

IX 高エネルギー中性子散乱と Condensate

阪大工 一 柳 正 和

(8月1日受理)

§ 1 序

液体 He^4 での高エネルギー中性子散乱の研究は、 He^4 atom の運動量分布の知識を得る目的で盛んに行なわれるようになった。今、momentum transfer を $\hbar k$, energy transfer を $\hbar \omega$ とすると、中性子散乱の resolution は $1/k$ 程度となる。粒子間距離を λ_{int} として、 $\lambda_{\text{int}} > 1/k$ なる高エネルギー中性子散乱では Miller たち⁽¹⁾ や Hohenberg たち⁽²⁾ が論じたように散乱は独立粒子モデルで扱ってよい (Impulse Approx. $\equiv$ IA)。このような k にたいしては構造因子 $S(k) \simeq 1$ である。

散乱断面積 $S(k, \omega)$ は、IA では

$$S(k, \omega) = n_0 \delta(\omega - \omega_0) + \sum_{p \neq 0} n_p \delta(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar^2}{m} p \cdot k), \quad (1)$$
$$\omega_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

となる。 n_p は He^4 atom の運動量分布関係である。液体 He^4 での粒子間の相互作用をとり入れると、一番簡単な近似で、第一項は condensate にあった粒子が中性子によりたゞきだされそれが depletion の粒子と衝突することで巾が決まる。第二項の方は Doppler shift により巾が決まるとしてよい。今、それぞれの巾を $\Delta \omega_0, \Delta \omega$ とすると

$$\Delta \omega_0 \sim \frac{\hbar k}{m} n \sigma, \quad \Delta \omega \sim \frac{k P_{\text{rot}}}{m} \sim 5 \Delta \omega_0. \quad (2)$$

程度となる。但し、 σ は $\text{He} - \text{He}$ 散乱断面積、 P_{rot} は roton min の momentum である。したがって condensate の部分の方がより鋭い peak となっていることが予測される。

