

ヒルベルト双加群と付随した C^* -環

岡山大学環境理工学部 梶原 毅 (Tsuyoshi KAJIWARA)

本講演は、C.Pinzari, 綿谷安男氏との共同研究によるものであり、主として [KPW] の内容である。

1 定義と基本的性質

1.1 定義と基本性質

A を単位元をもつ C^* -環とし、 X は right Hilbert A -module とする。 $\mathcal{L}_A(X_A)$ で X 上の線形作用素で A 内積について随伴をもつものとする。 $\mathcal{L}_A(X_A)$ は C^* -環である。さらに、 $\theta_{x,y}^r(z) = x(y|z)_A$ によって (right) rank one 作用素を定義する。これは、 $\mathcal{L}_A(X_A)$ に含まれる。rank one 作用素の線形結合のノルム閉包を $\mathcal{K}_A(X_A)$ とかき、コンパクト作用素環という。これは $\mathcal{L}_A(X_A)$ のイデアルであり、逆に $\mathcal{L}_A(X_A)$ は $\mathcal{K}_A(X_A)$ の multiplier 環である。 X の有限集合 $\{u_i\}_{i=1}^n$ が X の基底であるとは、

$$x = \sum_{i=1}^n u_i(u_i|x)_A$$

が成り立つことである。有限基底が存在するとき、 $\mathcal{L}_A(X_A) = \mathcal{K}_A(X_A)$ である。また、 X の内積の値域が A を生成するとき、 X は full という。通常、 X は full を仮定する。

本講演では、主として C^* -環は単位元をもち、bimodule は有限基底をもつと仮定する。

A から $\mathcal{K}_A(X_A)$ への $*$ -単射 ϕ が与えられているとき、 X または、 (X, ϕ) を (right) Hilbert A - A bimodule 略して、Hilbert bimodule という。ここでは、[KW1] と違って左内積は考えていない。

X によって与えられる bimodule algebra O_X とは、 $A, X, \mathcal{K}_A(X_A)$ の単射像を含み、任意の単位元をもつ C^* -環 D に対して X から D への縮小写像 V , A から D への unital $*$ -準同型 ρ_A , $K = \mathcal{K}_A(X_A)$ から D への unital $*$ -準同型 ρ_K で、任意の $x, y \in X, k \in K, a \in A$ に対して

$$\begin{aligned} V_{kx} &= \rho_K(k)V_x & V_{xa} &= V_x\rho_A(a) & \rho_K(\phi(a)) &= \rho_A(a) \\ V_xV_y^* &= \rho_K(K(x|y)) & V_x^*V_y &= \rho_A((x|y)_A) \end{aligned}$$

をみたしているときに、 O_X から D への一意的な $*$ -準同型 φ で 任意の $x \in X$, $a \in A$ と $k \in K$ に対して $\varphi(S_x) = V_x$, $\varphi(a) = \rho_A(a)$, $\varphi(k) = \rho_K(k)$ が成り立つようなものが存在するものである。この性質は、普遍性 (universality) と呼ばれる。

このような O_X は、 X 上の Fock space への生成消滅演算子のなす環の quotient として具体的に構成される。その環の普遍性は、Pimsner [Pi] によって示された。 $X^{\otimes m} = X \otimes_A X \otimes_A \cdots \otimes_A X$ (m -times), $X^{\otimes 0} = A$ とかき、 $F(X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} X^{\otimes m}$ とおく。この right A -module が X の Fock space である。 $x \in X$, に対して $T_x \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)$ を、 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in X^{\otimes m}$, $a \in A$ に対して

$$\begin{aligned} T_x(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) &= x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \\ T_x^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) &= \phi((x|x_1)_A) x_2 \otimes \cdots \otimes x_m \\ T_x(a) &= xa \quad T_x^*(a) = 0 \end{aligned}$$

と定義する。 $\{T_x\}_{x \in X}$ で生成される C^* -環 $\mathcal{T}_X$ は Toeplitz 環と呼ばれる。 $\phi_{F(X)}$ を $\mathcal{L}_A(F(A))$ から $\mathcal{L}_A(F(X)_A)/\mathcal{K}_A(F(X)_A)$ への商写像とし、 $S_x = \phi_{F(X)}(T_x)$ とおく。 $\{S_x\}_{x \in X}$ で生成される C^* -環が O_X の concrete な実現を与えている。

$x \in (x_1, \dots, x_k) \in X^{\times k}$ に対して、 $S_x = S_{x_1} S_{x_2} \cdots S_{x_k}$ とかき、 $S_\phi = I$ とかく。 O_X の中で $\{S_x S_y^* | x \in X^{\times s}, y \in X^{\times r}\}$ で生成される閉部分空間を $\mathcal{F}_{r,s}$ とかく。 $T \in K = \mathcal{K}_A(X_A)$ に対して $\pi_K(T) \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)/\mathcal{K}_A(F(X)_A)$ を $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m \rightarrow T x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m$ の商像として定義する。 $\phi_K(\theta_{x,y}) = S_x S_y^*$ であるから $\pi_K(T) \in \mathcal{F}_{1,1}$ である。また、 $\mathcal{F}_{0,0} = \pi_K(\phi(A))$ とおく。

$\{u_1, \dots, u_n\}$ を X の基底とすると、

$$S_x S_y^* = \sum_{i=1}^n S_x S_{u_i} S_{u_i}^* S_y^*$$

とかけることより、 $\mathcal{F}_{r,s} \subset \mathcal{F}_{r+1,s+1}$ となることがわかる。そこで、 $\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ で、 $\bigcup_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_{r,r+k}$ のノルム閉包を表す。

O_X 上には、自然な $\mathbf{T}$ の作用 γ が $\gamma_t(S_x) = t S_x$ によって定義される。これをゲージ作用という。 $\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ たちはスペクトル部分空間、 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ はゲージ作用による不動点環である。ゲージ作用により、 O_X から $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への忠実条件付き期待値 E_X が定義される。

Lemma 1. A は C^* -環、 X_A は right A -module とする。 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$ に対して

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_{x_i, y_i}^r \right\| = \left\| ((x_i | x_j)_A)_{ij}^{1/2} ((y_i | y_j)_A)_{ij}^{1/2} \right\|$$

がなりたつ。

これは、Morita 同値と行列による議論で示される。これを用いて、次の重要な補題が示される。

Lemma 2. A を単位元をもつ C^* -環、 X_A は *right A -module* とする。さらに D は単位元をもつ C^* -環とする。 $\pi_A: A \rightarrow D$ を *unital* な $*$ -準同型、 $\pi_X: X \rightarrow D$ を縮小写像で、 $x, y \in X, a \in A$ に対して、

$$\pi_X(xa) = \pi_X(x)\pi_A(a) \quad \pi_A((x|y)_A) = \pi_X(x)^*\pi_X(y)$$

が成り立っているものとする。そのとき、 $\mathcal{K}_A(X_A)$ から D への $*$ -準同型 π_K で、 $x, y \in X, k \in \mathcal{K}_A(X_A)$ に対して

$$\pi_K(\theta_{y,x}^r) = \pi_X(y)\pi_X(x)^* \quad \pi_X(kx) = \pi_K(k)\pi_X(x)$$

