

一般化されたテータ級数の

Rankin-Selberg について

鈴木利明 (琉球大・理)

Toshiaki SUZUKI

1. 古典的なテータ級数と平方剰余の相互法則の関係に基づいて、久保田先生が一般化されたテータ級数を、 χ 剰余の相互法則から出発し、Selberg 理論を使って構成されました。

そのフーリエ係数を求めることが主な問題で、 $n=3$ のとき Patterson が解決して、それは3次のガウス和であることが分かりましたが、 $n>3$ のときは部分的な情報しか得られていません。最近 Kazhdan と Patterson が、 GL_r (の n 枚 covering 群 $\tilde{GL}_r$) でテータ級数を上記の方法で構成し、

$r=n$ のときは、そのフーリエ係数を求めることが出来ることを示しました。もちろん、 $r<n$ のときは部分的にしか分かりませんが、それは局所的情報であることが分かります。

一般に $\tilde{GL}_r$ 上の保型関数のフーリエ係数の構造は複雑で、局所的情報と そうでないもの によって決まるという二重構造になっていると考えられます。^(注) $r=n$ のときのテータ級数のと

きは局所的情報からだけで決定されます。Gelbert, Piatetski-Shapiro はこのような保型表現を *distinguished* と呼んで、その重要性を強調しています。一方、 $n < r$ のときは、Whittaker model が存在せず、フーリエ係数はありません。特に $n = 4$, $r = 2$ のとき、くわしい数値計算にもとづいた Patterson の予想があり、それによると、この場合のフーリエ係数の平方が4次のガウス和になる。また Bump-Hoffstein は、 $n = r$ のときのテータ級数 (*distinguished*) の Rankin-Selberg は Euler 積をもつことを示し、それから Shimura 対応が導かれることを示しました。

(注) Shimura 対応によって出来る GL_r 上の保型関数のフーリエ係数は局所的なもの(すなわち、ハッケ作用素だけから決まるもの)だけを含んでいます。 GL_r 上の保型表現はすべて *distinguished* です。 $n = 2$ のとき、よく知られているように (Waldspurger), そうごないものの平方は L -関数の特殊値になります。

さて、テータ級数の Rankin-Selberg を使って、局所的なものから得られないフーリエ係数の間の関係を求めることを考えます。アイデアは、ある Rankin-Selberg を作り、それを2通りの方法で計算し、その留数を比較するというものです。

第一の方法は Rankin-Selberg が Euler 積をもつことを使う。
 この計算ではテータ級数の局所的関係式をフルに使う局所的なものです。第二の方法は、Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika が GL_3 の保型関数で使った方法をまねてやる大局的計算です。これは本質的にはリーマンゼータ関数のポアソン和公式による関数等式の証明と同じ論法です。

基礎体が代数体の場合、bad prime や無限素点に対応する積分の計算が難しく、上記のプログラムはまだ実行出来ません。関数体の場合、bad prime 等が存在せず、計算が簡単になります。

さて、以下では、メタプレクティフ群 $\tilde{G}_A$ の定義を述べ、テータ級数とその Rankin-Selberg について簡単な説明をしたあとで、結果を述べたいと思います。

2. メタプレクティフ群 $\tilde{G}_A$

R を関数体とし、 $\mu_m(R) = \{x \in R^\times : x^m = 1\}$, $\#\mu_m(R) = m$ とします。 $G = GL_r$ に対し、 H を対角部分群、 N を上三角部分群とし、 H の元を $h = \text{diag}(h_i)$ で表わします。 G_A, H_A, N_A で対応する A -アデール群、 G_R, H_R, N_R で R -有理点群を表わします。また K_A で標準的な G_A の極大コンパクト部分群を表わします。

次のような G_A の中心拡大 $\tilde{G}_A$ と断面 S_A が存在します:

$$(I) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda_A} \tilde{G}_A \xrightarrow{P_A} G_A \rightarrow (I)$$

$\swarrow$
 S_A

(1) $R = \text{diag}(R_i)$, $R' = \text{diag}(R'_i) \in H_A$ に対し

$$S_A(R) S_A(R') = \lambda_A \left(\prod_{i < j} (R_i, R'_j)_A \right) S_A(R R')$$

