal{D}/\Gamma)$ (正則写像のモジュライ空間)

の性質は、砂田氏や野口氏により調べられ、美しい結果が得られている。([5] の ref. を参照。) 次の定理は、その中でも決定的な結果である。

定理 (野口 [5]): $\mathcal{D}, \Gamma, S$ 上の通り.

- (i) $\text{Hol}(S, \mathcal{D}/\Gamma)$ は 非特異かつ導射影的.
- (ii) Z を $\text{Hol}(S, \mathcal{D}/\Gamma)$ の連結成分, $x_0 \in S$ とする.

Evaluation map $\phi: Z \ni f \mapsto f(x_0) \in \mathcal{D}/\Gamma$ は totally geodisc な complex submanifold 上への 正則埋め込みであり, Z は (有界対称領域) $/\Gamma$, (Γ : discrete 群) となる.
(Theorem (4.7), [5])

ここで, Γ は torsion free な discrete 群であるが, 適当に議論を修正すると次の系を得る. (有界性定理)

系 (Remark (2.19), (4.11) [5]):

$\mathcal{C}_g(S), A(m, S), K(2k, S)$ は 有界.

野口の定理は

すなわち, $\mathcal{C}_g(S), A(m, S)$ については別証を与え得る一般化された定理である。野口氏の定理は $\mathcal{D}/\Gamma$ が佐武コンパクト化 $\overline{\mathcal{D}/\Gamma}$ の中に双曲的に埋入されているという (小杯計量の意味) 事実を用いている。この結果から, K3 曲面の有限性定理も Rigidity の成立するものについて成立する事がわかる。

§1. VHS の Rigidity とその準同形環.

Faltings [3] は前述したように, $\mathcal{A}$ -ベル多様体のファイバー空間 $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ の Rigidity の判定条件を与えた。それは $R^i f_* \mathbb{Z}$ 上の VHS (Variation of Hodge Structure) の準同形環の言葉でなされる。 $\mathcal{A}$ -ベル多様体のモチーライは, $R^i f_* \mathbb{Z}$ 上の各ファイバーに入る Hodge 構造そのものである (自明なトレリの定理) から, VHS の Rigidity $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ -ベル多様体の族の Rigidity である。C. Peters は Faltings の方法が, 一般の VHS にも拡張できる事を示した。(トレリ型の定理が成立するものについては幾何的に応用できるのは言うまでもない。) この Faltings = C. Peters の方法を説明するために記号を準備する。

(I) S : 連結非特異写射影多様体 $/\mathbb{C}$

(II) $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$: S 上の VHS of weight k

$\Leftrightarrow$
def. (i) $V_{\mathbb{Z}}$: S 上の finite free $\mathbb{Z}$ -module の local system
(ii) Q : $V_{\mathbb{Z}}$ 上の flat な非退化 $(-1)^k$ 対称 $\mathbb{Z}$ 値二次形式.

(iii) $V_{\mathbb{C}}$ の decreasing filtration $\{F^p\}$ F^p : hol. v.b.

$$V_{\mathbb{C}} = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^p \supset \dots \quad (V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C})$$

で次とみるもの.

$$(a) \quad \forall s \in S \quad \mathcal{V}_{\mathbb{C},s} \cong F_s^p \oplus \overline{F_s^{k-p+1}} \quad \forall p \text{ (Hodge fil.)}$$

$$(b) \quad \forall s \in S \quad (C_s : \text{Weil op.})$$

$$Q_s(F_s^p, F_s^{k-p+1}) = 0$$

$$Q_s(C_s v, \bar{v}) > 0, \quad v \in \mathcal{V}_{\mathbb{C},s}, \quad v \neq 0.$$

$$(c) \quad \nabla : \mathcal{O}(F^p) \hookrightarrow \mathcal{O}(F^{p+1}) \otimes \Omega_S^1 \quad (\text{horizontality}).$$

(∇ : the flat connection of $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$).

$$(III) \quad (\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathcal{Q}) \quad \text{z.} \quad \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ とした時 } (\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathcal{Q}) \in$$

$\mathbb{Q}$ -VHS という。

$$(IV) \quad S = \{\text{1点}\} \text{ の時 } (\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathcal{Q}) \text{ は Hodge structure of wt } k.$$

さて以下主に $\mathbb{Q}$ -VHS/ S を考える。 $(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathcal{Q})$ を S 上の $\mathbb{Q}$ -VHS of weight k とする。