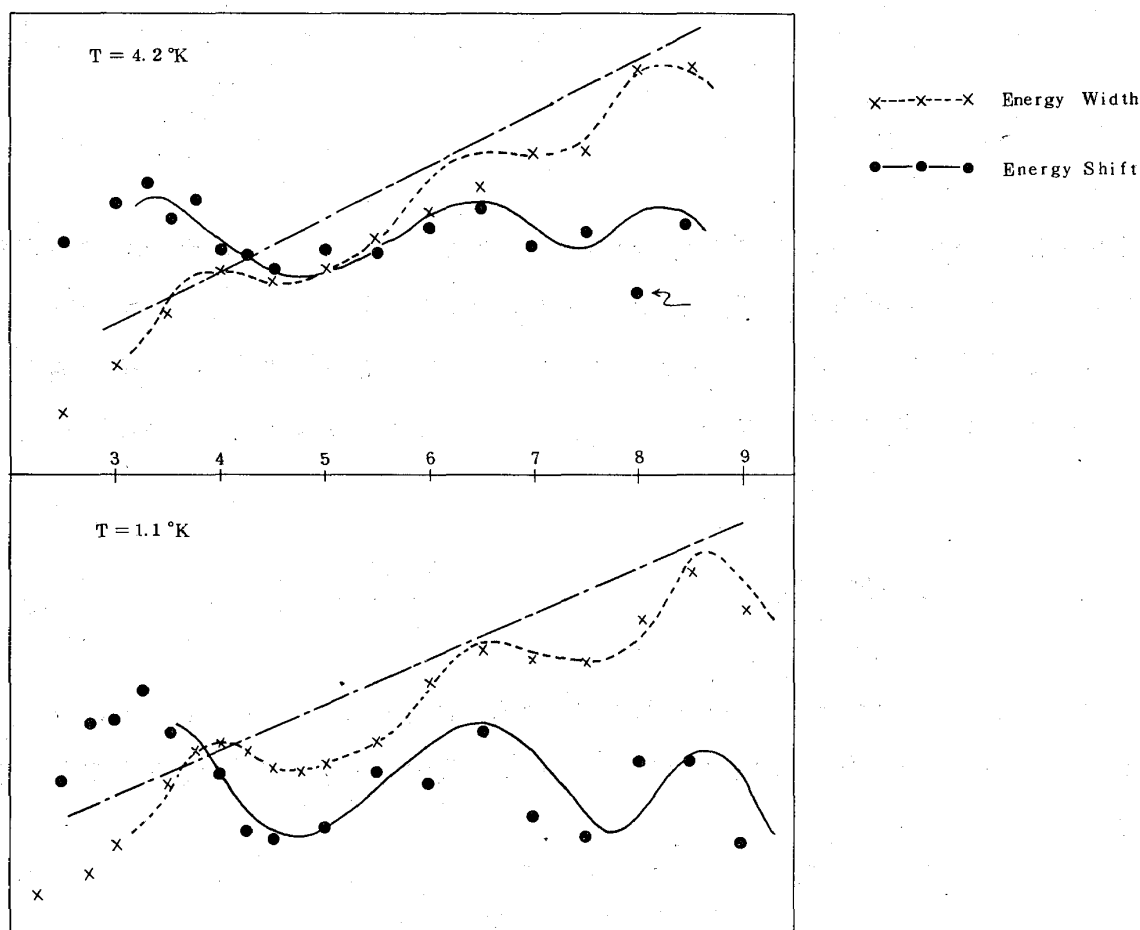
§ 2 実験結果

(A) Cowley-Woods の実験⁽³⁾

Cowley と Woods の実験は $k \sim 9 \text{ \AA}^{-1}$ 程度までのものであり, § 1 で述べた IA の有効な範囲には達していない。したがって, Cowley たちの実験結果から condensate peak を得ることは困難である。この実験は, しかしながら次のような注目すべきことを提示している。

- ① 散乱 peak の位置は ω_0 より小さく, しかも k とともに振動する。このようすは HeI でも本質的に同じでつる。
- ② エネルギー巾の方も, k の変化にともなって振動する。
- ③ $S(k, \omega)$ の ω 変化は HeII の方がより鋭くなり Gauss 型からのずれが大きくなる。

Fig. 1 に示すように, peak の位置とエネルギー巾の変化は強い相関を示している。



第 1 図

(B) Harling の実験⁽⁴⁾

Harling は momentum transfer が $20.3 \text{ \AA}^{-1}$ までの散乱実験を行った。このような大きさの k に対して、はたして IA が有効かどうかはまだ確定的でない。実際、Sears⁽⁵⁾ の解析では $k \sim 20 \text{ \AA}^{-1}$ としても IA からのずれは 20% 位あり、IA の結果をもとにして n_0 の estimation を行っても正確さには限度がある。この点を考慮に入れて、Harling は Puff-Tenn 理論により $n_0 = (8.8 \pm 1.3)\%$ を得た。この他に、彼は次の結果を得た：

- ① $k \gtrsim 9 \text{ \AA}^{-1}$ にたいして、peak の位置は ω_0 であるが、正確には 1% 低い方にずれていること (Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4)
- ② エネルギー巾は Doppler shift だけでは十分に説明できない。(Fig. 5)

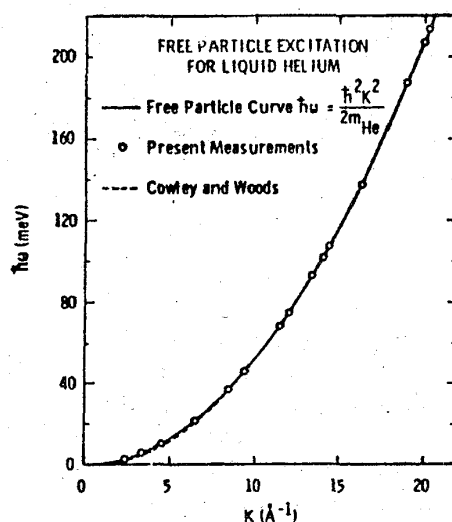


FIG.2. Free-particle excitation curve for ^4He . Regions investigated in previous studies by Cowley and Woods (Ref. 8) and in the present work are indicated.