ここで $(\cdot, \cdot)_A$ は大域的なヒルベルト記号です。

(2) N_A および K_A の上で、 S_A は同型である。その像をそれぞれ N_A^* , K_A^* と書くことにします。

また $S_R: G_R \rightarrow \tilde{G}_A$ なる lift が存在することが、ヒルベルト記号の相互法則より分かり、この像を G_R^* と書きます。

3. テータ級数 (19)

G_R^* は $\tilde{G}_A$ の離散部分群になり、右 K_A^* -不変な $\tilde{G}_A$ 上の Eisenstein series を構成することが出来ます。定数項を計算することによつて、Eisenstein series の極の状態が分かります。最大の特異性をもつ極での Eisenstein の留数として、テータ級数 (19) が定義されます。

まず

$$\|\Theta\|^2 = \int_{G_R \backslash G_A / Z_A^0} \Theta(Z_A(g)) \overline{\Theta(Z_A(g))} dg \quad (Z_A^0 = \{zI_v, z \in \mathbb{R}^*(\mathbb{R}_A^*)^n \mathbb{R}_A^*\})$$

は有限な値になります。次のような定数項

$$\int_{n_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_A} \Theta(s_A \left(\begin{array}{c|c} 1_c & m_{\lambda_j} \\ \hline 0 & 1_{v-c} \end{array} \right) g) \prod d n_{ij}$$

を考えると、これは、 GL_c および GL_{v-c} に関するテータ級数によって表わすことが出来ます。

e_0 を $\mathbb{R}$ で自明となる $\mathbb{R}_A$ の指標とします。 N_A^* の指標 e を

$$e(n) = e_0 \left(\sum_{i=1}^{v-1} n_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} \right), \quad P_A(n) = (n_{\lambda_j})$$

で定義します。

$\Theta(g)$ の Whittaker 関数を

$$W(g) = \int_{N_A^* \setminus W_A^*} \Theta(mg) \bar{e}(n) dn$$

で定義し、 $R \in \tilde{H}_A = P_A^{-1}(H_A)$ に対し

$$a(R) = \mu(R)^{-1} W(R)$$

と置きます。ここで $\mu(R) = \prod_{i < j} |R_i / R_j|_A^{\frac{1}{2}}$, $P_A(R) = \text{diag}(R_i)$.

これがテータ級数 $\Theta(g)$ のフーリエ係数で、これについて調べるのが我々の目的です。特に $r=2$ のとき、Eisenstein series のフーリエ係数はガウス和を係数とするデリクレ級数になるので、 $a(R)$ はその留数になっています。

$a(R)$ に関する局所的情報は次のようにして得られます。

④(7)に対応する $\tilde{G}_A$ の保型表現は、Jacquet-Langlands 理論と同様にして、各素点 v に対応する $\tilde{G}_v$ の例外表現とよばれる表現のある種のテンサ-積で表わすことが出来ます。 $\tilde{G}_v$ の例外表現の Whittaker model は、 $\tilde{G}_v$ の主系列表現の intertwining 作用素を使って調べる事が出来ます。もし、Whittaker model が一意的であれば、 $a(h)$ は局所的な情報からあて決まってしまう。 $r=n$ のときは実際そうなのですが、 $r < n$ のときは、部分的な情報しか得られません。

各素点 v に対し、 $\tilde{G}_A^{(v)}$ を $\tilde{G}_A \rightarrow G_A \rightarrow G_v$ の核とし、 $\tilde{G}_v$ を $\tilde{G}_A$ の部分群と見なします。 $h^{(v)} \in \tilde{G}_A^{(v)} \cap \tilde{H}_A$ を固定し、

$$h_v \mapsto a(h_v h^{(v)}) \quad (h_v \in \tilde{H}_v)$$

をあらためて、 $a_v(h_v)$ と書くと、これは次を満たします。

$$A1) \quad a_v(h_v h) = a(h_v), \quad h \in \tilde{H}_v \cap K_v^*$$

$$A2) \quad a_v(S_v(\text{diag } \pi^{f_i})) = 0$$

ここで、 $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$ であり、 r は

$$f_i - i \not\equiv f_j - j \pmod{n} \quad (i \neq j) \text{ であり。}$$

$$A3) \quad a_v(S_v(\text{diag } \pi^{f_i + n \ell_i})) = \mu(\text{diag } \pi^{\ell_i}) a_v(S_v(\text{diag } \pi^{f_i}))$$