であるものが一意的に存在する。特に、 ϕ_A が 1 対 1 ならば、 π_K も 1 対 1 で π_X は等距離的である。

Proof. Lemma 2 により、 $x_1, \dots, x_n \in X, y_1, \dots, y_n \in X$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \theta_{x_i, y_i} \right\| &= \left\| ((x_i|x_j)_A)_{ij}^{1/2} ((y_i|y_j)_A)_{ij}^{1/2} \right\| \\ &\geq \left\| (\pi_A((x_i|x_j)_A))_{ij}^{1/2} (\pi_A((y_i|y_j)_A))_{ij}^{1/2} \right\| \\ &= \left\| (\pi_X(x_i)^*\pi_X(x_j))_{ij}^{1/2} (\pi_X(y_i)^*\pi_X(y_j))_{ij}^{1/2} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \pi_X(x_i)\pi_X(y_i)^* \right\| \end{aligned}$$

この不等式により、 $\pi_K(\theta_{y,x}^r) = \pi_X(y)\pi_X(x)^*$ によって π_K を定義することができる。さらに、 π_A が 1 対 1 であれば、上の不等式の中の唯一の不等号が等号になり、 π_K は等距離的である。□

Remark 1.1. 上の Lemma 2 において、一つの Hilbert A -module X を二つの Hilbert A module X, Y に、 $\mathcal{K}_A(X_A)$ を $\mathcal{K}_A(X_A, Y_A)$ に変えた形の命題が、少しの修正で成立する。

これは、 O_X から定義される $*$ -準同型がもし A 上忠実であれば O_X の homogeneous 部分空間上でも等距離的であることを示しており、あとで用いられる。

Lemma 3. A は単位元をもつ C^* -環とし、 (X, ϕ) は *Hilbert A - A bimodule* とする。そのとき、 $X^{\otimes m}$ から O_X への等距離作用素 $\pi_m: X^{\otimes m} \rightarrow O_X$ と $*$ -同型 $\psi_{r,s}: \mathcal{K}_A(X^{\otimes r}_A, X^{\otimes s}_A) \rightarrow \mathcal{F}_{r,s}$ で次をみたすものがある。 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} \pi_m(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) &= S_{x_1} \dots S_{x_m} \\ \psi_{r,s}(\theta_{x_1 \otimes \dots \otimes x_s, y_1 \otimes \dots \otimes y_r}) &= S_{x_1} \dots S_{x_s} S_{y_r}^* \dots S_{y_1}^* \end{aligned}$$

Proof. Lemma 2 を $X^{\otimes r}_A$ と $X^{\otimes s}_A$ に対して適用すればよい。 $\square$

同じ状況で、等距離的埋め込み $T \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}_A) \rightarrow T \otimes I \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes m+1}_A)$ が存在する。 $\mathcal{F}_X$ は C^* -帰納極限 $\lim_m \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}_A)$ とする。

Lemma 4. $\mathcal{F}_X$ から $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への同型 ψ で、 $\psi|_{\mathcal{K}_A(X^{\otimes m}_A)} = \psi_{m,m}$ となるものがある。さらに、 ψ は $\mathcal{K}_A(X^{\otimes m})$ から $\mathcal{K}_A(X^{\otimes m+1})$ への埋め込みを、 $\mathcal{F}_{m,m}$ から $\mathcal{F}_{m+1,m+1}$ への埋め込みにうつしている。

これによって、 $\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ は同一視することができる。

Lemma 5. A は単位元をもつ C^* -環とし、 X は Hilbert A - A bimodule とする。さらに、 X は左内積をもち、Kajiwara-Watatani の意味での *finite type* であるとする。そのとき、条件付期待値 $E_m : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{K}_A(X^{\otimes m}_A)$ で、 $T = \lim_{m \rightarrow \infty} E_m(T)$ となるものがある。さらに、 O_X から A への条件付期待値 $E_A^{O_X}$ がある。

Proof. $\mathcal{K}_A((X^{\otimes m} \otimes_A X^{\otimes k})_A)$ から $\mathcal{K}_A(X^{\otimes m}_A)$ への条件付期待値

$$E_m^{m+k}(\theta_{x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2}^r) = [\text{rind}(X^{\otimes k})]^{-1} \theta_{x_1, A(y_1|y_2)x_1}^r$$

がある。 $k \rightarrow \infty$ とすればよい。 $\square$

これにより、 X が *finite type* のとき、 $\phi(A)' \cap \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が $\cup_{m=1}^\infty (\phi(A)' \cap \mathcal{F}_{m,m})$ で近似されることがわかる。

1.2 Canonical CP map

A を単位元をもつ C^* -環とし、 (X, ϕ) は Hilbert right A - A bimodule とする。 $\{u_1, \dots, u_n\}$ として、 O_X から O_X への写像 σ を

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^n S_{u_i} T S_{u_i}^*$$

で定義する。これは、作り方より、completely positive map である。 σ は全体では基底のとりかたに依存している。

Lemma 6. σ を $\phi(A)' \cap O_X$ に制限すると *unital* 等距離的 $*$ -準同型になり、また、基底のとりかたによらない。

Proof. $\{u_1, \dots, u_n\}$ が基底であることより、 σ が unital であることがわかる。

$$\begin{aligned}
 \sigma(T_1)\sigma(T_2) &= \sum_i \sum_j S_{u_i} T_1 \phi((u_i|u_j)_A) T_2 S_{u_j}^* \\
 &= \sum_i \sum_j S_{u_i} \phi((u_i|u_j)_A) T_1 T_2 S_{u_j}^* \\
 &= \sum_j S_{\sum_i u_i(u_i|u_j)_A} T_1 T_2 S_{u_j}^* \\
 &= \sigma(T_1 T_2)
 \end{aligned}$$

である。また、 $\sigma(T) = 0$ より $T = 0$ が従うので σ は等距離的である。 $\square$

Lemma 7. $T \in \phi(A)' \cap O_X$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ に対して、 $\sigma^m(T)S_{x_1} \cdots S_{x_m} = S_{x_1} \cdots S_{x_m} T$ がなりたつ。さらに、 $\sigma(T)$ の元は、 $\mathcal{F}_{m,m}$ の元と可換である。特に、 $\sigma(T)$ は $\phi(A) \subset \mathcal{F}_{1,1}$ と可換となり、 σ が $\phi(A)' \cap O_X$ を保存していることがわかる。

Proof. 簡単のため、ここだけで $S_i = S_{u_i}$ と略記する。

$$\begin{aligned}
 \sigma^m(T)S_{x_1} \cdots S_{x_m} &= \sum_{i_1, \dots, i_m} S_{i_m} \cdots S_{i_1} T S_{i_1}^* \cdots S_{i_m}^* S_{x_1} \cdots S_{x_m} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_m} S_{i_1} \cdots S_{i_m} S_{i_1}^* \cdots S_{i_m}^* S_{x_1} \cdots S_{x_m} T \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_m} S_{x_1} \cdots S_{x_m} T
 \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 8. $\psi : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ は以前の lemma の同型写像とする。そのとき、 $T \in {}_A\mathcal{K}_A(X_A^{\otimes m})$ に対して、 $\psi^{-1}\sigma\psi(T) = I \otimes T \in \mathcal{K}_A((X \otimes_A X^{\otimes m})_A)$ となる。