第2図

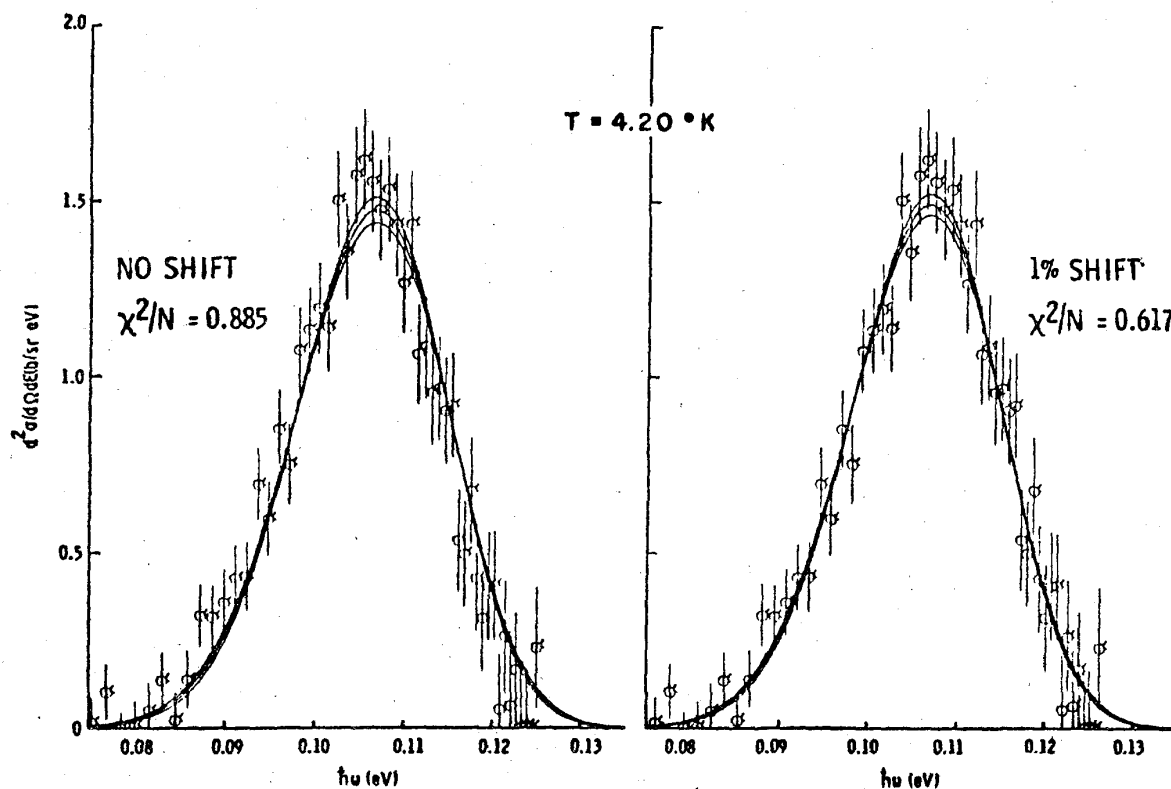


FIG.3. Least-squares fits of one-parameter PT theory to a scattering peak at 4.20 °K. Data in the left-hand part of figure have been shifted toward higher $h\nu$ by $\sim 1\%$. Values obtained for the fitting parameter, K/N , are 14.57 ± 0.77 and 14.22 ± 0.64 °K, respectively, for the unshifted and shifted data. The initial energy $E_1 = 171.5$ meV, $\Theta = 154.3^\circ$, and κ at the peak centroid is $14.3 \text{ \AA}^{-1}$.