ここで π は K_v の一乗化元とします。

$f = (f_i)$ に対し、 $\{1, \dots, r\}$ の置換群 W を

$$w[f] = w(f - (1, \dots, r)) + (1, \dots, r),$$

$$w(f) = (f_{w^{-1}(1)}, f_{w^{-1}(2)}, \dots, f_{w^{-1}(r)})$$

で作用させ、さ \$S\$ に

$$\tilde{w}[f] = w[f] + \sum_{\ell} \underbrace{(n, n, \dots, n, 0, \dots, 0)}_{\ell \text{ 回}}$$

(ここで \$\ell\$ は \$w^{-1}(\ell) > w^{-1}(\ell+1)\$ を満たす)

とおきます。

A4) \$f\$ が \$0 < f_i - i - (f_j - j) < n\$ (\$i < j\$) を満たすとき

$$\alpha_n(s_n \pi^{\tilde{w}[f]}) = q^{\tau_0(w)} u(w, f) \tau(w, f) \alpha_n(s_n \pi^f)$$

$$= \text{"} \tau_0(w) = \sum_{\ell} \ell(r - \ell) \text{ (} w^{-1}(\ell) > w^{-1}(\ell+1) \text{)} \quad q = |\pi|^{-1}$$

\$u(w, f) = \pm 1\$, \$\tau(w, f)\$ は ガウス和で書き表わせて

$$|\tau(w, f)| = q^{-\frac{1}{2} \ell(w)}, \quad \ell(w) \text{ は } w \in W \text{ の長さ.}$$

4. Rankin-Selberg zeta 関数

以下、\$\oplus, W, a\$ に \$r\$ をつけて \$\oplus_r, W_r, a_r\$ と書きます。

\$1 \leq t < r \leq n\$ とし、\$h_{r-t} \in H_{r-t, A}\$ とします。

$$I(s, W_r, W_t; h_{r-t}) = \int_{N_{t, A} \backslash G_{t, A}} W_r(s_A \begin{bmatrix} g_t & \\ & h_{r-t} \end{bmatrix}) \overline{W}_t(g_t) |\det g_t|_A^{s - \frac{r-t}{2}} dg_t$$

という積分を考えます。但し \$s \in \mathbb{C}\$, \$h_{r-t}\$ の局所成分は A2)

の条件を満たさないとしします。

まず W_r, W_+ が右 K_A^* -invariant であるにより、これは a_r, a_+ の $H_{t,A}$ 上の積分になり、上記の A1), A2), A3), A4) を使ってかなりの計算が出来ます。特に $r=n$ のときは、オイラー積をもつことが分かります。 h_{r-t} の局所成分は $\pi^{f_{r-t}}$ の形であると仮定しますと、 f_{r-t} は有限個の素点を除いて $(0, \dots, 0)$ になります。さて、 f_{r-t} を $(t+1, t+2, \dots, r) + (m_1, m_2, \dots, m_r)$ とおき、 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_t$ を各 λ_j が 1 と $n-1$ の間で、 $m_1 + \lambda_j$ は m_ℓ ($\ell=2, \dots, r-t$) に mod. n で合同でないとし、ます。このような $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ は $\binom{n-r+t}{t}$ 個あり、よって特に $r=n$ のときは唯一つです。 f_t を $(m_1 + \lambda_1 + 1, m_1 + \lambda_2 + 2, \dots, m_1 + \lambda_t + t)$ とし、 π^{f_t} を局所成分にもつ $H_{t,A}$ の元を h_+ とおきます。 h_+ は $H_{t,A} \cap K_A^*$ を除いて h_{n-t} によって一意的に決まります。

定理 1

$$I(s, W_n, W_+; h_{n-t}) = a_n(s_A \begin{bmatrix} h_+ \\ h_{n-t} \end{bmatrix}) \bar{a}_+(s_A(h_+)) |\det h_t|_A^s \\ \times \mu_A(h_{n-t}) |\det h_{n-t}|_A^{-\frac{t}{2}} \xi_R(ns - \frac{n+t}{2} + 1) \cdots \xi_R(ns - \frac{n+t}{2} + t)$$

