

非線形常微分方程式にみられる分岐集合の計算

徳島大・工・電子 川上 博
勝田祐司
松尾次郎

1. はじめに λ パラメータ $\lambda \in \mathbb{R}^m$ を含んだ常微分方程式:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (1.2)$$

を考える。 $x \in \mathbb{R}^n$, f は各引数について必要な限り微分可能。また (1.2) では t について周期的: $f(t+2\pi, x, \lambda) = f(t, x, \lambda)$ とする。

(1.1) あるいは (1.2) において λ パラメータ λ を変化させたときある λ パラメータ値 $\lambda = \lambda_0$ で相空間図 (phase portrait) の位相的性質が急に変化する現象は一般に分岐現象と呼ばれ, λ_0 は分岐の値, λ_0 からなる λ パラメータ空間 $\mathbb{R}^m$ の集合は分岐集合と呼ばれている。

この報告では次にあげるような応用上問題となる分岐集合を数値的に計算する方法について考察し, 幾つかの具体的な方程式にみられる分岐集合の計算結果を紹介する。

分岐に関して興味ある問題としては

I. 分岐集合の計算法:

- (I-a) 平衡点, 周期解など局所的と考えられる運動に関する分岐集合,
 (I-b) saddle connection, homoclinic 点の発生など解の大域的性質に基づき運動に関する分岐集合, の計算;

II. パラメータ空間における分岐集合の性質

- (II-a) 分岐集合の局所的性質
 (II-b) 分岐集合の大域的性質
 (II-c) 分岐集合の安定性

などが考えられる。ここで用いた分岐集合の計算法は平衡点, 周期解, homoclinic 点の発生など系の状態を与える方程式と各種分岐の条件式を状態 x とパラメータ λ を未知数として連立して解く方法による。このため用いる方程式系は分岐の各パラメータで関数的に独立となる条件(横断性の条件)を持つことが望ましい。この条件を考慮して方程式系を構成すれば数値計算は Newton 法による shooting 法を用いることができる。以下代表例について計算法を略述する。

2. 分岐集合の計算法

(I-a) の例として (1.2) の周期解の分岐集合, (I-b) の例として homoclinic 点の発生に関する分岐集合の計算法を述べる。なおパラメータ λ は 2 次元 ($m=2$) の場合を考える。

2.1 不動点の分岐集合

式 (1.2) の $t=0$ で初期値 x_0 をとる解を $\phi(t, x_0, \lambda)$ とし, ϕ を用い

で Poincaré 写像 T_λ を

$$T_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x_0 \mapsto x_1 = T_\lambda(x_0) = \varphi(2\pi, x_0, \lambda) \quad (2.1)$$

で定義する。

[補題 1] T_λ の点 (x_0, λ) における x_0 および λ に関する微分:

$$DT_\lambda(x_0) = \frac{\partial T_\lambda}{\partial x_0} \Big|_{x=x_0, \lambda=\lambda}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x_0 \partial \lambda}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial \lambda^2}, \dots$$

などは (1.2) の初期値およびパラメータに関する変分方程式の解を用いて表わすことができる。

この補題は以下 Newton 法を用いて方程式を解く際 Jacobi 行列を計算する場合に繰返し使用する。

さて T_λ の不動点を与える方程式は次式で与えられる。

$$f(x, \lambda) \triangleq T_\lambda(x) - x = 0 \quad (2.2)$$

また不動点 x における特性方程式は

$$g(x, \lambda, \mu) \triangleq \det(DT_\lambda(x) - \mu I) = 0 \quad (2.3)$$

である。 T_λ の不動点の分岐は (2.3) の根が 1 かつ μ_0 附近の条件を満たす場合に生じる。

[分岐の基本形]

- (i) $\mu_0 = 1$ とする分岐: 不動点の発生あるいは消滅, D-型 branching.
- (ii) $\mu_0 = -1$ とする分岐: I-型 branching.
- (iii) $\mu_0 \neq 1, -1$ で $|\mu_0| = 1$: Hopf 分岐

[(ii), (iii) の分岐集合の計算]

(2.2) を相空間 $\mathbb{R}^n$ とパラメータ空間 $\mathbb{R}^2$ の直積 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^2$ の写像

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ の零点を定める方程式と考えると (ii), (iii) の分岐に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D T_{\lambda}(x) - I$$

は正則となるので陰関数の定理から, 不動点 x の近傍で f の零点集合, すなわち T_{λ} の不動点は

$$x = \bar{f}(\lambda) \quad (2.4)$$

と表わされる曲面となる。従って (ii), (iii) の分岐集合は (2.4) の曲面上で $\mu_0 = -1$, $|\mu_0| = 1$ を満足する曲線系を求め, これを $\mathbb{R}^3$ の x - λ 平面に射影してできる集合として計算できる。