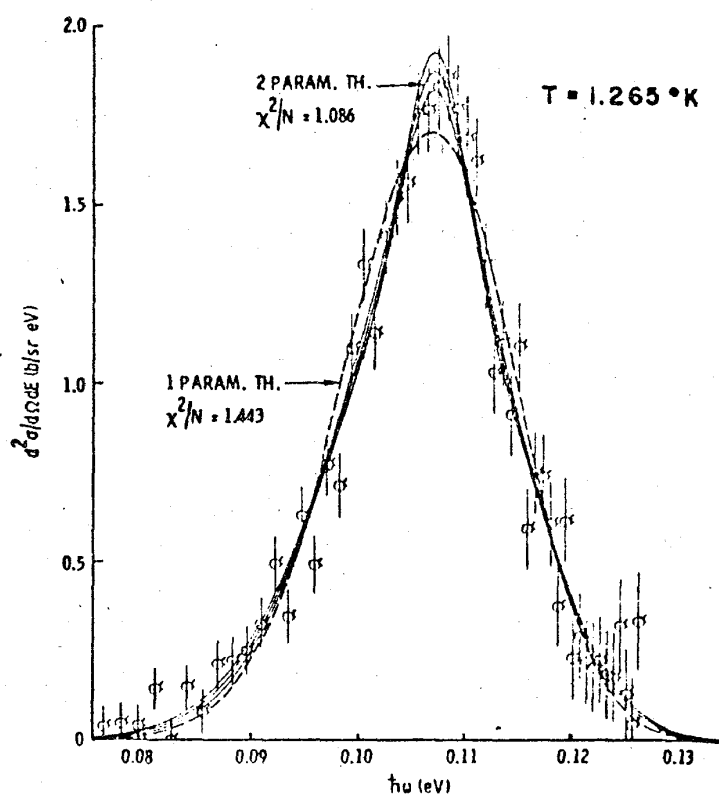


FIG. 4. Results of least-squares fitting the two-parameter and the one-parameter PT theory to neutron scattering data for liquid helium at 1.265 °K. Values obtained for the fitting parameters are $\rho_0/\rho = (9.4 \pm 2.1)\%$, $K/N = 13.9 \pm 0.8^\circ\text{K}$ for the two-parameter theory and $K/N = 12.7 \pm 0.7^\circ\text{K}$ for the one-parameter theory. The data have been shifted to higher $\hbar\omega$ by 1%.

第 4 図

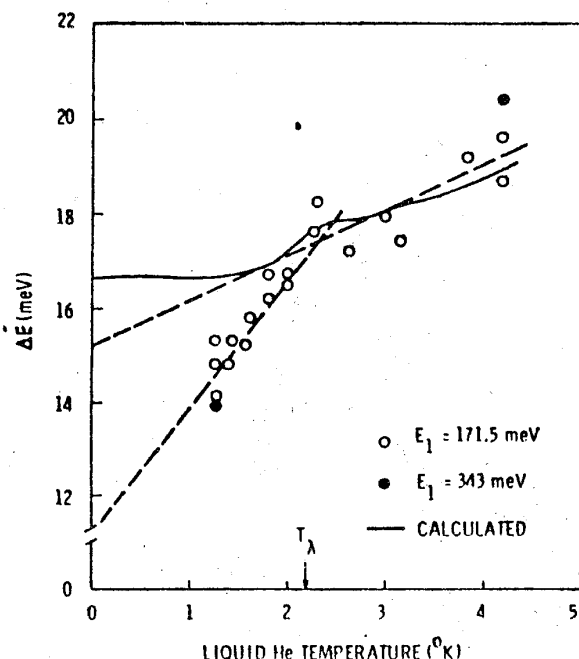


FIG. 5. Full width at half-maximum versus temperature for the neutron scattering peaks $\Theta = 154.3^\circ$. Hollow circles are for $E_1 = 171.5$ meV experiments, solid circles represent energy widths for $E_1 = 343$ meV which have been adjusted for the higher κ used by dividing the measured widths by $\sqrt{2}$. This figure also shows the temperature dependence of the widths which have been computed from Eq. (4).