$\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) : \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ の locally flat な endomorphism の全体 $\mathbb{Z}$ -l.s.
 $\bigcup \text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) : \text{上の } \mathbb{Q} \text{ を保つもの.}$

$$\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) = H^0(S, \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})) : \text{global flat sections}$$

$$\bigcup \text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) = H^0(S, \text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})) :$$

$\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ および $\text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ は 線形環 ($\mathbb{Q}$ -algebra) の構造をもつが、 $\mathbb{Q}$ -VHS $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ の 導同形環 (Endomorphism algebra) と呼ぶ。 $\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ および $\text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ は weight 0 の Hodge 分解を持つ。すなわち、

$$\text{End}^{(\mathbb{Q})}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C} = \text{End}^{(\mathbb{Q})}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_p \text{End}^{p,p}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$$

$$\mathrm{End}^{(0)}(V_C)^{p,p} = \left\{ f: V_C \rightarrow V_C ; \quad f(V_s^{p,m}) \subset V_s^{q-p, m+p} \right. \\ \left. \forall s \in S \right\}$$

(例1) $f: X \rightarrow S$: 曲線又は Abel 多様体の族.

$V_\Theta = R^1 f_* \mathbb{Q}$ は S 上の weight 1 の VHS.

(例2) $f: X \rightarrow S$: K3 曲面の族, $\exists \mathcal{L}: f\text{-rel. nef. \& big.}$

$$\mathcal{L}|_{X_s}^2 = 2k > 0. \quad V_\Theta = \ker(V_C(\mathcal{L}): R^2 f_* \mathbb{Q} \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Q})$$

は weight 2 の Hodge structure で $\dim V_C^{(2,0)} = 1$.

Faltings - Peters の方法とは, 例えば, S 上の VHS (V_Z, F^p, Θ) の S を固定した変形の倉西空間を考えその Zariski 空間を VHS の準同形環の言葉でいうものである.

定理 11 (Faltings [3], C. Peters [5]). $[V] = (V_Z, F^p, \Theta)$ は S 上の weight k の VHS, T をその倉西空間 (V の local deformation の versal family) とする.

$$(\star) \quad T_{[V]}(T) \cong \left(\mathrm{End}(V_Z) \otimes \mathbb{Q} \right)^{(-1,1)}.$$

Faltings の Rigidity Thm は次のように述べられる.

定理 (Faltings [3]): $f: X \rightarrow S$ は p -ベル多様体の族

$V_Z = R^1 f_* \mathbb{Z}$ とおく. V_C の global flat Endomorphism

タイプ $(-1,1)$ の偏極と両立する/type $(-1,1)$ のものがない時, 又その時に限り f は Rigid である.

この系は(☆)の同型と, p -ベル多様体の族の時, 倉西空間は非特異 (一般に考える VHS の周期領域が有界対称領域であれば成立する事実) である事からなる。

注) 前述した Deligne の定理は次のように述べられる。

「 $f: X \rightarrow S$: abelian variety の family, generic fiber は simple かつ $\text{rel. dim of } f \leq 3$

$\Rightarrow \text{End}^{\mathbb{Q}}(R^i f_* \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ は type (0,0).」

(Deligne [2], Cor. (4.4.13)) .

§2. VHS of weight 2 with $h^{2,0}=1$. (K3 曲面).

良く知られているように, 代数曲面が $g=0$, $\Omega_x^2 \cong \mathbb{Q}_x$ を満たす時 K3 曲面とよばれる。K3 曲面 X の 2^{nd} コホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ はカップ積による非退化双一次形式 Q をもち, $(H^2(X, \mathbb{Z}), Q)$ は $E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 3}$ と isometry である。 $H^2(X, \mathbb{C})$ は Hodge 分解

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^2(X, \mathbb{Q}_x) \oplus H^1(X, \Omega_x^1) \oplus H^0(X, \Omega_x^2)$$

を持つ。ここで $h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_x^2) = 1$, $h^{1,1} = \dim H^1(X, \Omega_x^1) = 20$ がある。K3 曲面上の nef. & big l.b. $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}^2 = 2k > 0$ なるものがある時, $H^2(X, \mathbb{Z})_0 = \ker(\text{qal}: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z})$ は偏極ホッジ構造をもつ。この偏極ホッジ構造により, X のモヂュライが記述され, 逆に 上本の type の 偏極ホッジ構造には K3 曲面が存在