Proof. $T = \sum_{x,y} S_{x,y}$ (有限和) とする。

$$\psi\sigma\psi^{-1}(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{x,y} S_{u_i \otimes x, u_i \otimes y}$$

$\square$

2 単純性とイデアル

2.1 (I)-free 条件

bimodule algebra の単純性、イデアル対応を議論するための条件として、次の条件 (I) を考える。 ${}^0O_X = \cup_{r,s} \mathcal{F}_{r,s}$ とおく。これは、 O_X の中の代数的な元全体よりなる $*$ -部分環である。

Definition 9. Hilbert bimodule X が (I)-free であるとは、自然数 k ごとに、以下の (1), (2), (3) をみたすような $r_k \in \mathbb{N}$, $T_k \in \phi(A)' \cap {}^0O_X$, $\|T_k\| = 1$ がとれることである。

1. $T_k^* \sigma^j(T_k) \in \mathcal{F}_{r_k, r_k} \quad (0 \leq j \leq k)$
2. $a \in A \rightarrow \phi(a) T_k^* T_k \in \mathcal{F}_{r_k, r_k}$ は completely isometric である。
3. $\|T_k^* \sigma^j(T_k)\| < 1 \quad (1 \leq j \leq k)$

(2) の条件は、実際に適用するときはつぎの形にする。

Lemma 10. X に対して、 $\{T_k\}$ は (I)-free 条件をみたす族とする。そのとき、任意の $p \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{F}_{p,p}$ に対して、 $\|B \sigma^p(T_k^* T_k)\| = \|B\|$ が成り立つ。

Proof. これは、Morita equivalence の理論と行列を使った議論からでる。 $\square$

(3) の条件は、そのまま適用するには不十分である。

Lemma 11. X が (I)-free であるとする。そのとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $k \in \mathbb{N}$ ごとに以下の (1), (2), (3) をみたすような $r_k^\varepsilon \in \mathbb{N}$, $T_k^\varepsilon \in \phi(A)' \cap {}^0O_X$, $\|T_k^\varepsilon\| = 1$ がとれる。

1. $T_k^{\varepsilon*} \sigma^j(T_k^\varepsilon) \in \mathcal{F}_{r_k^\varepsilon, r_k^\varepsilon} \quad (0 \leq j \leq k)$
2. 任意の $p \in \mathbb{N}$ と $B \in \mathcal{K}_A(X^{\otimes p} A)$ に対して $\|\sigma^p(T_k^{\varepsilon*} T_k^\varepsilon) B\| = \|B\|$ がなりたつ。
3. $\|T_k^{\varepsilon*} \sigma^j(T_k^\varepsilon)\| < \varepsilon \quad (1 \leq j \leq k)$

Proof. $\varepsilon > 0$ を固定する。また、 $0 \leq j \leq k$ とする。 $\|T_k^* \sigma^j(T_k)\|^{q+1} < \varepsilon$ となるような q をとる。そこで $T_k^\varepsilon = T_k \sigma^{r_k}(T_k) \cdots \sigma^{r_k q}(T_k)$ とおく。そのとき、

$$\begin{aligned} T_k^{\varepsilon*} \sigma^j(T_k^\varepsilon) &= \sigma^{r_k q}(T_k^*) \cdots \sigma^{r_k}(T_k^*) T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k+j}(T_k) \sigma^{2r_k+j}(T_k) \cdots \sigma^{r_k q+j}(T_k) \\ &= T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k} (\sigma^{r_k(q-1)}(T_k^*) \cdots T_k^* \sigma^j(T_k) \cdots \sigma^{r_k(q-1)+j}(T_k)) \end{aligned}$$

ここで、 $T_k^* \sigma^j(T_k) \in \mathcal{F}_{r_k, r_k}$ となり、 σ^{r_k} のかかっている項と可換になることを用いた。この議論を繰り返して、

$$T_k^{\varepsilon*} \sigma^j(T_k^\varepsilon) = T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k} (T_k^* \sigma^j(T_k)) \sigma^{2r_k} (T_k^* \sigma^j(T_k)) \cdots \sigma^{r_k q} (T_k^* \sigma^j(T_k)).$$

を得る。これより、 $r_k^\varepsilon = r_k(q+1)$ とすれば (1) がみたされる。

(3) を示す。 $1 \leq j \leq k$ とする。

$$\begin{aligned} & \|T_k^{\varepsilon*} \sigma^j(T_k^\varepsilon)\| \\ &= \|T_k^* \sigma^j(T_k) \sigma^{r_k} (T_k^* \sigma^j(T_k)) \sigma^{2r_k} (T_k^* \sigma^j(T_k)) \cdots \sigma^{r_k q} (T_k^* \sigma^j(T_k))\| \\ &\leq \|T_k^* \sigma^j(T_k)\|^q \leq \varepsilon \end{aligned}$$

最後に (2) を示す。 $j = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} T_k^{\varepsilon*} T_k^\varepsilon &= (T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*) \sigma^{r_k q} (T_k T_k^*) \\ &= \{(T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*)\} \sigma^{r_k q} (T_k T_k^*) \end{aligned}$$

すでに、 $p \in \mathbb{N}$ に対して、 $B \in \mathcal{K}_A(X_A^{\otimes p})$ に対して、

$$\|B \sigma^p(T_k^* T_k)\| = \|B\|$$

となることが示されている。 $T_k^* T_k \in \mathcal{F}_{r_k, r_k}$ であることより、

$$(T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*) \in \mathcal{F}_{r_k(q-1)+r_k, r_k(q-1)+r_k} = \mathcal{F}_{r_k q, r_k q} = \mathcal{K}_A(X_A^{\otimes r_k q})$$

である。 $B \in \mathcal{K}(X_A^{\otimes p})$ として、

$$\begin{aligned} & \|B \sigma^p((T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*) \sigma^{r_k q} (T_k T_k^*))\| \\ &= \|B \sigma^p((T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*)) \sigma^{r_k q + p} (T_k T_k^*)\| \\ &= \|B \sigma^p((T_k^* T_k) \sigma^{r_k} (T_k T_k^*) \cdots \sigma^{r_k(q-1)} (T_k T_k^*))\| \\ &= \|B \sigma^p(T_k^* T_k)\| \\ &= \|B\| \end{aligned}$$

となる。ここでは、 $r_k q + p$ 等に対して繰り返し Lemma 10 を適用した。 $\square$

この中で、(3) はもっとも本質的な条件であり、どのように変形しても生き残るものであるが、free を表現するには、 ε の形にしておいた方が直観に適合する。

(2) の条件は、一般的にはなかなか期待できない。特に、 X が単純 C^* 環 A 上の外部自己同型で与えられている場合、 $A = \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ であるから、意味のある元はとれなくなる。定理の証明を見ると、このような元は、個別にとれば十分なことが多い。それにも関わらずこの形の条件をあげている理由は、あとで現われる意味のある例において、極めて代数的に $\{T_k\}$ を構成することがあるからである。