【命題 1】 (x_0, λ_0, μ_0) を (2.2), (2.3) を満足する点とし, $\mu_0 \neq 1$ とする。

また (2.3) は (x_0, λ_0) を固定し, μ について $\mu = 1$ を根として持たないものと仮定し, かつ μ_0 は (2.3) の単根とする。このとき $\partial \mu_0 / \partial \lambda_1 |_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$ あるいは $\partial \mu_0 / \partial \lambda_2 |_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$ ならば

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_{x=x_0, \lambda=\lambda_0, \mu=\mu_0} = n+1 \quad (2.5)$$

である。

従って具体的に分岐曲線を求めるには (2.2) および $g(x, \lambda, \mu_0) = 0$ を未知数 (x, λ_1) あるいは (x, λ_2) について Newton 法を用いて解けばよい。このとき Jacobi 行列は補題 1 を用いて計算する。

【(i) の分岐集合の計算】

分岐集合の計算で問題となるのはこの場合である。以下 $\mu_0 = 1$ が (2.3) の単根となる場合: $\text{rank} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_0, \lambda=\lambda_0} = n-1$ の場合を

とりあげ、更に

$$\text{rank} \left[\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right]_{x=x_0, \lambda=\lambda_0} = n \quad (2.6)$$

が成り立つ系を考える。

$$J(x, \lambda) \triangleq g(x, \lambda, 1) \quad (2.7)$$

とおく。

[命題2] (2.6)が成り立つとする。このとき(2.2), (2.7)を満足する点 $p =$

$(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ において

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = n+1 \quad (2.8)$$

が成立する。すなわち $J=0$ は(2.2)を満足する曲面に横断的であり、
交わりの集合は曲線となる。

$$\text{今 } \pi_\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, \lambda) \mapsto \pi_\lambda(x, \lambda) = \lambda \quad (2.9)$$

を $\mathbb{R}^2$ 上 x - λ 平面への射影とて、

$$M = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \mid f(x, \lambda) = 0 \}$$

$$\Sigma = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \mid f(x, \lambda) = 0, J(x, \lambda) = 0 \}$$

とおきこれを π_λ の不動点集合、一般横断的目形集合と呼ぶことに
する。また $\pi_\lambda(\Sigma)$ を π_λ の不動点集合と呼ぶ。以下 $\pi_\lambda(\Sigma)$ を具体的に
計算したい。

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2; s \mapsto \phi(s)$ を Σ の C^2 級 $\mathbb{R}^2$ 上 x - λ 付け"あるとて、 p
 $\in \Sigma$ で $p = \phi(0)$ となっているものとする。

[定義1] Σ 上の点 $p = (x, \lambda)$ は

- (i) $\frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) \neq 0$ ならば π_λ の折れ目点 (fold point),
 (ii) $\frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) = 0$ であるが $\frac{d^2}{ds^2}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) \neq 0$ ならば π_λ の尖点 (cusp point) と呼ぶ。

この定義を Σ の接ベクトル W でおわち

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = W(\phi(s)) \quad (2.10)$$

を満足するベクトル場 W と π_λ の W 方向への Lie 微分:

$$L_W \pi_\lambda(p) = D\pi_\lambda \cdot W(p) = \frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0)$$

を用いて書き直すと

[定義 2] 点 $p \in \Sigma$ は

- (i) $L_W \pi_\lambda(p) \neq 0$ ならば折れ目点,
 (ii) $L_W \pi_\lambda(p) = 0$ であるが $L_W L_W \pi_\lambda(p) \neq 0$ ならば尖点である。

そこで点 $p \in \Sigma$ が折れ目点, 尖点かどうかを調べるか, またこれらの点を具体的に計算するためベクトル場 W を (2.2), (2.7) を用いて定めよう。今 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n, w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$ とし

$$A(x_i) = (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_n} & \frac{\partial J}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial J}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

とおく。ここに $\wedge$ はその行列をとり除くことを意味する。式 (2.2), (2.8) より

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial x} dx + \frac{\partial J}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

W は $(dx, d\lambda)$ 方向のベクトルであるから

$$\frac{w_1}{A(x_1)} = \dots = \frac{w_i}{A(x_i)} = \dots = \frac{w_{\lambda_1}}{A(\lambda_1)} = \frac{w_{\lambda_2}}{A(\lambda_2)} \quad (2.12)$$