応する事が知られている。このような Hodge 構造全体は IV 型
 対称領域 $\mathcal{D}_{19} \cong SO^0(2, 19) / SO(2) \times SO(19)$ のある discrete 群
 Γ_{2k} による商と同型になる。§0 の記号では、モグザウイ空間
 の間の同型 $\mathcal{K}_{2k} \cong \mathcal{D} / \Gamma_{2k}$ と言えるわけである。(Torelli
 型定理 + 全射性)。

よって、我々は少し設定を変え、§2 の標題にあるものを
 一般に考えよう。

$$\left\{ \begin{array}{l} S: \text{前の通り} \\ H = (H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q) : \text{VHS over } S \text{ of wt } 2 \text{ with } h^{2,0}=1, \\ \text{すなわち, } \left(\dim H_{\mathbb{C}, S}^{2,0} = \dim F_1^2 = 1 \quad \forall S \in S \right) \\ H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \quad H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \quad \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_{\mathbb{Z}} = k \end{array} \right.$$

$Q_{\mathbb{R}}$ は $H_{\mathbb{R}}$ 上の対称双 1 次形式であるがその signature
 は $(2, k-2) = (b_+, b_-)$ 。

さて、次の簡単な補題がある。

補題 2.1. : $(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$, S は上の通り。

$$\exists^1 \quad \mathbb{Q}\text{-sub VHS } (V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q) \subset (H_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$$

such that

(i) $V_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ -VHS として既約。

(ii) $\text{rank } V_{\mathbb{C}}^{2,0} = 1$.

$$\text{さらに} \quad H_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}} \oplus V_{\mathbb{Q}}^{\perp} \quad \left(V_{\mathbb{Q}}^{\perp} \text{ も } \mathbb{Q}\text{-sub-VHS} \right)$$

証明) $\mathbb{Q}$ -VHS は明らかに semisimple な category であるから $V_{\mathbb{Q}}$ の存在と直和分解は明らか。一意性も $\text{rank } H_c^{2,0} = \text{rank } V_c^{2,0} = 1$ より明らか。

定義 2.2: S 上の $VHS, H = (H_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathbb{Q})$ を上の通りとする。

補題により得られた $\mathbb{Q}$ -sub VHS $V = (V_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathbb{Q})$ を H の本質的部分 (essential part) という。

$(H_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathbb{Q})$ を上の通りとする。今 $s \in S$ を固定すると $(H_{\mathbb{Z}, s}, F_s^p, \mathbb{Q}_s)$ は weight 2, $k^{2,0}=1$ のホッジ構造である。

$S_{\mathbb{Q}, s} := H_{\mathbb{C}, s}^{1,1} \cap H_{\mathbb{Q}, s} : \mathbb{Q}$ -lattice of alg. cycle.

$T_{\mathbb{Q}, s} := S_{\mathbb{Q}, s}^{\perp}$ in $H_{\mathbb{Q}, s} : \mathbb{Q}$ -transcendental lattice,

命題 2.3: $S, H = (H_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathbb{Q}), V = (V_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathbb{Q})$ を上の通り。

(i) $\forall s \in S$ に対し, $T_{\mathbb{Q}, s} \subset V_{\mathbb{Q}, s}$

(ii) H は nonisotrivial とする。 S の general な点について

$$T_{\mathbb{Q}, s} \cong V_{\mathbb{Q}, s}.$$

(i) $T_{\mathbb{Q}, s}$ は simple な Hodge 構造より, 明らか。

(ii) Zahrim の K3 曲面の Hodge 群と monodromy 群の関係を参照。[6].

命題 2.4 : $S, (H_Z, F^p, Q), (V_0, F^p, Q)$ は上の通り.

H_Z を nonisotrivial とする。次の同型が存在する。

$$(\text{End}(H_Z) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} \cong (\text{End}(V_0) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)}.$$

§ 3. Nonrigid VHS の分類:

$S, (H_Z, F^p, Q), (V_0, F^p, Q)$ を § 2 と同様とする。すると H_Z は S 上の wt 2 VHS with $h^{2,0}=1$, V_0 はその essential part.