この条件 (2) は例ごとに緩めて設定しなければならないことが多い。その場合には、(3) の方は厳重な条件にしないとうまく行かない。

2.2 単純性定理

A を単位元をもつ C^* -環とし、 (X, ϕ) は right Hilbert A - A bimodule とする。 A のイデアル J が X -invariant であるとは、 $a \in J, x, y \in X$ に対して、 $(x, \phi(a)y)_A \in J$ となることである。 A の X -invariant イデアルが自明なものしかないとき、 A を X -simple という。

(X, ϕ) は単位元をもつ C^* -環 A 上の right Hilbert bimodule とし、 $K = \mathcal{K}_A(X_A)$ とかく。 (V, ρ_A, ρ_K) が X の単位元をもつ C^* -環 D への表現であるとは、 $V: X \rightarrow D$ が縮小写像、 $\rho_A: A \rightarrow D, \rho_K: K \rightarrow D$ がそれぞれ $*$ 準同型で、任意の $x, y \in X, k \in K, a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} V_{kx} &= \rho_K(k)V_x & V_{xa} &= V_x\rho_A(a) \\ \rho_K(\phi(a)) &= \rho_A(a) & V_xV_y^* &= \rho_K(K(x|y)) \\ V_x^*V_y &= \rho_A((x|y)_A) \end{aligned}$$

成り立つことである。

Theorem 12. A は単位元をもつ C^* -環とし、 (X, ϕ) は Hilbert A - A bimodule とする。 D を単位元をもつ C^* -環とし、 (V, ρ_A, ρ_K) を X の D への表現とする。 φ は、 $\varphi(S_x) = V_x, \varphi(\phi(a)) = \rho_A(a), \varphi(\pi_K(k)) = \rho_K(k)$ によってきまる O_X の D への表現とする。 O_X の普遍性によって常にこの表現は存在する。

1. もし、 $a \in A \rightarrow \rho_A(a) \in D$ が 1 対 1 であれば、 φ の $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への制限も 1 対 1 である。
2. さらに X が (I)-free であれば、 φ は 1 対 1 である。

Proof. m を任意の自然数とする。Lemma 2 を $X^{\otimes m}$ に対して適用すると、 φ の $\mathcal{F}_{m,m}$ への制限が 1 対 1 になる。従って、 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ までも 1 対 1 である。

つぎに X は (I)-free をみたすとしよう。任意の $\varepsilon > 0$ を取って固定する。これに対して、Lemma 11 により、 $\{T_k^\varepsilon\}_k$ をとっておく。 $B = \sum_{j=-n}^n B_j \in {}^0O_X$ とする。ただし、 B_j は degree j の元の和とする。このような形の元全体は、 O_X の中で dense である。ここで、自然数 p を十分大きく取っておくことによりすべての $-n \leq j \leq n$ に対して、 $B_j \in \mathcal{K}(X_A^{\otimes p}, X_A^{\otimes p+j})$ とすることができる。そのとき、

$$\varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon*}))\varphi(B)\varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon)) = \sum_{j=-n}^n \varphi(B'_j)$$

とかくことができる。ここで、

$$\varphi(B'_j) = \varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon*}))\varphi(B_j)\varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon))$$

である。 $j > 0$ に対しては、

$$\varphi(B'_j) = \varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon*} \sigma^j(T_n^\varepsilon))) \varphi(B_j)$$

であり、条件 (1) より B'_j が degree j の元であることもわかる。(3) の条件から、

$$\|\varphi(B'_j)\| \leq \varepsilon \|\varphi(B_j)\|$$

である。 $j < 0$ のときも同様にして、

$$\|\varphi(B'_j)\| \leq \varepsilon \|\varphi(B_j)\|$$

となることがわかる。さらに、(2) より、 $\|\sigma^p(T_n^{\varepsilon*} T_n^\varepsilon) B_0\| = \|B_0\|$ である。 φ は homogeneous 部分空間上では等距離的であるから、 $\|\varphi(B_0)\| = \|B_0\| = \|B'_0\| = \|\varphi(B'_0)\|$ である。これらより、

$$\begin{aligned} \|\varphi(B_0)\| &= \|\varphi(B'_0)\| \\ &= \|\varphi(B') - \sum_{j \neq 0} \varphi(B'_j)\| \\ &\leq \|\sum_{j=-n}^n \varphi(B'_j)\| + \sum_{j \neq 0} \|\varphi(B'_j)\| \\ &\leq \|\sum_{j=-n}^n \varphi(B'_j)\| + 2nK\varepsilon \\ &\leq \|\varphi(\sigma^p(T_n^{\varepsilon*})) \varphi(B) \varphi(\sigma^p(T_n^\varepsilon))\| + 2nK\varepsilon \\ &\leq \|\varphi(B)\| + 2nK\varepsilon \end{aligned}$$

ここで ε は任意なので、 $\|\varphi(B_0)\| \leq \|\varphi(B)\|$ がなりたつ。

$\varphi(O_X)$ から $\varphi(\mathcal{F}_\infty^{(0)})$ への条件付期待値 $\hat{E}$ で $\hat{E}(\varphi(B)) = \varphi(B_0)$ をみたすものが存在する。すなわち $\hat{E}\varphi = \varphi E_X$ であり、下の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} O_X & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(O_X) \\ E_X \downarrow & & \downarrow \hat{E} \\ \mathcal{F}_\infty^{(0)} & \xrightarrow[\varphi]{} & \varphi(\mathcal{F}_\infty^{(0)}) \end{array}$$

φ は $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ 上で1対1で E_X は忠実であるから φ は O_X 全体で忠実となる。 $\square$

Corollary 13. (X, ϕ) は単位元をもつ C^* -環 A 上の full Hilbert bimodule であるとする。 X が (I)-free であり、 A が X -simple であれば、 O_X は単純である。

Proof. $\mathcal{J} \neq O_X$ は O_X のイデアルとし、 $J = \mathcal{J} \cap A$ とおく。そのとき、 J は A の X -invariant イデアルとなる。 A が X -simple という仮定より、 $J = \{0\}$ でなければならない。よって、 $O_X \rightarrow O_X/J$ は、 A 上で忠実であり、全体で忠実である。すなわち $\mathcal{J} = \{0\}$ である。 $\square$

2.3 イデアル対応定理

イデアル対応を考えるためには、 X -invariant イデアルの概念だけでは不十分にである。 A の X -invariant イデアル J に対して、 $J_X = \{a \in A : (x|\phi(a)y)_A \in J, \forall x, \forall y \in X\}$ とおく。このとき、 J_X は $J_X \supset J$ となるような X -invariant イデアルである。

