

Tate-Šafarevič group と Brauer group との有限性について

名大理 田原賢一

k をある種の global field とする。 A を k 上定義された abelian variety とするとき A の Tate-Šafarevič group の有限性, 次 X を $\text{Spec}(k_0)$ (k_0 は有限体) 上の proper scheme として X の Brauer group の有限性を調べ, 最後 Tate-Šafarevič group と Brauer group との関係を述べる。

§1. Tate-Šafarevič group

以下特に断りがない限り, 基礎体 k は $\mathbb{Q}$ の型の global field, つまり代数的数体 ($\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体) の有限体 k_0 (標数を p とする) 上の 1 変数代数函数体とする。 A を k 上定義された任意次元の abelian variety とする。 A が, k 上定義された代数的多様体 V 上に正則変換群として作用する, つまり k 上定義された

$$V \times A \xrightarrow{\mu} V$$

はる regular map $\mu(v, a) = v \cdot a$ が存在して,

$$\begin{cases} v \cdot e = v & (e \text{ は } A \text{ の 零 元}) \\ (v \cdot a_2) \cdot a_1 = v \cdot (a_2 + a_1) \end{cases}$$

を満す. 更に V が principal homogeneous space for A over k (以下単に phs for A/k と記す) とは,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ 任意の } v, v' \in V \text{ に対して} \\ \quad v \cdot a = v' \\ \quad \text{はる } a \in A \text{ が 唯一つ 定まる。} \\ 2) \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ (v, v') & \rightsquigarrow & a \end{array} \\ \quad \text{はる 1) で 定まる map が } k \text{ 上 定義 された} \\ \quad \text{regular map である。} \end{cases}$$

V, V' が phs for A/k とすると, $V \sim V'$ (k -isomorphic) とは,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V \xrightarrow{f} V' \\ \text{はる } k \text{ 上 定義 された biregular map } f \text{ が 存在して,} \\ \quad f(v \cdot a) = f(v) \cdot a \end{cases}$$

k 上 定義 された 元 v_0 を もつ phs for A/k V は 常々 $V \sim A$ (その同型は $a \rightsquigarrow v_0 \cdot a$ において与えられる). 又任意の phs for A/k は, k の 適当な 有限次 分離 拡大 体 上 定義 される

実をもつ。

V を $\text{plu for } A/k$ とする。 V の k_s (k の separable closure) 上定義される実をも v とし, $\sigma \in \text{Gal}(k_s/k)$ (k_s/k の Galois group) に対して,

$$v^\sigma = v \cdot a_\sigma$$

なる $a_\sigma \in A$ が唯一つ存在し, $(a_\sigma)_{\sigma \in G}$ は 1-cocycle となる。

この対応 $V \rightsquigarrow (a_\sigma)$ によって, 次の同型が得られる:

$$\begin{aligned} H^1(k, A) &= H^1(\text{Gal}(k_s/k), A) \\ &\cong \\ \text{WC}(k, A) &= \{ \text{plu for } A/k \} / \sim \end{aligned}$$

$\Sigma = \Sigma(k)$ を k の places の全体とする。 $\Sigma \ni \mathfrak{f}$ に対して, $k_{\mathfrak{f}}$ を $\mathfrak{f}$ に関する k の完備化とすると, 次の restriction map $r_{\mathfrak{f}}$ が存在する。

$$H^1(k, A) \xrightarrow{r_{\mathfrak{f}}} H^1(k_{\mathfrak{f}}, A)$$

A の Tate-Šafarevič group $\text{III} = \text{III}(A) = \text{III}(k, A)$ を次の exact な列において定義する。

$$0 \longrightarrow \text{III}(A) \longrightarrow H^1(k, A) \xrightarrow{\{r_{\mathfrak{f}}\}_{\mathfrak{f} \in \Sigma}} \prod_{\mathfrak{f} \in \Sigma} H^1(k_{\mathfrak{f}}, A)$$

つまり, $\text{III}(A)$ は everywhere locally rational points をもつ $\text{plu for } A/k$ の class の全体である。これによって次の conjecture がある。

Conjecture 1 (Tate, Šafarevič, Lang and Cassels)

