

Lorentz 群と $\mathcal{D}$ -関数について

早大 理工 大豆生田 雅一

§0. Notations

$G = \text{Spin}(n, 1)$ ($\text{SO}_0(n, 1)$ の double covering group $n \geq 2$) とする。 $K \in G$ の極小 compact 部分群とすると $K \cong \text{Spin}(n)$ となる。又 $Q = MAN$, $G = KAN$ を G の極小放物部分群と岩沢分解とする。このとき, $M \cong \text{Spin}(n-1)$ ($n \geq 2$) ($n=2$ のとき, M は G の中心で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型となる。)

$$A = \{ a_t = \exp(tH) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$N \cong \mathbb{R}^{n-1} \cong \{ n_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \}$$

とする。そして $\alpha \in G$ の岩沢分解を

$$\alpha = K(\alpha) a_{\pm \omega} n_{\pm \omega}$$

と書く。又 $\theta \in G$ の K と可換する Cartan involution とする

$$\text{すなわち } \bar{N} = \theta N \quad \bar{n}_\xi = \theta n_\xi \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{と書く。}$$

次に $\hat{K}, \hat{M}$ をそれぞれ K, M の既約ユニタリ表現の同値類全体とすると、これは $\hat{K}$ の highest weights による一意

に決定されるから、 $\hat{K}, \hat{M} \in$ それぞれの *highest weights* の集合と見てよい。 $\lambda \in \hat{K}, \mu \in \hat{M}$ に対してそれぞれ対応する K, M の表現 ε ($\sigma_\lambda, E_\lambda$) (σ_μ, V_μ) 等と書く。

§ 1 non-unitary principal series RU intertwining operators.

1.1) non-unitary principal series.

$\mu \in \hat{M}$ に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\mu$ を次の様に定義する。

$\mathcal{H}_\mu = \varphi : K \rightarrow V_\mu$ summable n 次元線形写像のもの。

$$(i) \quad \varphi(Rm) = \sigma_\mu(m^{-1}) \varphi(R) \quad R \in K, m \in M$$

$$(ii) \quad \int_K \|\varphi(R)\|_{V_\mu}^2 dR < \infty$$

但し、 $\|\cdot\|_{V_\mu}$ は V_μ の norm. dR は K 上の normalized Haar measure

$\lambda \in \hat{K}, s \in \mathbb{C}$ に対して G の $\mathcal{H}_\mu$ 上の連続表現 $\pi_{s,\mu}$ を $x \in G, R \in K, \varphi \in \mathcal{H}_\mu$

$$(\pi_{s,\mu}(x)\varphi)(R) = e^{-(s+p)\log(x^{-1}R)} \varphi(K(x^{-1}R))$$

($i = \pm 1, p = (n-1)/2$ とする。) と定義する。

と定義する。

$\lambda \in \hat{K}$ に対して $\mathcal{H}_\mu(\lambda) \in \pi_{s,\mu}$ による type 1 の K -finite vector の全体とする (= ϕ の S とは異なる。) すると

Frobenius reciprocity theorem 8.4

$$\mathcal{H}_\mu(\Lambda) \subseteq (\Lambda, \mu) E_\Lambda \quad (\text{as } K\text{-modules})$$

== 8.1. (Λ, μ) は τ_Λ の Λ の制限 $\tau_\Lambda|_\Lambda \in \hat{\Lambda}$ 7.3
 $\mathcal{H}_\mu$ の multiplicity と 8.3. この場合は $(\Lambda, \mu) = 0$ or 1 .
 となる。従って

$$\begin{cases} \mathcal{H}_\mu(\Lambda) \subseteq E_\Lambda & \text{if } (\Lambda, \mu) = 1 \\ \mathcal{H}_\mu(\Lambda) = \{0\} & \text{if } (\Lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

となる。 $(\Lambda, \mu) = 1$ のとき

$P_\mu^\Lambda: E_\Lambda \rightarrow V_\mu$ M -module homomorphism となる。
 $P_\mu^\Lambda P_\Lambda^\mu = \text{id}_{V_\mu}$ ($P_\Lambda^\mu = (P_\mu^\Lambda)^*$) となるのは
 4.11 factor を用いて一意に定まる。 $\zeta = \zeta$ isometry.

$$J_\mu^\Lambda: E_\Lambda \rightarrow \mathcal{H}_\mu(\Lambda) \quad \zeta. \quad v \in E_\Lambda, \quad k \in K$$

$$J_\mu^\Lambda(v)(k) = \sqrt{\frac{\dim E_\Lambda}{\dim V_\mu}} P_\mu^\Lambda(\tau_\Lambda(k^{-1})v)$$

より、 ζ は $\zeta = \zeta$ となる。 ζ は K -module
 homomorphism となる。

1.2) Intertwining operators $A_\mu(s)$.