A のイデアル J に対して、 $X_J = \{x \in X : (x|x)_A \in J\}$ とおく。 $\{u_\alpha\}_\alpha$ を J の approximate unit とし、 $x \in X_J$ を xu_α で近似できることにより、 $(y|x)_A \in J$ などがわかる。これからさらに $x, y \in X_J$ であるときに $x+y \in X_J$ であり、 X_J は X の部分空間である。さらに $XJ \subset X_J$ であり、 $X_J A \subset X_J$ がわかる。これらより、 X/X_J は right A/J module であることがわかる。

Lemma 14. J が A の X -invariant イデアルであるとする。そのとき、 $\tilde{\phi}: A/J \rightarrow \mathcal{K}_{A/J}((X/X_J)_{A/J})$ を $\tilde{\phi}([a])[x] = [\phi(a)x]$ と決めると $\tilde{\phi}$ は $*$ -準同型となり、 $\tilde{\phi}$ の核は J_X/J である。特に、 $J_X = J$ であれば $\tilde{\phi}$ は等距離的である。

Proof. X が有限生成であるという仮定から $j \in J$ として、

$$\phi(j)x = \sum_{i=1}^n u_i(u_i|\phi(j)x)_A$$

である。 J が X -invariant であるという仮定より、 $(u_i|\phi(j)x)_A \in J$ である。従って $\phi(j)X \subset XJ \subset X_J$ である。さらに $x \in X_J$, $a \in A$ に対して、 $(\phi(a)x|\phi(a)x)_A = (x|\phi(a^*a)x)_A \in J$ である。したがって、 $\phi(A)X_J \subset X_J$ である。 $\square$

Bimodule X が (II)-free であるとは、 $J_X = J$ をみたすような任意の X -invariant イデアルに対して X/X_J が (I)-free になることである。 $J = \{0\}$ とすれば ϕ が忠実であることから $J_X = \{0\}$ となる。したがって、(II)-free なら (I)-free である。

Theorem 15. A は単位元をもつ C^* -環とし、 (X, ϕ) を A - A bimodule とする。もし X が (II)-free であるならば、

1. $\mathcal{J} \rightarrow J = \phi^{-1}(\mathcal{J} \cap \phi(A))$, $J \rightarrow \mathcal{J} = \text{cls}\{X^{\otimes r} \phi(J) X^{\otimes s}, r, s = 0, 1, 2, \dots\}$ は O_X のイデアルと A の $J_X = J$ をみたすような X -invariant イデアルとの 1 対 1 対応を与える。
2. J が A のイデアルであり、 $\mathcal{J}$ を対応する O_X のイデアルであるとするとき、 $O_X/J = O_{X/X_J}$ がなりたつ。

Proof. $\mathcal{J}$ は O_X のイデアルとする。そのとき、 $J = \phi^{-1}(\mathcal{J} \cap \phi(A))$ とすると、 J は A の X -invariant イデアルで、 $J_X = J$ をみたす。したがって、 X/X_J は (I)-free である。Bimodule X/X_J は A/J -bimodule とみて、 $X/\mathcal{J}$ と同じものである。 X_J の元は、 $xu_\alpha, u_\alpha \in J$ の形の元で近似できる。 $u_\alpha \in J \subset \mathcal{J}$ であるから、 $X_J \subset \mathcal{J}$ となる。方、 $\tilde{x} \in X \cap \mathcal{J}, y \in X$ とすると、 $(\tilde{x}|y)_A \in \mathcal{J} \cap \phi(A) = \phi(J)$ であり、 $X_J = \mathcal{J} \cap X$ である。

そこで、 X/X_J の $O_X/\mathcal{J}$ の中への表現で、 A/J 上忠実なものがあることになる。したがって、 O_{X/X_J} と $O_X/\mathcal{J}$ は標準的に同型である。

イデアル対応を考える。 m_k で $\mathcal{F}_\infty^{(k)}$ への射影とする。 O_{X/X_J} において、直前の定理の expectation の議論を適用して、商イメージの元 $\tilde{X}$ に対して、 $\|\tilde{X}_0\| \leq \|\tilde{X}\|$ がいえる。したがって、 $X \in \mathcal{J}$ であれば、 $m_0(X) \in \mathcal{J}$ でなければならない。 $x \in X^{\otimes k}$ に対して、 $x^* m_k(B) = m_0(x^* B)$ である。したがって、 $x^* m_k(B) \in \mathcal{J}$ となり、 $m_k(B) \in \mathcal{J}$ である。これは、左から $X^{\otimes k}$ の元をかけていくことによって示される。フーリエ解析により、 $B \in O_X$ は $m_k(B)$ たちのチェザロ極限でかけるので、 $\mathcal{J}$ はゲージ不変となる。従って、 $\mathcal{J}$ は、 $\mathcal{J} \cap \mathcal{F}_{r,s}$ たちによって生成される。また、 $X^{\otimes r*}(\mathcal{J} \cap \mathcal{F}_{r,s})X^{\otimes s} \in \mathcal{J} \cap A = J$ であり、基底を使った議論でもとにもどすことが可能であるから、 $\mathcal{J}$ は、 $X^{\otimes s}\phi(J)X^{\otimes r*}$ たちによって生成される。 $\mathcal{J}$ が J によって復元されるので、 $\mathcal{J}$ から J への対応は 1 対 1 である。

最後にこの対応が全射であることを示す。すなわち、 A の X -invariant イデアルで J で $J_X = J$ をみたすものに対して $\mathcal{J} \cap \phi(A) = \phi(J)$ となることである。ただし、 $\mathcal{J}$ は $\phi(J)$ によって O_X の中で生成されたイデアルである。明らかに $\phi(J) \subset \mathcal{J} \cap \phi(A)$ である。作り方より $\mathcal{J}$ はゲージ不変であるから、 $\mathcal{J} \cap \phi(A) \subset \mathcal{J}^{(0)} \cap \phi(A) = \lim_r X^{\otimes r} \phi(J) X^{\otimes r*}$ である。ここで、 $\mathcal{J}^{(0)} = \lim_r X^{\otimes r} \phi(J) X^{\otimes r*}$ とおく。 $X^{\otimes r} \phi(J) X^{\otimes r*}$ は $\mathcal{F}_{r,r}$ の閉イデアルであり、これを $\mathcal{J}_r$ とかく。 π_r で、 A の $\mathcal{F}_{r,r}$ への埋め込みと、 $\mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r$ への商写像の合成とする。さらには、 π_∞ は A の $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ への埋め込みと $\mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}$ への商写像の合成とする。そのとき、 $\ker(\pi_r) = \phi^{-1}(\phi(A) \cap \mathcal{J}_r)$ であり、 $\ker(\pi_\infty) = \phi^{-1}(\phi(A) \cap \mathcal{J}^{(0)})$ である。次の明らかな *-準同型が存在する。

$$\phi(A)/(\phi(A) \cap \mathcal{J}_r) \rightarrow \mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r \quad \phi(A)/(\phi(A) \cap \mathcal{J}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}$$

一般に、 $a \in B$ で $\mathcal{J}$ を B のイデアルとする。 a の $B/\mathcal{J}$ の像を $[a]_{B/\mathcal{J}}$ と書くことにする。