ここで $\xi_R(s)$ は $\mathbb{R}$ のデデキントゼータ関数。

$r < n$ のとき、 h_+ はたくさんあるので $a_n(s_A \begin{bmatrix} h_+ \\ h_{n-t} \end{bmatrix}) \bar{a}_+(s_A(h_+)) |\det h_t|_A^s$ の部分が、対応するデリクレ級数になります。そのデリクレ級数はオイラー積を持ちませんが、非常

に意味のあるものです。

さて Rankin-Selberg の基本的な技巧により

$$I(s, W_r, W_\pi; R_{r-t}) \\ = \int_{G_{t, \mathbb{R}} \backslash G_{t, A}} \sum_{\gamma \in N_\pi^* \backslash G_\pi^*} W_r \left(\begin{bmatrix} \gamma & & \\ & 1_{r-t} & \\ & & s_A \begin{bmatrix} g_t & \\ & R_{r-t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) \bar{\Theta}_t(s_A(g_t)) |\det g_t|_A^{s - \frac{r-t}{2}} dg_t$$

と変形することが出来ます。ここで $r-t=2$ と仮定します。

$$\int_{n_i \in \mathbb{R}A/\mathbb{R}} \Theta_r(s_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & n_1 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & n_{r-1} \\ & & 1 \end{bmatrix} g) \bar{e}_t(n_{r-1}) dn_1 \dots dn_{r-1}$$

を展開しますと、上記積分の第一の部分が表われますが、 Θ_r が尖点形式でないため、その他の部分がいくつか出て来ます。

特に

$$\int_{\substack{n'_1 \\ n'_2} \in \mathbb{R}A/\mathbb{R}} \Theta_r(s_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & n_1 & n_1' \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & n_{r-1} & n_{r-1}' \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} g) \bar{e}_t(n_{r-1}) dn_1 \dots dn_{r-1} dn'_1 \dots dn'_{r-2}$$

という項が表われますが、これは、 Θ_{r-2} と W_2 を使って表わすことの出来る関数です。

Θ_r の保型性を使って、上記の展開のもう一つの表示が得られます。これが Jacquet-Piatetski-Shapiro-Shalika の論点の核心です。このあと、リーマンゼータの関数等式の証明の手法

を使うわけですが、計算は長くなります。方針はそうなのですが、実際はもう少し複雑です。 $\gamma=4$ のときの結果は、

定理 2 $I(s, W_4, W_2; h_2)$ は $\operatorname{Re}(s) > 1 - \frac{1}{n}$ のとき絶対収束し、全 s -平面に解析接続され、ある関数等式をもつ。特に、 $s = \frac{1}{n}$ で -1 位の極をもち、その留数は

$$-2 \|\vartheta_2\|^2 (\log q_0)^{-1} W_2(S_A(h_2)) |\det h_2|_A^{-1+\frac{1}{n}}$$

に等しい。 $q_0 > 1$ は $\{|x|_A^n : x \in \mathbb{R}_A^n\}$ の生成元。

さて、 $n = \gamma = 4$ として、定理 1 と定理 2 を比較してみましょう。定理 1 より、 $s = \frac{1}{4}$ での留数は、

$$a_4(s_A \begin{bmatrix} h'_2 & \\ & h_2 \end{bmatrix}) \bar{a}_2(s_A(h'_2)) |\det h'_2|_A^{\frac{1}{4}} \mu_A(h_2) |\det h_2|_A^{-1}$$

× 定数

定理 3

$$a_4(s_A \begin{bmatrix} h'_2 & \\ & h_2 \end{bmatrix}) \bar{a}_2(s_A(h'_2)) |\det h'_2|_A^{\frac{1}{4}}$$

$$= (\text{定数}) a_2(s_A(h_2)) |\det h_2|_A^{\frac{1}{4}}$$

ここで、 $a_4(s_A \begin{bmatrix} h'_2 & \\ & h_2 \end{bmatrix})$ は局所情報から決まって、ガウス和で表わされるもので、 a_2 のある関係が得られます。これが局所的なものから得られるのは容易に分かります。

参考文献

Bump, Hoffstein, On Shimura's correspondence,
to appear in Duke Math. J.

Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika, Automorphic forms on
 $GL(3)$, Annals of Math. 109 (1979), 169-258

Kazhdan, Patterson, Metaplectic forms, Publ. Math.
IHES, 59 (1984), 35-142.