そこで W の 1 例として各成分を

$$w_1 = A(x_1), \dots, w_n = A(x_n), w_{\lambda_1} = A(\lambda_1), w_{\lambda_2} = A(\lambda_2) \quad (2.13)$$

と選ぶと

$$L_W \pi_\lambda(p) = (w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$$

$$L_W L_W \pi_\lambda(p) = \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_2}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \right)$$

となる。従って

[命題 3] $p = (x, \lambda) \in \Sigma$ とする。

- (i) p が折り目形点ならば $w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}$ の両者が同時に零となることはない,
- (ii) p がくさび形点ならば

$$(a) w_{\lambda_1} = 0 \text{ かつ } w_{\lambda_2} = 0 \text{ であり,}$$

$$(b) \sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i}, \sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i} \text{ の両者が同時に零になることはない。}$$

[未知数集合の計算法]

- (i) 折り目形点: (2.2), (2.7) を (x, λ_1) あるいは (x, λ_2) について解く,
- (ii) くさび形点: (2.2), (2.7) および $w_{\lambda_1} = 0$ (あるいは $w_{\lambda_2} = 0$) を (x, λ) について解く。

命題 3 はこれらの方程式系の Jacobi 行列式が零とならないことをいっている。

したがって Newton 法により折り目形点, くさび形点を求めることができる。

(2.2) homoclinic 点の発生に関する分岐集合 (2次元非自律系の例)

Poincaré 写像 T_λ (2次元) が正不安定不動点 D ($0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$) を持つとし, 点 D の α 枝, ω 枝が接して homoclinic 点が発生するパラメータ λ の値 $\lambda = \lambda_0$ を計算する。

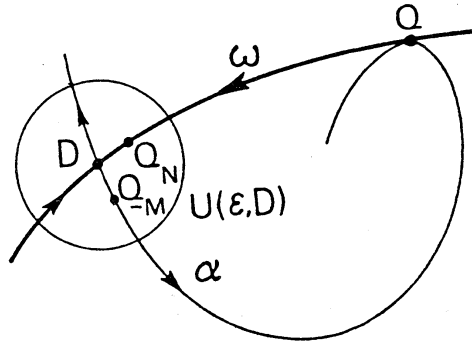
点 $D \in \mathbb{R}^2$ を正不安定不動点とする:

$$T_\lambda(D) - D = 0 \quad (2.14)$$

D の ε 近傍 $U(\varepsilon, D)$ をとり, その内部で α 枝, ω 枝の局所表現を計算する:

$$\alpha \text{ 枝: } g_\alpha(x-D) = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega \text{ 枝: } g_\omega(x-D) = 0$$



これらの枝を T_λ で $\mathbb{R}^2$ 内にのばし点 Q で両枝が接して homoclinic 点が生じたとしよう (上図参照)。適当な正の整数 M, N をとれば

$$Q_{-M} \triangleq T_\lambda^{-M}(Q) \in U, \quad Q_N \triangleq T_\lambda^N(Q) \in U$$

とできる。すなわち

$$g_\alpha(Q_{-M}-D) = 0, \quad g_\omega(Q_N-D) = 0, \quad Q = T_\lambda^M(Q_{-M}) = T_\lambda^N(Q_N)$$

次に点 Q で両枝の接ベクトルの方向が一致する条件を求める。まず U

内で α 枝のパラメータ付け, すなわち α 枝を曲線 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; s \mapsto \phi(s)$ で表わす。ここに $\phi(0) = D, \phi(s_\alpha) = Q_{-M}$ とする。今 $\mathbb{R}^2$ のベクトル場で曲線

$$\phi \text{ について } \frac{d\phi}{ds}(s) = W(\phi(s))$$

を考えると, 点 Q における α 枝の接ベクトルは

$$\left. \frac{d(T_\lambda^M \circ \phi)}{ds} \right|_{s=s_\alpha} = DT_\lambda^M(\phi(s_\alpha)) \frac{d\phi}{ds}(s_\alpha) = DT_\lambda^M(Q_{-M}) W_\alpha$$

とする。ここに $W(\phi(s_\omega)) = W_\omega$ とおいた。 W_ω は g_α を使って計算できる。

同様に ω 枝を曲線 $\psi(s)$ で表わし $d\psi/ds(s) = V(\psi(s))$ とすると

点 Q における ω 枝の接ベクトルは

$$\frac{d(T_\lambda^{-N} \circ \psi)}{ds} \Big|_{s=s_\omega} = DT_\lambda^{-N}(Q_N) V_\omega$$