第 5 図

§ 3 理 論

(I) Jackson⁽⁶⁾, $T = 0^\circ \text{K}$

Jackson は Feynman 型の準粒子を k の大きいところでも仮定し $T = 0^\circ \text{K}$ の $S(k, \omega)$ の形を self-consistent Born approx. で求めた。すなわち density fluctuation ρ_k を

$$\rho_k = [NS(k)]^{1/2} (a_k^* + a_{-k}) \quad (3)$$

とし quasi-particle 間の相互作用を決定し  までの過程を self-consistent に扱い, $S(k, \omega)$ を求めた。得られた $S(k, \omega)$ は次の諸特徴をもつ: $k \gg 1$ として

- ① $S(k, \omega)$ のピークは自由粒子のエネルギーと一致する。
- ② エネルギー巾は k に比例し, ピークの高さは k^{-1} に比例する。
- ③ ω の関数としての $S(k, \omega)$ は Lorentian よりも鋭いピークを示す。

これらの点は、Hohenberg たちの予想をある程度基礎づけるものであるが、一方では (1) の第一項を Gauss 型で整理することは少し疑問であることを示している。

(II) Sears⁽⁵⁾, $T \neq 0$ °K

Sears は Gram-Charlier の級数展開を用いて $S(k, \omega)$ の形を決めることを試みた。この方法では $S(k, \omega)$ のモーメントを計算することが必要となる；

$$S_m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^m S(k, \omega) d\omega \quad (4)$$

として

$$\varepsilon(k)_n = \frac{2}{n!} \sum_{m=0}^n a_{nm} \frac{S_m(k)}{(2\alpha)^m} \quad (5)$$

と定義する。こおとき、 $S(k, \omega)$ は次のように展開される。

$$S(k, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} \exp\left\{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\alpha}\right)^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(k) H_n\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\alpha}\right) \quad (6)$$

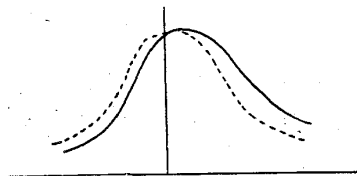
ただし、 $\alpha = \left\{ \frac{1}{2} S_2(k) \right\}^{1/2}$ であり、 $H_n(x) = \sum_{m=0}^n a_{nm} x^m$ から係数 a_{nm} を決定する。

Sears は $m=6$ まで計算し、 $k \rightarrow \infty$ では $S(k, \omega)$ は I A の計算が有効であることがわかる。⁽⁷⁾ Sears は、第二論文で温度と interference の効果を論じ、 $S(k, \omega)$ は $T < T_\lambda$ では $T > T_\lambda$ のより鋭いピークとなることを示すと同時に、ピークの位置は free-particle energy より 1% 位ずれることを示した。Harling⁽⁴⁾ は彼の実験の解析にあつて、この点を重視した。

この方法では $m=6$ 以上を計算することは困難であり、 $m=4$ 以上は物理的にも理解しにくい量を含むなどの難点がある。純数学的には、 m を大きくすることで精度が必ずしもよくなるものではないことも分っている。

エネルギー巾の k -dependence は求められているが、 n_0 を知る方法にはならない。

① $n=4$ までとすると $S(k, \omega)$ は asymmetric となる。



(Ⅲ) Puff-Tenn⁽⁸⁾, $T \neq 0$ °K

Hohenberg たちの理論を発展させて, n_0 の estimation を最初に試みたのが Puff たちである。彼らは I A での δ -関数の巾を決めるのに, 次の三つの sum rule を用いた;

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} S(k, \omega) = 1 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega S(k, \omega) = \omega_0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 S(k, \omega) \cong \omega_0 \left[\omega_0^2 + 4 \omega_0 \frac{\langle K \cdot E \rangle}{N} \right] \quad (9)$$