定義 3.1 : $(H_Z, F^p, Q) : \text{VHS}/S$ が rigid とは
(条件) $(\text{End}^Q(H_Z) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} = 0$

となる事である。

Peters の定理 (§ 1) より, これは VHS の本来の意味の Rigidity と同値である。我々は以下

(i) (H_Z, F^p, Q) nonisotrivial VHS wt 2, $h^{2,0}=1$.

(ii) $\dim (\text{End}^Q(H_Z) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} > 0$

なるものを分類する。§ 2 の最後の命題より, (i) の条件のもとで (ii) は $\dim (\text{End}^Q(V_0) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} > 0$ と同値である。

さて次の定理が我々の目標である。

定理 3.2: $H := (H_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathbb{Q})$ S 上の VHS of wt 2,
 $\kappa^{2,0} = 1$, $V := (V_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathbb{Q})$: H の essential part.

(仮定) (i) H : non-isotrivial

(ii) $\dim(\text{End}(V_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} > 0$ (nonrigid)

この時, $E(V_{\mathbb{Q}}) := \text{End}(V_{\mathbb{Q}})$ について次が成立する.

(a): Endomorphism algebra $E(V_{\mathbb{Q}})$ の center を Z とすると,

Z は 総実代数体で $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上の四元数環.

(すなわち, $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上の central simple algebra 2"

$$[E(V_{\mathbb{Q}}):Z] = 4.)$$

(b): Local system $V_{\mathbb{Q}}$ は $E(V_{\mathbb{Q}})$ -module とし

$$\text{rank } 1. \text{ 特に } \text{rank}_Z V_{\mathbb{Q}} = 4$$

$$\text{rank}_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = 4g \quad [Z:\mathbb{Q}] = g.$$

$$(c): E(V_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}) \times \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{g-1}.$$

$\mathbb{K}$ は Hamiltonian algebra.

この定理を証明するために, 次の注意する. $V = (V_{\mathbb{Q}}, F^p, \mathbb{Q})$
 を上の通りとする. $s \in S$ を固定し, $\nabla := V_{\mathbb{Q},s}$ $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_s$ と
 する. モノドロミー表現 $\rho: \pi_1(S, s) \rightarrow \text{Aut}(\nabla, \mathbb{Q})$ を考え
 その像を Γ_s とする. 自然な同視 を考える.

$$E(V_{\mathbb{Q}}) \cong \text{End}(\nabla)^{\Gamma_s} \subset \text{End}(\nabla)$$

$\mathbb{Q}$ は $\text{End}(\nabla)$ に involution $*$ を adjoint operator で定義

する。すなわち $a \in \text{End}(V)$ に對し.

$$Q(x, ay) = Q(a^*x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

Q は Γ 不変より, $*$ は $E(V_0)$ 上に作用する。さらに

$$Q(Cax, ax) > 0$$

$$\text{より, } Q(C \cdot C(a^*) \cdot a \cdot x, x) > 0 \quad (C(a) = C^*aC)$$

であるから $a \in E(V_0) \otimes \mathbb{R}$ に對し

$$(**) \quad \text{Tr}(C(a^*)a) > 0.$$

補題 3.3: $H, V = (V_0, F^p, Q)$ は 定理 のとおりとする。中心 Z は (可換体であり $E(V_0)$ は Z 上の simple algebra である。さらに Z は次のいずれかである。

(ア) : Z は 複素代数体, $*|_Z = \text{id}$.

(イ) : Z は $Z_0 = \{u \in Z, *u = u\}$ 上 imaginary quadratic extension, $*$ は 複素共役.

(証明) Deligne [2], Cor (4.2.8) より $E(V_0)$ は semisimple. かつ Z は type (0,0) である。 V_0 は $\mathbb{Q}$ -VHS として既約であるから Z は体。よって $E(V_0)$ は simple である。 Z の元 a をとると a は type (0,0) より Weil operator と可換。よって上記(**)より $\text{Tr}(a^*a) > 0$ 。よって $(Z, *)$ は positive involution をもつ体。よって Albert classification より従う, (see. [6]).

(定理の証明): $E(V_0)$ の中心 は, 補題より (p), (1) のと
 らるか. $[Z: \mathbb{Q}] = g$ とおき, $\rho_i: Z \hookrightarrow \mathbb{C} \ (i=1, \dots, g)$
 を g 個の異なる埋め込みとしよう.

$$V_{\rho_i} := V_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

$$E_{\rho_i} := E(V_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

とあくと $V_{\mathbb{C}}, E(V_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の分解を得る.