$\text{III}(A)$ は有限群である。

最近, Milne によって 次の結果が得られた。

Th. 1 ([37])

A を, 有限体 k 上定義された non-singular complete alg. curve Y の有理函数体 k 上定義された任意次元の abelian variety とする。このとき, もし A がその有限体 k 上定義されるなら, $\text{III}(A) = \text{III}(k, A)$ は有限群である。

証明は, B を Y の Jacobian variety とすると, Tate ([33]), Oda ([38]) の結果を使って,

$$\text{Ext}_k^1(B, A) ; \text{有限群}$$

$\parallel$

$$\text{III}(k, A) .$$

注1) reductive connected linear alg. groups n に対して, Conjecture 1 が成立する ([4], [36]).

注2) k が代数的閉体上の1変数函数体かつ $n \geq 1$ には, A を任意次元の abelian variety とすると, $\text{III}(A)$ は有限群ではなへ (Ogg [22], Šafarevič [24], Raynaud [23]).

注3) $\text{III}(A)$ が有限値と言っても, 絶対的に有界値
 というのではない。例えは, $\dim_k A = 1$ に限って考
 えても, すべての 1 次元 abelian varieties に対して
 $[\text{III}(A)] < M$ というのではない。Cassels は $[\text{III}(A)]$
 が十分大きい例を示した。つまり 次の命題を与えた。

Prop. 1 ([12])

$p_i (1 \leq i \leq n)$ を相異なる $p_i \equiv -1 \pmod{q}$ なる素数とし,
 $P = \prod_{1 \leq i \leq n} p_i$ とおくと, 次のような整数 d が存在する。

(1) $P \mid d$

(2) $mX^3 + m^{-1}Y^3 + dZ^3 = 0$

(但し, $m \mid P^2$, $m > 1$ を満す)

なるすべての curves が "everywhere locally
 rational points はもつが", globally
 rational point は持たない。

A を次の式で定義される 1-dim. の abelian
 variety とする:

$$x^3 + y^3 + dZ^3 = 0$$

すると, curve $V = V(m)$ ($m \in \mathbb{Q}^*$)

$$mX^3 + m^{-1}Y^3 + dZ^3 = 0$$

は pts 上 $A/\mathbb{Q} \subset$ なる。つまり

$$\begin{array}{ccc} \nabla & \underset{\psi}{\times} & A \\ & & \xrightarrow{\mu} \nabla \\ & & \underset{\psi}{\times} \\ ((X, Y, Z) \times (x, y, z)) & \rightsquigarrow & \mu((X, Y, Z) \times (x, y, z)) = (X_0, Y_0, Z_0) \end{array}$$

と

$$\begin{cases} X_0 = YZx^2 - myzX^2 \\ Y_0 = ZXy^2 - m^{-1}zxY^2 \\ Z_0 = XYz^2 - xyZ^2 \end{cases}$$

とすればよい。このときこの map ϕ が定義される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{\phi} & H^1(\mathbb{Q}, A) \\ \psi & & \downarrow \psi \\ m & \rightsquigarrow & \nabla(m) \end{array}$$

すると, Prop. 1 によって

$$Z(x) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \mid p^2, m > 1\} \xrightarrow{\text{inj}} H^1(\mathbb{Q}, A)$$

$$\text{よって, } 3^2 - 1 = [Z(x)] \leq [\text{III}(A)].$$

$\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ のとき, この conjecture の由来を調べてみよう。それには二つの理由がある。

(1) Selmer's strong conjecture のおけるもの (p. 109 [1])

m を p と素な自然数とし, $A_m = \{a \in A \mid ma = 0\}$ とすれば;

$$0 \longrightarrow A_m \longrightarrow A \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0 \quad (K_5\text{-exact})$$

よって (p. 665, [2])

$$0 \longrightarrow A_{\mathbb{R}}/mA_{\mathbb{R}} \longrightarrow H^1(k, A_m) \longrightarrow H^1(k, A)_m \longrightarrow 0$$

(但し A_k は A の k -rational points のなす群, $H^1(k, A)_m = \text{Ker}(H^1(k, A) \xrightarrow{m} H^1(k, A))$)