簡単のため、以下、 ϕ は省略する。 $a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned}
 \|[a]_{A/A \cap \mathcal{J}^{(0)}}\| &= \|[a]_{\mathcal{F}_\infty^{(0)}/\mathcal{J}^{(0)}}\| \\
 &= \text{dist}(a, \mathcal{J}^{(0)}) \\
 &= \lim_r \text{dist}(a, \mathcal{J}_r) \\
 &= \lim_r \|[a]_{\mathcal{F}_{r,r}/\mathcal{J}_r}\| \\
 &= \lim_r \|[a]_{A/A \cap \mathcal{J}_r}\|
 \end{aligned}$$

以下に $A \cap \mathcal{J}_r = J$ であることが示されるので、

$$\|[a]_{A/A \cap \mathcal{J}^{(0)}}\| = \|[a]_{A/J}\|$$

となる。これにより $A/J \rightarrow A/A \cap \mathcal{J}^{(0)}$ は単射となり、 $A \cap \mathcal{J}^{(0)} = J$ である。

最後に $A \cap \mathcal{J}_r = J$ であることを示さなければならない。 $\phi(a) \in X^{\otimes r} \phi(J) X^{\otimes r*}$ と仮定する。 $x, y \in X^{\otimes r}$ に対して $x^* \phi(a) y \in \phi(J)$ である。さらに $x', y' \in X^{\otimes r-1}$ に対して $x'^* \phi(a) y' \in \phi(J_X) = \phi(J)$ である。これを繰り返して r をどんどん小さくしていけば、最後に $a \in J$ を得る。□

3 例

3.1 Cuntz-Krieger algebra

もともと、条件 (I) は、Cuntz-Krieger [CK] で、条件 (II) は、Cuntz [C] で定義されていた。すでに知られている Cuntz-Krieger 環の単純性定理とイデアル分類定理を bimodule のことばで説明する。

$\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $D = (D(i, j))_{i, j \in \Sigma}$ は 0 または 1 を成分にもつ行列とする。ここで、 Σ を頂点集合とし、 D によって決定されるグラフ $\mathcal{G} = (\Sigma, E, r, s)$ を考える。ここで、 E は辺の集合、 $(i, j) \in E$ に対して $r(i, j) = j$, $s(i, j) = i$ とおく。 E は Connes の意味の correspondense と考えることができる。 $i \in \Sigma$ に対応する A の元を P_i と、 $\gamma \in E$ に対応する E の元を δ_γ とかく。

$A = c(\Sigma)$ とおく。これは有限次元可換 C^* -環である。 $X = c(E)$ とおく。そのとき、 $a, b \in A$, $f \in X$ に対して、

$$(a \cdot f \cdot b)(i, j) = a(i) f(i, j) b(j)$$

と置くことにより、 X は A - A bimodule となる。また、

$$(f|g)_A(j) = \sum_{(i, j) \in E} \overline{f(i, j)} g(i, j)$$

とおくと、 X は right Hilber A -module である。そのとき、

$$\sum_{\gamma \in E} \delta_\gamma (\delta_\gamma | f)_A = f$$

であり、 $\{\delta_\gamma\}_{\gamma \in E}$ は、 X_A の有限基底である。

X から $O_X = C^*(S_\alpha | \alpha \in E)$ をつくる。 $\alpha \in E$ に対して、 S_{δ_α} を S_α とかく。 $r(\alpha) = s(\beta)$ のときに $F(\alpha, \beta) = 1$ 、そうでないとき $F(\alpha, \beta) = 0$ として、行列 $F(\alpha, \beta)_{\alpha, \beta \in E}$ を定義する。そのとき、

$$S_\alpha^* S_\alpha = \sum_{\beta} F(\alpha, \beta) S_\beta S_\beta^*$$

が成り立つ。これは、edge model の Cuntz-Krieger family である。

さらに、 $S_i = \sum_{s(\alpha)=i} S_\alpha \in O_X$ とおく。 $\alpha = (i, j)$ であるとき、 $S_\alpha = S_i P_j$ である。 $S_i S_i^* = P_i$ であることから $\{S_i | i \in \Sigma\}_{i \in \Sigma}$ はやはり O_X を生成し、

$$S_i^* S_i = \sum_j D(i, j) S_j S_j^*$$

をみたしている。すなわち、 $\{S_i\}$ は D によって決まる Cuntz-Krieger family である。

Σ_0 は Σ の部分集合で、任意の $v \in \Sigma_0$ に対して、 v を起点とする 2 通りのループがあるようなものとする。

Definition 16 (CK). $\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたすとは、任意の $i \in \Sigma$ に対して、 i からある $i_0 \in \Sigma_0$ へのパスがとれることである。

Lemma 17 (CK). $\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたしているとき、 $\mathcal{G}$ によって与えられる bi-module X は条件 (I) をみたしている。

Proof. 概略をのべる。グラフの (I) 条件により、任意の $i \in \Sigma$ を起点とする aperiodic なパスが作れる。これをすべて寄せ集めると、自然数 m に対して X の条件 (I) を与える projection P^m が構成できる。このとき、 P^m は、 A と可換な projection であるから、 $a \rightarrow aP^m$ は単射準同型であり completely isometric である。また、 $1 \leq j \leq m$ に対して、 $P^m \sigma^j(P^m) = 0$ ととることもできる。□

Proposition 18. $\mathcal{G}$ が条件 (I) をみたしているとする、 O_X は D によって定義される Cuntz-Krieger 環と一致しており、これより Cuntz-Krieger 環は表現によらない。さらに、 D が irreducible であれば O_X は simple である。

つぎに、イデアルを考える。 Σ の部分集合 C が hereditary であるとは、 $i \in C$ で $(i, j) \in E$ なら $j \in C$ となることであり、saturated であるとは、 $i \in \Sigma$ が任意の $(i, j) \in E$ に対して $j \in C$ となっていれば $i \in C$ となることとする。 A の $J_X = J$ をみたす X -invariant イデアルは、 Σ の saturated hereditary subset C に対応し、 X/X_J は G から C に属する頂点、 C を range にもつような辺をすべて取り除いたグラフによって定義される。

Definition 19 (C). G が条件 (II) をみたすとは、 $\Sigma = \Sigma_0$ となることである。

Lemma 20. G が条件 (II) をみたすとき、 X は条件 (II) をみたす。

Proof. G から saturated hereditary subset およびそれらを range にもつような辺を除いて作ったグラフも条件 (I) をみたしている。□

Proposition 21 (C). G が条件 (II) をみたしているとき、 G によって定義される Cuntz-Krieger 環のノルム閉両側イデアルは Σ の saturated hereditary subset とラティス対応している。

Remark 3.1. Σ を可算無限集合にしても、類似の命題が成立する。

3.2 Real bimodule

A を単位元を持つ C^* -環とし、 (X, ϕ) を right Hilbert A - A bimodule とする。right Hilbert A - A bimodule (Y, ψ) が X の conjugate であるとは、 $R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A, (Y \otimes_A X)_A)$ と $\bar{R} \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A, (X \otimes_A Y)_A)$ が存在して

$$\begin{aligned}(\bar{R}^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R) &= I_X \\(R^* \otimes I_Y) \circ (I_Y \otimes \bar{R}) &= I_Y\end{aligned}$$