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^g V_{\rho_i}, \quad E(V_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^g E_{\rho_i}$$

$\mathbb{C}$ -algebra E_{ρ_i} は simple より, ある $\mathbb{C}$ -vector space L_{ρ_i}
 により $E_{\rho_i} \cong \text{End}(L_{\rho_i})$ となる. 上の分解はすべてホッ
 ジ構造と両立し, さらに L_{ρ_i} にホッジ分解を与え, E_{ρ_i} のそ
 れと両立させる事ができる. Local system $K_{\rho_i} \in$

$$\begin{aligned} K_{\rho_i} &= \text{Hom}_{E_{\rho_i}}(L_{\rho_i}, V_{\rho_i}) \\ &\cong L_{\rho_i}^* \otimes_{E_{\rho_i}} V_{\rho_i} \end{aligned}$$

とあくと. すると Local system の同型

$$(a) \quad L_{\rho_i} \otimes K_{\rho_i} \cong V_{\rho_i}$$

があるが, K_{ρ_i} にホッジ分解を与え, 上の同型がホッジ分解
 と両立するようにできる.

まず, (p) Z が総実代数体としよう. $\overline{V_{\rho}} = V_{\overline{\rho}} = V_{\rho}$ かつ
 $\dim V_{\mathbb{C}}^{2,0} = 1$ より, $\rho = \rho_1$ に対し $\text{rank } V_{\rho_1}^{2,0} = \text{rank } V_{\rho_1}^{0,2} = 1$ であ
 り, $\rho \neq \rho_1$ については $V_{\rho} = V_{\rho}^{(1,1)}$ である. よって $\rho \neq \rho_1$ に
 ついては (a) より L_{ρ} は pure type. よって $E_{\rho} = \text{End}(L_{\rho})$

は type $(0,0)$. $\dim (E \otimes \mathbb{C})^{(-1,1)} > 0$ より $\dim E_{\mathcal{P}_1}^{(-1,1)} > 0$.

よって $L_{\mathcal{P}_1}$ は少なくとも 2 つの type を含む。しかるに $V_{\mathcal{P}_1}$ は高々 3 つの type を含まないから、(a) より 次のどちらかが従う。

(1) $K_{\mathcal{P}_1}$: pure type $(0,0)$

(2) $L_{\mathcal{P}_1} \cong L_{\mathcal{P}_1}^{1,0} \oplus L_{\mathcal{P}_1}^{0,1}$ $\dim L_{\mathcal{P}_1}^{1,0} = \operatorname{rk} K_{\mathcal{P}_1}^{1,0} = 1$.

$$K_{\mathcal{P}_1} \cong K_{\mathcal{P}_1}^{1,0} \oplus K_{\mathcal{P}_1}^{0,1}$$

(1) の時は $V_{\mathcal{P}_1}$ の Hodge 構造は constant ($L_{\mathcal{P}_1}$ の $K_{\mathcal{P}_1}$) よって nonisotrivial の仮定に反する。(2) の時は, $\dim_{\mathbb{C}} L_{\mathcal{P}_1} = 2$ よって $\dim_{\mathbb{C}} E_{\mathcal{P}_1} = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{End}(L_{\mathcal{P}_1}) = 4$. よって $E(V_0)$ は $\mathbb{Z}$ 上 rank 4. 同様の考察より, $\mathbb{Z}$ が CM 型 (1) が起きないことがわかる。よって定理の (a) が言えた。又, $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} V_{\mathcal{P}_1} = 4$ より (b) も言えた。(c) は Deligne [23] の (4.4.9) の議論を援用し (講演の時, わからないと言っていた箇所は, 寺田氏に教えていただきました。感謝します。)

$$E(V_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}) \times \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{g-1} \quad \text{又は}$$

$$E(V_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{K} \times \underbrace{M_2(\mathbb{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbb{R})}_{g-1}$$

である事がわかる。ここで 第 1 成分の所に $(-1,1)$ type があるとする。ここで, monodromy 表現を考えれば, 後者は起きない事がわかる。

定理 は, *Nonisotrivial* かつ *Nonrigid* な VHS of wt 2, $h^{2,0}=1$ が非常に特別なものである事を示唆する。特に命題 2.3(ii) により general な S の点 s について, ファイバーの $\mathbb{Q}$ -transcendental lattice の次元は 4 の倍数である事が自然、導かれる。例えば, このことから次の系が得られる。