で与えられる。ここに $\psi(s_\omega) = Q_N$, $V(\psi(s_\omega)) = V_\omega$ とおいた。従って点

Q における接ベクトルが同じ方向を向く条件として次式を得る

$$\det [DT_\lambda^M(Q_M) W_\alpha : DT_\lambda^{-N}(Q_N) V_\omega] = 0 \quad (2.16)$$

以上のことから

[分岐点 α のラクス-タの計算]

$$T_\lambda(D) - D = 0 \quad (2.17)$$

$$T_\lambda^M(Q_M) - T_\lambda^{-N}(Q_N) = 0 \quad (2.18)$$

$$g_\alpha(Q_M - D) = 0, \quad g_\omega(Q_N - D) = 0 \quad (2.19)$$

式(2.16) ~ (2.19)を未知数: 点 D , Q_M , Q_N の座標およびラクス-タ λ

(この場合は λ をスカラーとする) について解けばよい。整数 M, N はあらかじめ定めておく。

3. 分岐集合の計算例

電気回路のモデルとしてよく知られた Duffing 方程式:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos t + B_0 \quad (3.1)$$

および Duffing-van der Pol 方程式 (DVP 方程式):

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \nu t \quad (3.2)$$

と例にとり, 不動点, homoclinic 点の分岐集合を計算した結果を以下図示した。 (3.1), (3.2) を $\dot{x}=y, \dot{y}=f(x,y,t)$ と書き直し, $T_\lambda[(3.1)]$ については周期 2π , (3.2) については周期 $2\pi/\lambda$ を定義した。

文献

- 1) 川上, 小林: 周期的外力を加えた非線形回路にみられる周期振動とその分岐
電子通信学会論文誌 A, Vol. J-63-A, No. 11, 1980.
- 2) 川上, 小林: 非線形方程式に現われる分岐集合の計算, *ibid.* J-64-A, No. 1, 1981.
- 3) 川上: 非線形回路にみられる分岐集合の大域的性質, *ibid.* J-64-A, No. 9, 1981
- 4) 川上, 勝田: クラ型平衡点のセパトリクス閉路の計算, *ibid.* J-64-A, No. 10, 1981
- 5) " : 3階ダンピング方程式のホップ分岐とカオス, *ibid.* J-64-A, No. 11, 1981
- 6) 川上, 松尾: I型分岐により生じる周期運動の安定性基準, *ibid.* J-64-A, No. 11, 1981
- 7) 川上, 松尾: ダンピング方程式にみられる周期解の分岐集合, *ibid.* J-64-A, No. 12, 1981
- 8) " : 多重漸近運動の一計算法, *ibid.* J-64-A, No. 12, 1981
- 9) " : 非線形系にみられる多重漸近運動の分岐, *ibid.* 投稿中
- 10) 川上, 勝田: 同期化問題に関連した2次元自律系の動的性質, *ibid.* 投稿中.

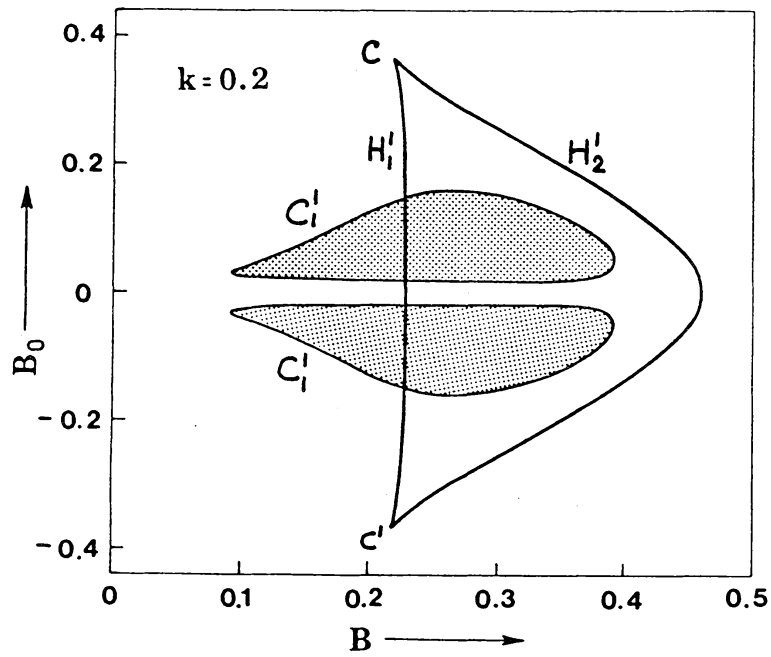


図1. Duffing方程式(3.1)の分岐集合

H_1', H_2' : 折れ目形集合

C, C' : ぐい形線

C_1' : I-型 branching.