Selmer group S_m を次の exact な列で定義する.

$$0 \longrightarrow A_k/mA_k \longrightarrow S_m \longrightarrow \text{III}(A)_m \longrightarrow 0$$

すると, S_m は有限群 (p.266, [15]), 従って $\text{III}(A)_m = \text{III}(A) \cap H^1(k, A)_m$ も有限群である. 特に $m = \ell^l$ ($\ell \neq p$ なる素数) とすれば,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_k/\ell^{l+1}A_k & \longrightarrow & S_{\ell^{l+1}} & \longrightarrow & \text{III}(A)_{\ell^{l+1}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_k/\ell A_k & \longrightarrow & S_\ell & \longrightarrow & \text{III}(A)_\ell \longrightarrow 0 \end{array}$$

ここで,

$$\begin{cases} S^{(l)} = \text{Im}(S_{\ell^{l+1}} \longrightarrow S_\ell), & M = \text{Im}(A_k/\ell A_k \longrightarrow S_\ell) \\ \nu(\ell^l) = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} S^{(l)}, & g = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} M \end{cases}$$

とおけば,

$$\begin{cases} M \subset \cdots \subset S^{(l)} \subset S^{(l-1)} \subset \cdots \subset S^{(0)} = S_\ell \\ \nu(\ell^l) \geq g \\ \nu(\ell^{l-1}) - \nu(\ell^l), \nu(\ell) - \nu(\ell^l) : \text{共に偶数 (p.264, [8])} \end{cases}$$

これに関して, 次の Selmer's strong conjecture がある.

Conjecture 2 (Selmer)

十分大なる l に対して, $\nu(\ell^l) = g$

(これは $\sum_{l=0}^{\infty} S^{(l)} = M$ と同値 (p.264, [8]))

Conjecture 1 は Conjecture 2 の自然な拡張である。

(2) Tamagawa Number の類似からくるもの ([14])

$\wp \in \mathbb{Z}$ に対して ($\mathbb{K}$ は $\wp$ 上の代数的数体とする)

$$d_{\wp}^+ x = \begin{cases} \wp\text{-adic integers の } 1 \text{ と なる ように 正規化 された} \\ \text{加法的 Haar measure} & (\wp; \text{non-archimedien}) \\ \text{普通の Lebesgue measure} & (\wp; \text{real}) \\ 2 \times (\text{普通の } 2\text{-dim. の Lebesgue measure}) & (\wp; \text{complex}) \end{cases}$$

と定義し, $x(x)$ を A の generic point x の座標の一つとし,

$\omega = f(x) dx(x)$ を $\mathbb{K}$ 上定義された A の $\mathcal{O}_1$ 種微分とする。

(例えば, A を $y^2 = x^3 - g_2x - g_3$ で定義されるものとするれば,

$\omega = y^{-1} dx$ と取れる。) ω は $\mathbb{K}^*$ の元の定数倍を除いて

唯一つ定まる。又 ω は $A_{\wp}$ 上の Haar measure $d_{\wp}^+ x$ の正規化を定義する:

$$\mu_{\wp}(\omega, E) = \int_{a \in E} |f(a)|_{\wp} d_{\wp}^+ x(a)$$

(但し, E は $A_{\wp}$ の measurable subset, $|\cdot|_{\wp}$ は普通の $\wp$ 上の正規化された $\wp$ -adic valuation, つまり

$$|\cdot|_{\wp} = \begin{cases} \pi \text{ を } \mathbb{K}_{\wp} \text{ の素元とすると, } |\pi|_{\wp} = (\text{剰余体の位数})^{-1} & (\wp; \text{non-archim.}) \\ \text{普通の絶対値} & (\wp; \text{archim.}) \end{cases}$$

$\mu_f(\omega, E)$ は $\omega = f(x)dx(x)$ の函数 f の選び方によらず,
 Haar measure となる。つまり A_k の transformation に対して invariant である。linear alg. group に対したる結果については, Weil [35] を見よ。

ω' を k 上定義され A 上の他の ω 1 種微分 とすれば,

$$\begin{cases} \omega' = d\omega & (d \in k^*) \\ \mu_f(\omega', E) = |d|_f \mu_f(\omega, E) \end{cases}$$