系 3.4: $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ が K3 曲面のファイバー空間で *nonisotrivial* とする。general fibre の π_1 カール数を ρ とする。 $4 \nmid 22-\rho$ ならば f は *Rigid*。特に, $\rho=1$ ならば f は *Rigid*。

注) 定理 3.2 の証明は Deligne [2] にある所が入である。

§4 例の構成 (Quaternionic Nightmare)

野口は [5] において次の興味深い結果を得ている。 $\mathcal{D}$: $\mathbb{H}$ 型対称領域, Γ : torsion free discrete gr, $\text{rk}(\mathcal{D}/\Gamma) < +\infty$. S は前の通り。 Γ $\phi: S \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$ とする。 rank of $\phi > 1$ ならば, ϕ は *Rigid* である。又 ϕ が ^{non constant,} *non rigid* かつ S が曲線とする。 ϕ を含む $\text{Hol}(S, \mathcal{D}/\Gamma)$ の成分 T は 1 次元である。」又最近の結果によれば $\tilde{S}, \tilde{T}$ を S と T の universal covering とおけば ($\tilde{S}, \tilde{T}$ とともに上半平面 $\mathbb{H}$ と同型) $\tilde{S} \times \tilde{T} \rightarrow \mathcal{D}$ (標準射) は $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ から $\mathcal{D}$ への totally geodesic 写像の埋め込み (すなわち有界部分対称空間としての埋め込み) である。(プライベートコミュニケーション

$\gg$)。 $H \times H \cong SO^0(2,2)/SO(2) \times SO(2)$ であるから、このような
 埋め込みは、標準的なものしかない。(伊原信一郎氏, J.
 Math. Soc. Japan 19 (1967) 261-302, 543-544) この意味では、実
 は定理 3.2 はある意味で予想されたものであったかも知れない。
 しかし、実は例を構成しようとする $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ の
 分離した離散部分群 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ とその Γ への準同型を定義しなけ
 ればならない。これを Steven Zucker 氏と筆者は随分考え色
 々な人達に質問したが、わからなかった。しかしこれは、筆
 者が数論に無知であったためであって、多元体の単数群から
 作る $SL(2, \mathbb{R})$ の離散群の理論は随分古くから研究されていた
 のであって、例えば志村先生の初期の論文、久賀先生、佐武
 先生の Kuga-Satake Variety 等には欠かさないものであった。

具体的な構成は、ここではおぼろげにせうが、総実代数
 体 $\mathbb{Z}$ の四元数環 E で 定理 3.2 の (c) の条件を満たすものから、
 $H/p_1 \times H/p_1'$ なる曲線の積上に VHS of weight 2 かつ $h^{2,0}=1$
 なるものを構成できる。これで Nonrigid なファミリーの例は
 できる。さらに、幾何的に K3 曲面と結びつける時は、 E の
 $\mathbb{Z}$ -lattice $E_{\mathbb{Z}}$ を取り、 $E_{\mathbb{Z}}$ 上の norm に関して、K3-lattice
 に isometry かつ primitive に埋め込む必要が出てくる。これ
 は、Nikulin の Theory があるからくわしい分類も可能と思う。
 (C. Peters 氏の手紙によれば Enriques lattice に埋めこめ

$E(V_0) = M_2(\mathbb{Q})$ なる VHS $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, \mathbb{Q})$ は K3 lattice に埋め込める事がわかるが, それから作った K3 のファイバー空間の general fibre は §5 の初め述べたように直積 (楕円曲線) から作った Kummer と isogeny であると予想される。

References.

- [1] : S. Arakelov : Families of alg. curves with fixed degeneracies. (Izvest. Akad Nauk 35 (1971)).
- [2] : P. Deligne : Théorie de Hodge II, I.H.E.S. 40 (1971) 5-57.
- [3] : G. Faltings : Arakelov's theorem for Ab. var.
Inv. Math. 73. 337-347 (1983)
- [4] : C. Peters : Rigidity for VHS and Arakelov-type Finiteness Thm. (Preprint. Leiden / 1988).
- [5] : J. Noguchi : Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and loc. sym. spaces. Inv. Math. 93, 15-34 (1988).
- [6] G. Zarhin : Hodge group of K3 surfaces.
J. Reine Angew. Math. 341 (1983) 193-220.