が成り立つことである。 X の dimension $d(X)$ はすべての conjugate にたいして、 $\inf \|R\| \|\bar{R}\|$ で与えられる。([LR])

right Hilbert A - A bimodule (X, ϕ) が real であるとは、 $Y = \bar{X}$, $\bar{R} = R$ となるような conjugate が存在することである。これは、 X に左内積が存在し、しかも左右対称になることを意味する。すなわち、

$$(R^* \otimes I_X) \circ (I_X \otimes R) = I_X$$

とすることができ。 $R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A, (X \otimes_A X)_A)$ であることより、この式は、 $R\sigma(R) = I_X$ とすることができ。

Inclusion $A \subset B$ から得られる $X = B_A$ は real bimodule の典型的な例である。さて、real bimodule は、(II) をみたしている。

Theorem 22. (X, ϕ) は単位元をもつ C^* -環 A 上の Hilbert A - A bimodule で、 $\|(R^*R)^{-1}\| < 1$ をみたす R によって規定される real bimodule であるとする。そのとき、 (X, ϕ) は (II)-free 条件をみたす。

したがって $J \rightarrow \phi^{-1}(J \cap \phi(A))$ は O_X のイデアルと A の X -invariant イデアルの 1 対 1 対応をあたえる。さらに、 O_X が単純であることと、 A が X -simple であることは同値になる。また、 A が non-nuclear なら、 O_X も non-nuclear になる。

Proof. A の任意の X -invariant イデアル J は $J_X = J$ をみたすこと、さらに X が (II) をみたすことを示す。

$R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A, (X \otimes_A X)_A)$ に対して、 $S = R(R^*R)^{-1/2}$ とおく。 $R^*R \in {}_A\mathcal{K}_A(A_A) \simeq Z(A)$ となる。 R と $R(1) \in X \otimes X = X^{\otimes 2}$ を同一視し、さらには、 R と O_X の中における像も同一視する。そうすると、 $S \in X^{\otimes 2}$ で $\phi(a)S = Sa$ が任意の $a \in A$ に対してなりたつ。また、 $(S|S)_A = S^*S = I$ である。なお、積は O_X の中で考えている。これより S は O_X の isometry であることもわかる。 J を X -invariant イデアルとし、 $a \in J$ とする。任意の $x, y \in X$ に対して $(x|\phi(a)y)_A \in J$ と仮定する。 J は X -invariant であるから、 $(S|\phi(a)S)_A \in J$ である。そのとき、 $(S|\phi(a)S)_A = (S|Sa)_A = (S|S)a = a \in J$ であり、 J は、 $J_X = J$ をみたす。

$$\begin{aligned} S^*\sigma(S) &= (R^*R)^{-1/2}R^*\sigma(R(R^*R)^{-1/2}) \\ &= (R^*R)^{-1/2}R^*\sigma(R)\sigma((R^*R)^{-1/2}) \\ &= (R^*R)^{-1/2}\sigma((R^*R)^{-1/2}) \end{aligned}$$

ここで、 σ が $A' \cap O_X$ の準同型になることを用いた。したがって、

$$\|S^*\sigma(S)\| \leq \|(R^*R)^{-1/2}\| \|\sigma(R^*R)^{-1/2}\| \leq \|(R^*R)^{-1/2}\|^2 < 1$$

となる。

この S を用いて、 $S_k = \sigma^{k-1}(S)\sigma^{k-2}(S)\cdots\sigma(S)S$ とおく。このとき、 $S_k \in X^{2k}$ である。また、

$$\begin{aligned} S_k^*S_k &= S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-1}(S^*)\sigma^{k-1}(S)\cdots\sigma(S)S \\ &= S^*\sigma(S^*)\cdots\sigma^{k-1}(S^*S)\cdots\sigma(S)S \\ &= I \end{aligned}$$

ここで、 $S^*S = I$ と σ が $A' \cap O_X$ の準同型であることを再度使った。

簡単な計算により、 $r_k = 2k$ として、 $0 \leq j \leq k$ に対して、 $S_k^*\sigma^j(S_k) \in \mathcal{F}_{r_k, r_k}$ となる。 $S_k^*S_k = I$ であることより、(2) の条件は明らかになりたつ。(3) を示すために、Lemma 7 よりつぎの事実を復習する。 $l \leq m$ として、

$$P = \sum_{x \in X^{\times m}} S_x^* = \sum_{x_1, \dots, x_m} S_{x_m}^* \cdots S_{x_1}^*$$

また、 $T \in \phi(A)' \cap O_X$ とするとき、

$$P\sigma^l(T) = \sigma^{l-m}(T)P$$

が成り立つ。

$1 \leq j \leq k$ とする。

$$\begin{aligned} & S_k^* \sigma^j(S_k) \\ &= S^* \sigma(S^*) \cdots \sigma^{k-1}(S^*) (\sigma^{k-1+j}(S) \sigma^{k-2+j}(S) \cdots \sigma^k(S) \cdots \sigma^j(S)) \\ &= S^* \sigma(S^*) \cdots \sigma^{k-2}(S^*) \sigma^{k-3+j}(S^*) \sigma^{k-1}(S^*) \sigma^{k-2+j}(S) \cdots \sigma^k(S) \cdots \sigma^j(S) \\ &= S_{k-1}^* \sigma^{k-3+j}(S) \sigma^{k-4+j}(S) \cdots \sigma^{k-1}(S) \sigma^{k-1}(S^* \sigma(S)) \sigma^{k-1}(S) \cdots \sigma^j(S) \\ &= S_{k-1}^* \sigma^{k-1}(S_{j-1}) \sigma^{k-1}(S^* \sigma(S)) \sigma^j(S_{k-j}) \end{aligned}$$

これより、 $\|S_k^* \sigma^j(S_k)\| \leq \|S^* \sigma(S)\| < 1$ となる。 $j = k$ のときは、左端の項はなくなる。よって、 X は (I)-free 条件をみたしている。

J は A の X -invariant イデアルとする。 $J_X = J$ はみたされている。 π は X から X/X_J への商写像とし、さらに、 π_k は $X^{\otimes k} \rightarrow (X/X_J)^{\otimes k}$ であるとする。そのとき、 $\pi_{2k}(S_k) \in (X/X_J)^{\otimes 2k}$ は、 $\tilde{\phi}(A/J)' \cap {}^0O_{X/X_J}$ の isometry で、(I)-free 条件の (1), (2), (3) をみたしている。したがって (II)-free 条件がみたされ、イデアルの対応が成立する。

Lemma 5 により条件つき期待値 $E_A^{O_X} : O_X \rightarrow A$ が存在していた。 A が non-nuclear なら、 O_X も non-nuclear になる。□

$d(X)^{-1} \leq \|(R^*R)^{-1}\|$ であり、 A が単純環など、自明な中心をもつ場合をのぞけば、必ずしも $d(X) > 1$ は $\|(R^*R)^{-1}\|$ の十分条件ではない。Real bimodule の特殊な形である包含関係においては、もう少し弱い仮定から単純性定理がなりたつ。