$W \in (G, A)$ に関する Weyl 群とすると、 $W = s_1 \dots s_r$
 ($s_i^2 = 1$) $\mu \in \hat{M}$ と $\omega \mu \in \hat{M}$ である。この関係は
 $\sigma_\omega \mu(m) = \sigma_\mu(\omega^{-1} m \omega) \quad (m \in M)$.

よ, τ 定義する. $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき 有界作用素

$$A_\mu(s) : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_{\omega\mu}$$

を次の式

$$(A_\mu(s)\varphi)(k) = \int_N e^{-(s+\rho)\tau(k\pi)} \varphi(k\omega k(\pi)) d\pi.$$

$$k \in K, \varphi \in \mathcal{H}_\mu.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau \quad d\pi \text{ は } N \text{ の Haar measure } \tau \text{ による} \\ \int_N e^{-2\rho\tau(k\pi)} d\pi = 1 \end{array} \right.$$

と normalize されているものとあつる。

に示すことができる。

命題 1 任意の $\alpha \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}_\mu$ ($\mu \in \hat{M}$) 及び $s \in \mathbb{C}$
 $\operatorname{Re}(s) > 0$ に対して

$$(1) \quad A_\mu(s) \pi_{\mathcal{H}_\mu}(\alpha) \varphi = \pi_{\mathcal{H}_{\omega\mu}}(\alpha) A_\mu(s) \varphi$$

が成立する。さらに等式 (1) は φ が C^∞ -関数のとき α ,

φ を固定すれば s について ($\mathcal{H}_{\omega\mu}$ -値関数として)

① 全体において meromorphic に解析接続するといふことが出来る。

② 各 $\lambda \in \hat{K}$, $\mu \in \hat{M}$, $\chi(\mu) = 1$ に対して meromorphic 関数 $s \rightarrow C_\mu(s; \lambda)$ が存在して

$$(2) \quad A_\mu(s) f_\mu^\lambda = C_\mu(s; \lambda) f_{\omega\mu}^\lambda$$

とある。すなわち $A_\mu(s) : \mathcal{H}_\mu(\lambda) \rightarrow \mathcal{H}_{\omega\mu}(\lambda)$ linear mapping と可視される。

定義 $\lambda \in \hat{K}$, $\mu \in \hat{M}$ ($\lambda, \mu = 1$ のとき)
関数 $s \rightarrow c_\mu(s; \lambda) \in \mathbb{C}$, μ に関する $\mathbb{C}$ -関数と呼
ぶ。

§2. $c_\mu(s; \lambda)$ の関数等式

$B \in \mathfrak{g}$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing Form とする。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$,

$$B_0(X, Y) = B(X, Y) / B(H, H) \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

とする。 $\mathfrak{h}$ は K の Lie 代数。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g} \in \text{Cartan}$
分解とする。 $B_0 \in \mathfrak{g}_c = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上の positive definite な
Hermitian form を拡張する。これを B_0 と表わす。

$$Z \in \mathfrak{g}_c, K \in K \text{ に対し}$$

$$\phi_Z(K) = B_0(\text{Ad}(K^{-1})Z, H).$$

とすると ϕ_Z は K 上の C^∞ -関数であり $\phi_Z(Km) = \phi_Z(K)$
($K \in K, m \in M$) が成り立つ。 $Z \rightarrow \phi_Z$ は線型となる。

また $Z \in \mathfrak{g}_c, \varphi \in \mathcal{H}_\mu$ に対し

$$M_\mu(Z)\varphi = \phi_Z \varphi.$$

とすると $M_\mu(Z): \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_\mu$ 有界作用素となる。

$\{X_i\} \in \mathfrak{h}$ の基底で $B_0(X_i, X_j) = -\delta_{ij}$ とするものとし

$$\omega_K = -\sum_i X_i^2$$

とする。

命題 2. $\lambda \in \mathcal{P}$, $\varphi \in \mathcal{H}_\mu$ (ω -内数) に対して.

$$(3) \quad \pi_{s,\mu}(\lambda)\varphi = \left\{ s\lambda_\mu(\lambda) + \frac{1}{2} [\pi_{s,\mu}(\omega_\mu), \lambda_\mu(\lambda)] \right\} \varphi$$

が成り立つ. ω_μ は作用素の交換子積.

(4) から得られる等式

$$(4)' \quad A_\mu(s) \pi_{s,\mu}(\lambda)\varphi = \pi_{s,\mu}(\omega_\mu(\lambda)) A_\mu(s)\varphi.$$

と (2), (3) を用いて 以下の $C_\mu(s, \lambda)$ の λ に関する漸化式を求める.