特に,

$$\prod_f \frac{\mu_f(\omega', A_{k_f})}{\mu_f(\omega, A_{k_f})} = \prod_f |d|_f = 1$$

よって, もし $T(A)^{-1} = \prod_f \mu_f(\omega, A_{k_f})$ が収束すれば, それは ω の選び方によらず, A と k のみによって定まる。(A が complex multiplication をもっているときには, [2], [3] で考察されている。) 　そして, A が f で good reduction をもてば (実際ほとんどすべての f でそうであるが)

$$\mu_f(\omega, A_{k_f}) = \frac{N_f}{\text{Norm } f} = \frac{\# \{A \bmod f \text{ a rational point}\}}{\text{absolute Norm } f}$$

更に, $k = \mathbb{Q}$ で, $f = p$ のときには

$$\mu_f(\omega, A_{k_f}) = \frac{N_f}{p}$$

一方, Lang ([20]) は有限体 k_0 上の isogenous alg.

group は同じ個数の k_0 -rational points をもつことを示した。 $A^{(1)}, A^{(2)}$ が isogenous であり, $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ を k 上定義され $A^{(1)}, A^{(2)}$ の 1 種微分とする。このとき, $A^{(1)}$ が good reduction をもてば, $A^{(2)}$ もそうであり (II-5, [27]),

$$\mu_g(\omega^{(1)}, A_{k_g}^{(1)}) = \mu_g(\omega^{(2)}, A_{k_g}^{(2)})$$

よって,

$$T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \prod \frac{\mu_g(\omega^{(2)}, A_{k_g}^{(2)})}{\mu_g(\omega^{(1)}, A_{k_g}^{(1)})}$$

が well-defined であり, $T(A^{(i)})$ ($i=1,2$) が定義されることは,

$$T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \frac{T(A^{(1)})}{T(A^{(2)})}$$

$A^{(1)} \xrightarrow{\nu_1} A^{(2)}$ が isogeny であるとき, $\text{Ker } \nu_1 \stackrel{\Delta}{=} \Delta^{(1)}$, $H'(k, A^{(1)})_{\nu_1} \stackrel{\Delta}{=} \text{Ker}(H'(k, A^{(1)}) \rightarrow H'(k, A^{(2)}))$, $\text{III}_{\nu_1}^{(1)} \stackrel{\Delta}{=} \text{III}(A^{(1)}) \cap H'(k, A^{(1)})_{\nu_1}$ とすれば,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_k^{(2)}/\nu_1 A_k^{(1)} & \longrightarrow & H'(k, \Delta^{(1)}) & \longrightarrow & H'(k, A^{(1)})_{\nu_1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \cup & & \cup \\ 0 & \longrightarrow & A_k^{(2)}/\nu_1 A_k^{(1)} & \longrightarrow & S^{(\nu_1)} & \longrightarrow & \text{III}_{\nu_1}^{(1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

以上の記号の下に, 次のことが得られる (p.184~5, [14]).

Prop 2

$$\checkmark \quad A^{(1)} \xrightarrow{\nu_1} A^{(2)}, \quad A^{(2)} \xrightarrow{\nu_2} A^{(1)}$$

が dual isogenies とすると,

$$T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \frac{|S^{(\nu_2)}| |(A_k^{(2)})_{\nu_2}|}{|S^{(\nu_2)}| |(A_k^{(1)})_{\nu_1}|}$$

更に, $\text{III}^{(1)}$ (ある n は $\text{III}^{(2)}$) が有限なら

$$\begin{cases} \text{III}^{(2)} \text{ (ある } n \text{ は } \text{III}^{(1)}) \text{ も有限で} \\ T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \frac{|A_k^{(2)}/\mu_1 A_k^{(1)}| |(A_k^{(2)})_{\nu_2}| |\text{III}^{(1)}|}{|A_k^{(1)}/\mu_2 A_k^{(2)}| |(A_k^{(1)})_{\nu_1}| |\text{III}^{(2)}|} \end{cases}$$