$\frac{\langle K \cdot E \rangle}{N}$ は一粒子当りの運動エネルギーの平均値である。Puff たちは大きな k にたいして $S(k, \omega)$ を次のように二個の Gauss 分布と仮定した。

$$S(k, \omega) = 2 \frac{n_0}{n} \sqrt{\frac{\pi}{r_1(k)}} \left\{ e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{r_1}} - e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{r_1}} \right\} \\ + 2 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right) \sqrt{\frac{\pi}{r_2(k)}} \left\{ e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{r_2}} - e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{r_2}} \right\} \quad (10)$$

ただし

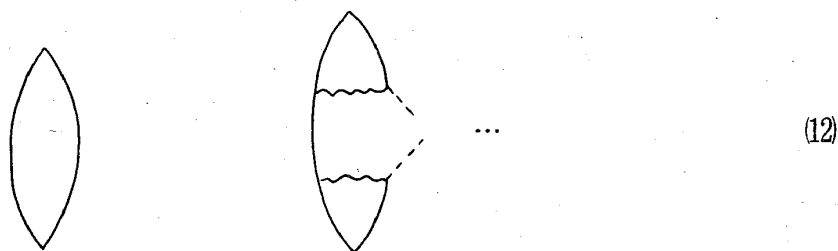
$$r_1(k) = \omega_0 \frac{1}{2 \ell_n 2} \frac{(n\sigma)^2}{m},$$

$$r_2(k) = \left[\frac{8}{3} \frac{\langle K \cdot E \rangle}{N} - \frac{n_0}{n} \frac{1}{2 \ell_n 2} \frac{(n\sigma)^2}{m} \right] \omega_0 \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)^{-1}$$

Puff たちは (10) 式を用いて Harling のデーターを解析し, $n_0/n = 0.06 \pm 0.03$, $\frac{\langle K \cdot E \rangle}{N} = 13.5$ °K を得た。この理論で, condensate peak の巾とその他の部分の巾を決める機構が異なるとしていることは Bogoliubov に従って $a_0 = a_0^* = \text{const.}$ とした事に対応する。すなわち, condensate peak の巾は

(11)

で決まり、その部分の巾は



で決まることになる。

(IV) Kerr-Pathak-Singwi⁽⁹⁾, $P \neq 0$ K

$S(k, \omega)$ は density response function $\chi(k, \omega)$ で書けることに注意し、Kerr たちは mean field theory の立場で高エネルギー中性子散乱を論じた。今、 $\psi(k)$ を effective potential とすると

$$\chi(k, \omega) = \frac{\chi_s(k, \omega)}{1 - \psi(k) \chi_s(k, \omega)} \quad (13)$$

と仮定する。Kerr たちは k が大きい ($\gtrsim 9 \text{ \AA}^{-1}$) ところでは $\psi(k) = 0$ とし、 $\chi_s(k, \omega)$ をもとめた。

$$-S(k, \omega) \propto \chi_s''(k, \omega) = -\frac{\pi}{\hbar} \sum_p n_p [\pi \Gamma(k)]^{-1/2} \times \left\{ e^{-\frac{(\omega - \omega_{p+k} + \omega_p)^2}{\Gamma(k)}} - e^{-\frac{(\omega + \omega_{p+k} - \omega_p)^2}{\Gamma(k)}} \right\} \quad (14)$$

ここで $\Gamma(k)$ は $\chi(k, \omega)$ に対する三個の sum rules を用いて決める：

$$\frac{3m}{2} \frac{\Gamma(k)}{k^2} + n \psi(k) = \frac{n}{k^2} \int d^3x g(x) (1 - \cos kx) (\hat{k} \cdot \nabla)^2 V(x). \quad (15)$$

$g(k)$ は動径分布、 $V(x)$ は粒子間 potential である。

この理論の特徴は condensate の方もその他の部分の方も 同一の巾をもっている点である。更に(14)式は $S(k, \omega)$ のピークが ω_0 からどのようにずれるかをも示している。彼らは、このピークのズレを具体的に求め実験と比較している。

(V) Gersch et al⁽⁴⁰⁾, IA の補正

Gersch たちは IA の結果の補正を行い, ① condensate peak の巾は $k^{1/2}$ に比例すること。② n_0 は max. 3 % 位であると結論している。

TABLE IV. Values of "false condensate" obtained by using two-parameter model to fit the helium data above T_λ .