Case I. $n = 2m$.

$$\lambda \in \hat{K}; \quad \lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_m \varepsilon_m, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

$$\lambda_0 - \lambda_j \in \mathbb{Z} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq |\lambda_m|.$$

$$\mu \in \hat{A}, \quad \mu = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1} \varepsilon_{m-1}, \quad \mu_1, \dots, \mu_{m-1} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

$$\mu_0 - \mu_j \in \mathbb{Z} \quad \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{m-1} \geq 0$$

であり, $(\lambda, \mu) = 1$ であるとする.

$$\lambda_0 - \mu_0 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq \mu_{m-1} \geq |\lambda_m|$$

が必要十分.

$$(4.1) \quad (s + \rho - \lambda + \lambda_i + 1) C_\mu(s, \lambda + \varepsilon_i) = (-s + \rho - \lambda + \lambda_i + 1) C_\mu(s, \lambda)$$

$$\lambda = 1, \dots, m, \quad s \in \mathbb{C}^*$$

Case II. $n = 2m+1$.

$$\lambda \in \hat{K}; \quad \lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_m \varepsilon_m, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

$$\lambda_0 - \lambda_j \in \mathbb{Z} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0.$$

$$\mu \in \Lambda; \quad \mu = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_m \varepsilon_m, \quad \mu_1, \dots, \mu_m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

$$\mu_0 - \mu_1 \in \mathbb{Z}, \quad \mu_1 \geq \cdots \geq |\mu_m|$$

これから, $\Lambda, \mu_1 = 1$ と仮定して

$$\Lambda_1 - \mu_1 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad \Lambda_1 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \Lambda_m \geq |\mu_m|$$

が必要十分

$$(A.2) \quad (s + \rho - i + \Lambda_1 + 1) C_\mu(s, \Lambda + \varepsilon_1) = -(-s + \rho - i + \Lambda_1 + 1) C_\mu(s, \Lambda)$$

$$\lambda = 1, \dots, m \quad s \in \mathbb{C} //$$

以上より, 次の命題を得る.

命題 3 $s \in \mathbb{C} \quad \ell \in \mathbb{N} \quad (s)_\ell = \Gamma(s + \ell) / \Gamma(s)$ とする.

($\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ は Γ -関数).

$$(i) \quad n = 2m \quad (m > 0)$$

$$C_\mu(s, \Lambda) = \left(\prod_{\lambda=1}^{m-1} \frac{(-s + \delta_\lambda + \mu_\lambda) \Lambda_\lambda - \mu_\lambda}{(s + \delta_\lambda + \mu_\lambda) \Lambda_\lambda - \mu_\lambda} \right) \left(\frac{(s + \delta_m + \Lambda_m) \mu_{m-1} - \Lambda_m}{(-s + \delta_m + \Lambda_m) \mu_{m-1} - \Lambda_m} \right) C_\mu(s, \Lambda(\mu))$$

$$\Rightarrow \delta_\lambda = m + \frac{1}{2} - \lambda = \rho + 1 - \lambda$$

$$\Lambda(\mu) = \mu + \mu_{m-1} \varepsilon_m = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1} \varepsilon_{m-1} + \mu_{m-1} \varepsilon_m$$

$$(ii) \quad n = 2m + 1 \quad (m > 0)$$

$$C_\mu(s, \Lambda) = \left(\prod_{\lambda=1}^m (-1)^{\Lambda_\lambda - |\mu_\lambda|} \frac{(-s + \delta_\lambda + |\mu_\lambda|) \Lambda_\lambda - |\mu_\lambda|}{(s + \delta_\lambda + |\mu_\lambda|) \Lambda_\lambda - |\mu_\lambda|} \right) C_\mu(s, \Lambda(\mu))$$

$$\Rightarrow \delta_\lambda = m + 1 - \lambda = \rho + 1 - \lambda$$

$$\Lambda(\mu) = \mu_1 \varepsilon_1 + \cdots + \mu_{m-1} \varepsilon_{m-1} + |\mu_m| \varepsilon_m$$

7.

§3 $C_\mu(s, \Lambda; \mu)$ の explicit formula
 である。次の補題が成り立つ。

補題 1

(i) $m = 2m$.

任意の $\Lambda \in \hat{K}$ に対して $\epsilon_\Lambda = \pm 1$ が存在して $\tau_\Lambda(w) = \epsilon_\Lambda \tau_\Lambda(1)$
 1, $|(\mu)| = 1$ のとき $s \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(s) > 0$ ならば

$$C_\mu(s, \Lambda) = \frac{\epsilon_\Lambda}{\dim V_\mu} \int_N e^{-(s+p)\lambda(\bar{\pi})} \operatorname{tr}(P_\mu^{-1} \tau_\Lambda(K \bar{\pi}) P_\mu^M) d\bar{\pi}$$

(ii) $m = 2m+1$.