Theorem 23. $A \subset B$ は単位元をもつ C^* -環の包含関係で、 $E : B \rightarrow A$ は finite index の条件つき期待値で、 $X = B_A$ は、 $(x|y)_A = E(x^*y)$, $\phi(a)x = ax$ で (X, ϕ) は与えられているものとする。そのとき、 $\text{Ind}[X] \neq I$ かつ A が X -simple なら、 O_X は単純になる。

Proof. $\text{Ind}[X] \neq I$ と仮定する。Jones projection を e_A とすると、 $e_A \neq I$ である。 $e_A(x_0) \neq x_0$ となるような x_0 がある。また、 $e_A \in \phi(A)' \cap {}_A\mathcal{K}_A(X_A)$ である。そこで、 $q_k = e_A \otimes \cdots \otimes e_A \otimes (1 - e_A) \in {}_A\mathcal{K}_A(X_A^{\otimes k+1})$ を定義することができる。このとき、 $q_k \in \phi(A)' \cap {}^0O_X$ である。さらに、 $1 \leq m \leq k$ のとき、 $q_k \sigma^m(q_k) = 0$ となる。さらに、

$$(q_k(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x_0) | (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes (x_0 - e_A(x_0))))_A = (x_0 - e_A(x_0) | x_0 - e_A(x_0))_A \neq 0$$

であることから $q_k \neq 0$ であり、 q_k は projection であるから、 $\|q_k\| = 1$ である。

最後に (2) の性質を検証する。 $\phi(a)$ は q_k と可換であるから、 $a \rightarrow \phi(a)q_k$ は $*$ -準同型である。この写像の核が $\{0\}$ であることを言えばよい。 $a \rightarrow ae_A$ は同型であるから、

$$J = \{a \in A \mid ab = aE(b) \quad \forall b \in B\}$$

とおくと、 J は上の写像の核になっている。 $a \in J, x, y, b \in B$ とすると、

$$\begin{aligned} (x|\phi(a)y)_A b &= E(x^*ay)b = E(x^*aE(y))b \\ &= E(x^*)aE(y)b = E(x^*)aE(y)E(b) \\ &= E(x^*aE(y)E(b)) = (x|\phi(a)y)_A E(b) \end{aligned}$$

したがって J は X -invariant イデアルである。 X が X -simple という仮定と、 $\text{Ind}[X] \neq I$ という仮定より、 $J = \{0\}$ である。□

4 純無限環

O_X が純無限になるための条件をあたえる。

Theorem 24. A は単位元をもつ純無限 C^* -環とし、 (X, ϕ) は、right Hilbert A - A bimodule とする。もし、 X が (I) -free なら、 O_X は純無限である。

Proof. $\mathcal{K}_A(X^{\otimes r})$ は A を成分にもつような行列環の full corner なので、純無限である。さらにその帰納極限 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ も純無限である。

$T \in O_X$ を 0 でない正の元とする。 $E_X(T)$ は純無限環 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ の 0 でない元なので、 $W \in \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が存在して、 $W^*E_X(T)W = I$ とできる。 $S = W^*TW$ とおく。 $E_X(S) = I$ である。 S を代数的な元で近似する。 $0 < \varepsilon < 1/5$ を任意にとって固定する。 $B \in {}^0O_X$ の元 $\|S - B\| < \varepsilon$ となるものをとる。 $B_0 = E_X(B) \in {}^0O_X \cap \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ である。そのとき、 $\|I - B_0\| = \|E_X(S - B)\| < \varepsilon$ である。 $C = B - B_0 + I \in {}^0O_X$ とおく。 $\|C - B\| < \varepsilon$ であり、さらに、 $\|S - C\| < 2\varepsilon$ である。 C は代数的な元なので、 $C = \sum_{j=-k}^k C_j$ とかける。さらに p を十分大きくとっておいて、 $C_j \in \mathcal{K}(X^{\otimes p}_A, X^{\otimes p+j}_A)$ としておくことが可能である。 $C_0 = E_X(C) = I$ である。

前の (I) -free を用いた単純性の証明、 ε に対して取り直した T_k^ε を用いて、

$$\|T_k^{\varepsilon*}ST_k^\varepsilon - T_k^{\varepsilon*}T_k^\varepsilon\| \leq \|T_k^{\varepsilon*}(S - C)T_k^\varepsilon\| + \|T_k^{\varepsilon*}(C - C_0)T_k^\varepsilon\| < 3\varepsilon$$

$\|T_k^{\varepsilon*}T_k^\varepsilon\| = 1$ であるから、 $\mathcal{F}_\infty^{(0)}$ の純無限性により、 $V \in \mathcal{F}_\infty^{(0)}$ が存在して、 $V^*T_k^{\varepsilon*}T_k^\varepsilon V = I$, $\|V\| < 1 + \varepsilon$ とできる。従って、

$$\|V^*T_k^{\varepsilon*}ST_k^\varepsilon V - I\| = \|V^*T_k^{\varepsilon*}ST_k^\varepsilon V - V^*T_k^{\varepsilon*}T_k^\varepsilon V\| < 3\varepsilon(1 + \varepsilon)^2 < 108/125 < 1$$

とできる。 $V^*T_k^{\varepsilon*}ST_k^{\varepsilon}V$ は正値可逆元である。両側に Z^*, Z をかけて I にできる。すべて組み合わせると、 $Y^*TY = I$ となる Y をみつけたことになり、 O_X は purely infinite になる。□

Remark 4.1. この定理は、もう少し弱いテクニカルな条件のもとでも成立する。また、単純性があらかじめわかっているならば、条件 (I) は不要である。

References

- [CK] J.Cuntz and W.Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*, Invent.Math. 56(1980), 251-268
- [C] J. Cuntz *A class of C^* -algebras and topological Markov chains II: Reducible chains and the Ext-functor for C^* -algebras*, Invent. Math. 63(1981), 23-40
- [KPW] T.Kajiwra, C.Pinzari and Y.Watatani, *Ideal structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules*, preprint
- [KW1] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Jones index theory by Hilbert C^* -bimodules and K -theory*, preprint
- [KW2] T.Kajiwara and Y.Watatani, *Crossed products of Hilbert C^* -bimodules by countable discrete groups*, to appear in Proc. Amer.Math. Soc.
- [Kat] Y.Katayama, *Generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_N^M$* , RIMS Kokyuroku 858 (1994), 131-151.
- [KMW] Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani, *Simple C^* algebras arising from β -expansion of real numbers*, Preprint.
- [Ki] A.Kishimoto, *Outer automorphisms and reduced crossed products of simple C^* -algebras*, Comm. Math. Phys. 81 (1981), 429-435.
- [LR] R. Longo, J.E. Roberts, *A theory of dimension*, Preprint.
- [Pi] M.Pimsner, *A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and Crossed products by $\mathbb{Z}$ in 'Free Probability theory'*, Fieldes Institute Communications 12(1997)
- [W] Y. Watatani, *Index for C^* -subalgebras*, Memoir Amer. Math. Soc. 424(1990).