Unshifted data		Data shifted 1%	
$T(^{\circ}\text{K})$	$\rho_0/\rho(\%)$	$T(^{\circ}\text{K})$	$\rho_0/\rho(\%)$
4.20	2.38 ± 1.4	4.20	2.45 ± 1.1
3.83	-1.37 ± 2.5	3.83	-2.16 ± 2.3
3.16	2.89 ± 2.8	3.16	4.36 ± 2.2
3.00	5.05 ± 2.5	3.00	3.75 ± 2.2
2.62	5.83 ± 2.2	2.62	5.31 ± 1.8
2.30	4.88 ± 1.7	2.30	5.47 ± 1.5

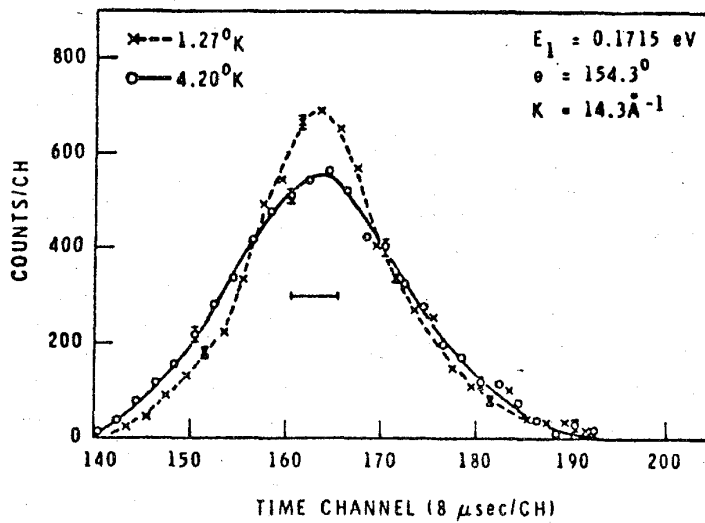


FIG. 6. Raw TOF scattering data for liquid helium at 4.20 and 1.27 °K. Backgrounds have been subtracted and areas under both peaks have been made equal. The instrumental resolution FWHM is represented by the bar near the middle of the peaks.

参 考 文 献

- 1) A. Miller et al, Phys. Rev. 127 ('62), 1452.
- 2) P.C. Hohenberg et al, Phys. Rev. 152 ('66), 198.
- 3) R.A. Cowley et al Can. J. Phys. 49 ('71), 177.
- 4) O.K. Harling Phys. Rev. A3 ('71) 1073.
- 5) V.F. Sears Phys. Rev. 185 ('69), 200, ibid A1 ('70), 1699.
- 6) H.W. Jackson Phys. Rev. 185 ('69), 185.
- 7) G. Sposito Phys. Rev. A3 ('71), 820.
- 8) R.D. Puff et al Phys. Rev. A1 ('70), 125.
- 9) W.C. Kerr et al Phys. Rev. A2 ('70), 2416, ibid A4 ('71), 2413.
- 10) H.A. Gersch Phys. Rev. A4 ('71), 281, ibid A5 ('72), 1547.

X スピンのブラウン運動

(9 月 4 日 受 理)

阪大・教養 植 山 宏

1. 一定の外部磁場と乱雑に揺動している局所磁場の中でのスピンの運動

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}(t) = \gamma \mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} + \gamma \mathbf{H}'(t) \times \mathbf{M} \quad (1)$$

を考える。この問題はスピン緩和のモデルとして既に多くの人によって論じられている⁽¹⁾。久保・橋爪両氏⁽¹⁾は、この問題を Langvin eq. の考えより論じた。即ち、乱雑な力は必然的に散逸を生じるという一般原則より、Bloch 及び関連する Fokker-Planck eq. が導かれている。最近、Langevin eq. の一般論が展開されている⁽²⁾ので、その一つの