$s \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(s) > 0$, $|(\mu)| = 1$ のとき

$$C_\mu(s, \Lambda) = \frac{1}{\dim V_\mu} \int_N e^{-(s+p)\lambda(\bar{\pi})} \operatorname{tr}(P_\mu^{-1} \tau_\Lambda(K \bar{\pi}) P_\mu^M) d\bar{\pi}$$

$\hat{K} \subset \Lambda \in \hat{K}$, $e_\Lambda \in E_\Lambda$ と $\|e_\Lambda\|_{E_\Lambda} = 1$ とする highest
 weight vector とする。 $\zeta = v$

$$\varphi_\Lambda(K) = (\tau_\Lambda(K) e_\Lambda, e_\Lambda)_{E_\Lambda} \quad K \in K.$$

と仮定。

1. $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $|y|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$ とする

$$v_0(y) = 0$$

$$v_k(y) = \sum_{j=1}^n (y_j^2 + (y_{m+j})^2)$$

$$\begin{cases} l = 2m-1 \text{ のとき } & k=1, \dots, m-1. \\ l = 2m \text{ のとき } & k=1, \dots, m \end{cases}$$

とある。

補題2

(i) $n = 2m$

$$\Delta_k(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma_k(y)}{1+|y|^2} & 0 \leq k \leq m-1 \\ \frac{(1-|y|^2)^2}{1+|y|^2} & k = m \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}^{2m-1}$$

とある。

$$\varphi_1(\kappa(\bar{\pi}_y)) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)} \right)^{\Lambda_k}$$

とある。

$$c_\mu(s, \lambda(\mu)) = \int_{\bar{N}} e_{\lambda(\mu)} e^{-(s+\rho)\pm i(\bar{\pi}_y)} \varphi_{\lambda(\mu)}(\kappa(\bar{\pi})) d\bar{\pi}$$

(ii) $n = 2m+1$

$$\Delta_k(y) = 1 - \frac{\gamma_k(y)}{1+|y|^2} \quad 0 \leq k \leq m \quad y \in \mathbb{R}^{2m}.$$

とある。

$$\varphi_1(\kappa(\bar{\pi}_y)) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{\Delta_k(y)}{\Delta_{k-1}(y)} \right)^{\Lambda_k}$$

とある。

$$c_\mu(s, \lambda(\mu)) = \int_{\bar{N}} e^{-(s+\rho)\pm i(\bar{\pi}_y)} \varphi_{\lambda(\mu)}(\kappa(\bar{\pi})) d\bar{\pi}$$

$\bar{\pi} = \bar{\pi}_y \in \bar{N} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}$ のとき

$d\bar{\pi} = c_0 dy \quad (dy = dy_1 \cdots dy_{n-1})$ とある。

$$e^{\pm i(\bar{\pi}_y)} = 1 + |y|^2$$

に注意して計算すると次の定理が得られる。

9.

定理. ($C_\mu(s, \lambda)$ の explicit formula)

(i) $m = 2m$.

$$C_\mu(s, \lambda) = \frac{\varepsilon_\lambda (-1)^{\lambda_m - \mu_{m-1}} 2^{2\rho - 2s} \Gamma(\delta_m + \rho) \Gamma(2s)}{\Gamma(s + \delta_m + \lambda_m) \Gamma(s + \delta_m - \lambda_m)} \left(\prod_{\lambda=1}^{m-1} \frac{(-s + \delta_\lambda + \mu_\lambda) \lambda_\lambda - \mu_\lambda}{(s + \delta_\lambda + \mu_\lambda) \lambda_\lambda - \mu_\lambda} \right)$$

$$\begin{cases} \rho = \delta_1 = m - 1/2 & \delta_\lambda = m + \frac{1}{2} - \lambda = \rho + 1 - \delta \\ \lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_m \varepsilon_m & \mu = \mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_{m-1} \varepsilon_{m-1} \end{cases}$$

(ii) $m = 2m + 1$.

$$C_\mu(s, \lambda) = \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(\rho)} \left(\prod_{\lambda=1}^m \frac{(-1)^{\lambda_\lambda - 1} \mu_\lambda (-s + \delta_\lambda + 1 \mu_\lambda) \lambda_\lambda - 1 \mu_\lambda}{(s + \delta_\lambda + 1 \mu_\lambda - 1) (s + \delta_\lambda + 1 \mu_\lambda) \lambda_\lambda - 1 \mu_\lambda} \right)$$

$$\begin{cases} \delta_i = \rho + 1 - i = m + 1 - i \\ \lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_m \varepsilon_m & \mu = \mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_m \varepsilon_m \end{cases}$$