更に, $A_k^{(1)}$ (ある n は $A_k^{(2)}$) が有限なら

$$\begin{cases} A_k^{(2)} \text{ (ある } n \text{ は } A_k^{(1)}) \text{ も有限で} \\ T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \frac{|A_k^{(2)}|^2 |\text{III}^{(1)}|}{|A_k^{(1)}|^2 |\text{III}^{(2)}|} \end{cases}$$

上のことから, Tate-Šafarevič group が有限であることが望ましい。

Tate-Šafarevič group について最も興味ある結果は次のもの。

Th. 2 (Th. 26.1, [15])

A を代数的数体 k 上定義された 1 次の abelian variety とする。 A の Tate-Šafarevič group $\text{III} = \text{III}(kA)$ に次の skew-symmetric pairing ℓ

$$\text{III} \times \text{III} \xrightarrow{\ell} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在して, $\text{Ker } l$ は III の divisible elements の $\mathbb{Q}$ 群 IV と一致する。

Cor. 1

もし III が有限なら, その個数 $[\text{III}]$ は平方。

Cor. 2

$\text{III}(\ell)/\text{IV}(\ell)$ は有限群。

(但し, $\text{III}(\ell), \text{IV}(\ell)$ はそれぞれ III, IV の ℓ -primary parts)

Th. 2 は任意次元の abelian varieties に拡張される。つまり

Th. 2' (Th. 3.2, [30])

A を k 上定義された任意次元の abelian variety とし, A' を A の dual i.e. $A' = \text{Ext}(A, G_m)$ (G_m は k 上の乗法群) とする。 A, A' の Tate-Švaric groups III, III' の ℓ -primary parts $\text{III}(\ell), \text{III}'(\ell)$ ($\ell \neq p$) に bilinear pairing l'

$$\text{III}(\ell) \times \text{III}'(\ell) \xrightarrow{l'} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在して, $\text{Ker } l'$ は $\text{III}(\ell)$ の divisible elements の $\mathbb{Q}$ 群と一致する。

注4) この定理の証明には, Casselsの方法と abstract
is cohomology theory を使用するものとの二つがある。

$p \neq \ell$ なる素数 ℓ に対して, $H^i(k, A; \ell)$ を i -dim
cohomology group $H^i(k, A)$ の ℓ -primary part とし,
 $\text{Ker}^i(k, A; \ell) = \text{Ker} (H^i(k, A; \ell) \rightarrow \prod_{\ell \in \Sigma} H^i(k_\ell, A; \ell))$ と
する。特に $\text{Ker}^1(k, A; \ell) = \text{III}(k, A)(\ell) = \text{III}(\ell)$ 。

M を $G = \text{Gal}(K/k)$ 上の有限加群, M' を M の Cartier
dual i.e. $M' = \text{Hom}(M, G_m)$ とし, locally compact
is abelian group D の Pontryagin character group
を D^* と書けば,

$$H^0(k_\ell, M) \simeq H^2(k_\ell, M')^* \quad (\text{Th. 2.1, [30]})$$

よって, 次の pairing ℓ'' が存在する。

$$\text{Ker}^0(k, A; \ell) \times \text{Ker}^2(k, A'; \ell) \xrightarrow{\ell''} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(但し, $A' = \text{Ext}(A, G_m)$)

又 $H^0(k_\ell, A) \simeq H^1(k_\ell, A')^*$ であるから, 準同型

$$\prod_{\ell \in \Sigma} H^1(k_\ell, A) \xrightarrow{\beta} H^1(k, A')^*$$

が存在する。このとき,

Th. 3 (Th. 3.4, [30])

上の記号の下に, 次のものは同値。

$$(1) \operatorname{Ker}^1(k, A; \mathcal{E}) = \operatorname{III}(\mathcal{E}); \text{有限}$$

$$(2) \begin{cases} \operatorname{Im}(H^0(k, A; \mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}} H^0(k_{\mathfrak{p}}, A; \mathcal{E})) = \operatorname{Ker} \beta \\ \text{pairing } \ell'' \text{ が完全な duality を与える.} \end{cases}$$

Conjecture 1 より弱い次の Conjecture がある。

Conjecture 3 (Tate)

$\operatorname{III}(\mathcal{E})$ は有限群である。

例 (Selmer [26], [27])

A を $x^3 + y^3 - cz^3 = 0$ で定義される 1-dim elliptic curve とすると, $\operatorname{III}(\mathcal{E})$ は有限群である。 ($0 \leq c \leq 500$)

注5) k を代数的閉体上の1変数函数体とし, A を k 上定義された任意次元の abelian variety とすれば, $\operatorname{III}(\mathcal{E}) = (\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}})$ の直積は無限群となる。

§2. Brauer group

次の conjecture がある。

Conjecture 4 (M. Artin)

k_0 を有限体とする。 X を $\operatorname{Spec}(k_0)$ 上の proper scheme とすれば, $\operatorname{Br}(X)$ は有限群である。

(a) $\dim X = 1$ or 2 , Conjecture 4 is true. 実例

Th. 4

X is k_0 -complete alg. curve とすれば,

$$Br(X) = 0$$

この証明は, structure hom. $f: X \rightarrow \text{Spec}(k_0)$ を

対して, $R^i f_* (\mathcal{G}_m) = 0$ ($i \geq 2$) を Leray のスペクトル列

$E_2^{p,q} = H^p(k_0, R^q f_* (\mathcal{G}_m)) \Rightarrow H^*(X, \mathcal{G}_m)$ を適用し, 更に, Lang

の定理 $H^i(k_0, L) = 0$ (L : alg. group/ k) を使って,

$$Br(X) = H^1(X_{\bar{k}}, \mathcal{G}_m) = H^1(k_0, \mathbb{Z}) = 0$$

と帰着させる。

上の証明でも使用するので, $H^i(?, \mathcal{G}_m)$, $Br(?)$ の計算
できるものを表にしておく。

I	(C ₁)-type の体 K (1) 代数的閉体上の1変数函数体 (2) 離散的付値の関に完備な体 K で, その剰余体が代数的閉体 (3) 有限体 K	$H^i(K, \mathcal{G}_m) = 0 \ (i \geq 1)$
II	$K = \mathbb{R}$: 実数体	$Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
III	離散的付値の関に完備な体 K で, その剰余体が有限体	$Br(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

II	代数的数体 K	$0 \rightarrow B_1(K) \rightarrow \sum_i B_1(K_i) \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$
V	X : 代数的体体上定義 $2n$ 元 alg. curve	$Br(X) = 0$
VI	X : 分離的体体上定義 $2n$ 元 proper alg. curve	$Br(X) = 0$
VII	$X = P_2$; 有限体又は分離的体体上の 2 次元 projective space	$Br(P_2) = 0$
VIII	X : 有限体上定義 $2n$ 元 complete alg. curve	$H^1(X, G_m) = 0$ $H^2(X, G_m) = Br(X) = 0$ $H^3(X, G_m) = (\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})^c$ $H^i(X, G_m) = 0 \ (i \geq 4)$
IX	$X = Spec(O_K)$ $(O_K$: 代数的数体 K の整數環) (1) K : purely imaginary $n \geq 3$	$H^1(X, G_m) = 0$ $H^2(X, G_m) = Br(X) = 0$ $H^3(X, G_m) = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ $H^i(X, G_m) = 0 \ (i \geq 4)$
	(2) K : real place n 個 $1 \leq n \leq 3$	$Br(X) = 0$
	(3) $K = \mathbb{Q}$ $n \leq 3$	$Br(X) = 0$

(b) $\dim X = 2$ のとき, ある特別な場合には“大体”

Conjecture 4 は成立する. つまり

Th. 5 ([34])

$X = \begin{cases} K_0 \text{ 上定義された 2次元の abelian variety の} \\ \text{共} n \text{ 個 } K_0 \text{ 上定義された alg. curves の直積} \end{cases}$

このとき,

$$\mathrm{Br}(X)(\text{non } p) = \prod_{\ell \neq p} \mathrm{Br}(X)(\ell) \text{ は有限群}$$

この証明には, 次の結果 (Th. 5.2, [33]) を使用する.

Th. 6

X を K_0 上定義された projective smooth alg. surface とし, $\bar{X} = X \times_{K_0} \bar{K}_0$ ($\bar{K}_0$: K_0 の代数的閉包) が connected とする. このとき, 次のことが成り立つ.

(1) $\mathrm{Br}(X)(\ell)$; 有限 ($\ell \neq p$)

(2) $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \cong H^2(\bar{X}, T_\ell(\mu))^\vee$

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{NS}(X): X \text{ の Néron-Severi group} \\ \text{但し } \mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} \\ T_\ell(\mu): 1 \text{ の } \ell \text{ 乗根の } \ell \text{ 乗群 } \mu \text{ の Tate } \ell\text{-group} \end{array} \right)$$

更に, このどれかが成立すれば”

$\mathrm{Br}(X)(\text{non } p)$; 有限群.

注6) Th.6の記号の下に, Th.2又はTh.2'に対応する結果が成立する(Tate, Th.5.1, [33]).

$$\mathrm{Br}(X)(\mathrm{nonp}) \times \mathrm{Br}(X)(\mathrm{nonp}) \xrightarrow{l^*} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ある skew-symmetric pairing l^* が存在し, $\mathrm{Ker} l^*$ は $\mathrm{Br}(X)(\mathrm{nonp})$ の divisible elements の 769 群と一致する.

§3. Tate-Šafarevič group と Brauer group との関係

今迄 みたように, Tate-Šafarevič group と Brauer group とはほとんど平行に理論が成立する. それらの間には何んらかの関係があるように思われる. それは次の定理で与えられる.

Th.7 (Th.3.1, [33])

$Y = \begin{cases} \mathrm{Spec}(O_K) \text{ の open subset (但し } O_K \text{ ; 代数体の整数環) が} \\ \text{有限体 } k \text{ 上定義された irreducible smooth curve-scheme} \end{cases}$
 $f: X \longrightarrow Y$ を dim 1 の fibre をもつ proper morphism とし, 更に

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ ; dim. 2 の regular scheme} \\ f \text{ の geometric fibre ; connected} \\ f \text{ の generic fibre ; smooth} \end{array} \right)$$

とする. このとき, もし f が section をもてば, 次の exact

な列が得られる。

$$0 \longrightarrow B_r(Y) \longrightarrow B_r(X) \longrightarrow \text{III}^0(k, A) \longrightarrow 0$$

但し, k は Y の有理函数体とし, A は generic fibre の Jacobian variety とする. $Y^{(0)}$ は Y の closed points の集合とするとき, $\text{III}^0(k, A)$ は次の exact な列で定義される。

$$0 \longrightarrow \text{III}^0(k, A) \longrightarrow H^1(k, A) \longrightarrow \prod_{j \in Y^{(0)}} H^1(k_j, A)$$

(勿論 $\text{III}^0(k, A) \supset \text{III}(k, A)$ である。)

この定理の証明には, 次の命題が基本的である。

Prop. 3 (M. Artin)

Y を Th. 7 の如くして, $f: X \longrightarrow Y$ を $\dim 1$ の fibre をもつ proper morphism とし, X を $\dim 2$ の regular scheme とする。このとき,

$$R^0 f_* (G_{m, X}) = 0 \quad (g \geq 2)$$

注7) 特 n k が totally imaginary で

$$Y = \text{Spec}(O_k) \text{ なら}$$

$$\text{III}^0(k, A) = \text{III}(k, A)$$

注8) Y が k_0 上定義され $\bar{k}$ 上 $\text{irred. smooth alg. curve}$

scheme の場合, 特に Y が complete なら

$$\begin{cases} Br(Y) = 0 \\ Br(X) = III^0(k, A) = III(k, A) \end{cases}$$

よって, この場合には, $Br(X)$ が有限群である ことと $III(k, A)$ が有限群である ことは同値である。

参考文献 (更に [15], [19] の巻末の文献表と参照されたい。

- [1] B.J.Birch, Conjectures concerning elliptic curves, Fro. Symposia in Pure Math., VIII (1965), p.106-112.
- [2] B.J.Birch and H.F.F.Swinnerton, Notes on elliptic curves (I), J.reine angew. Math., 212(1963), p.7-25.
- [3] _____, Notes on elliptic curves (II), J. reine angew. Math., 218(1965), p.79-108.
- [4] A.Borel, Some finiteness properties of adèle groups over number fields, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 16(1963), p.5-30.
- [5] J.W.S.Cassels, The rational solutions of the Diophantine equation $Y^2 = X^3 - D$, Acta Math., 82(1950), p.243-273.
- [6] _____, Arithmetic on curves of genus 1 (I), J. reine angew. Math., 202(1959), p.52-99.
- [7] _____, " _____ (II), J. reine angew. Math., 203(1960), p.174-208.

- [8] J.W.S.Cassels, Arithmetic on curves genus 1 (III),
London Math. Soc., 12(1962), p.256-296.
- [9] _____, _____ (IV),
J. reine angew. Math., 211(1962), p.95-112.
- [10] _____, Arithmetic on elliptic curves, Proc. Intern.
Congress Math. Stockholm, 1962, p.234-246.
- [11] _____, Arithmetic on curves of genus 1 (V),
J. London Math. Soc., 38(1963), p.244-248.
- [12] _____, _____ (VI),
J. reine angew. Math., 214(1964), p.65-70.
- [13] _____, _____ (VII),
J. reine angew. Math., 216(1964), p.150-158.
- [14] _____, _____ (VIII),
J. reine angew. Math., 217(1965), p.180-199.
- [15] _____, Diophantine equations with special reference
to elliptic curves, J. London Math. Soc., 41(1966),
p.193-291.
- [16] J.W.S.Cassels and A.Frolich, Algebraic number theory,
1967, Academic Press.
- [17] A.Grothendieck, Fondaments de la Geometrie Algebrique,
Secretariat Math., 11rue Pierre Curie, Paris.

- [18] A.Grothendieck, Le groupe de Brauer, **I, II**, Seminaire Bourbaki, 290(1961) and 297(1965).
- [19] _____, _____, **III**, Seminaire Bourbaki
- [20] S.Lang, Algebraic groups over finite fields, Amer. J. of Math., 78(1956), p.555-563.
- [21] S.Lang and J.Tate, Principal homogeneous spaces over abelian varieties, Amer. J. of Math., 76(1962), p.659-684.
- [22] A.P.Ogg, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. of Math., 76(1962), p.185-212.
- [23] M.Raynaud, Caractéristique d'Euler-Poincare d'un faisceau et cohomologie des varietes abeliennes, Seminaire Bourbaki 287(1964).
- [24] L.R.^vSafarevič^v, Principal homogeneous spaces defined over a function field, Amer. Math. Soc. Trans., 37(1964). p.85-114.
- [25] _____, Algebraic number fields, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm, 1962, p.163-176.
- [26] E.S.Selmer, The diophantine equation $ax^3+by^3+cz^3=0$, Acta Math., 85(1951), p.203-362.
- [27] _____, The diophantine equation $ax^3+by^3+cz^3=0$. Completion of the tables, Acta Math., 82(1951), p.191-197

- [28] J.P.Serre, Cohomologie galoisienne, Springer, 1964.
- [29] ———, Abelian λ -adic representations and elliptic ~~curves~~ curves, W.A.Benjamin, Inc. , 1968.
- [30] J.Tate, Duality theorems in galois cohomology over number fields, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm, 1962, p.288-295.
- [31] ———, Principal homogeneous spaces for abelian varieties, J. reine angew. Math., 209(1962), p.98-99.
- [32] ———, Algebraic cohomology classes, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry, 1964.
- [33] ———, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Seminaire Bourbaki 306(1965).
- [34] ———, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., 2(1966), p.134-144.
- [35] A.Weil, Adeles and algebraic groups, Lecture Notes, Princeton, 1961.
- (追加)
- [36] A.Borel and J.P.Serre, Theoremes de finitude en cohomologie galoisienne, Comm. Math. Helvetice, 39(1964), p.111-164.
- [37] J.S.Milne, Extensions of abelian varieties defined over a finite field, Invent. Math., 5(1968), p.63-84.
- [38] T.Oda, Abelian varieties over a perfect field and Dieudonne modules. Thesis, Harvard University, 1967.