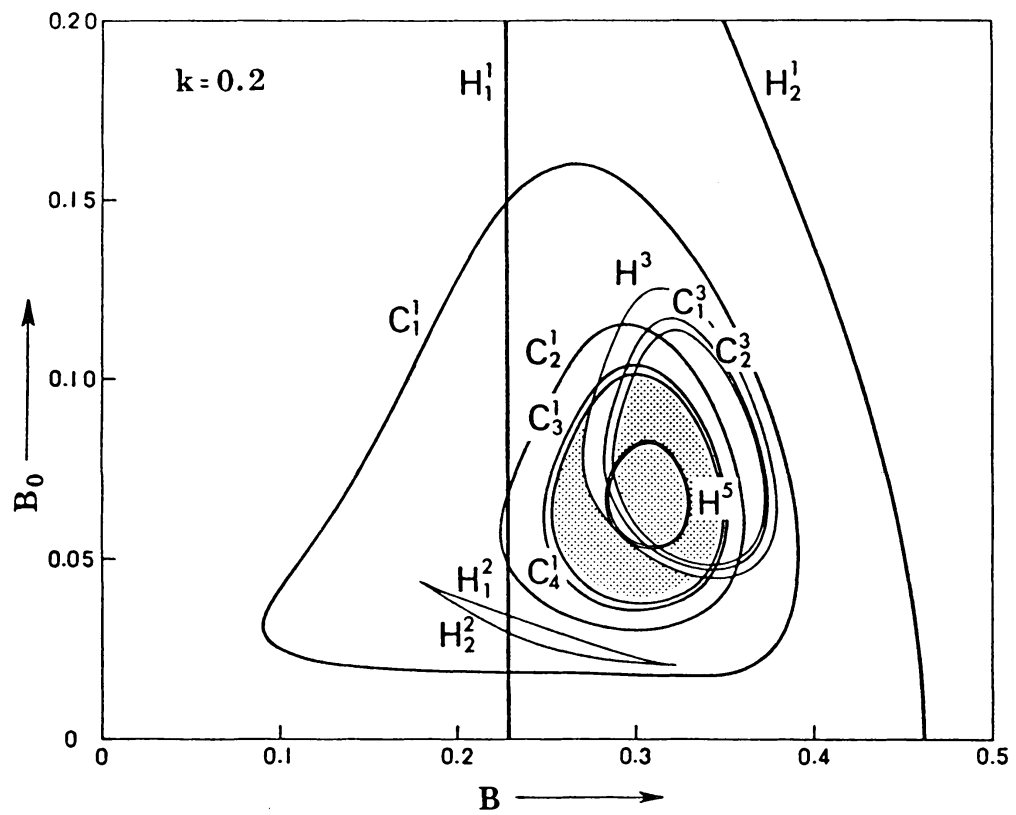


図2. Duffing方程式の分岐集合. H^i : i -周期点の折れ目形集合.

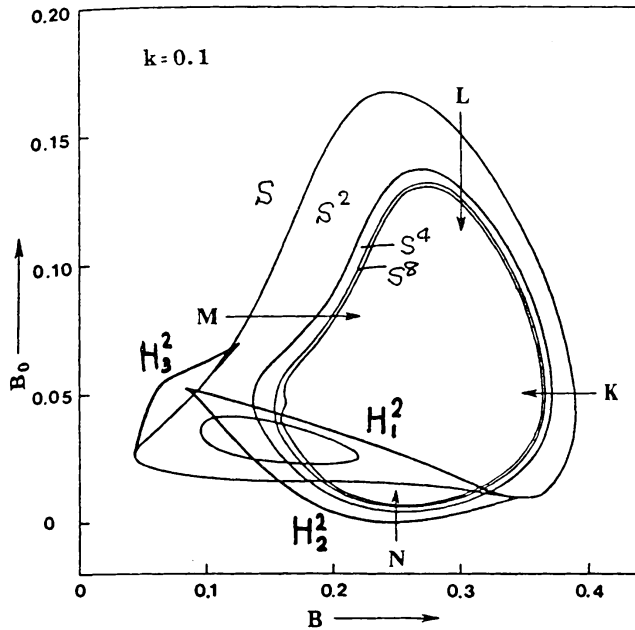


図3. Duffing 方程式の分岐集合.

I-型branching.

直線 K, L, M, N に沿って
パラメータを変化させた場合
安定な 2^m -周期解の存在
範囲の $\Delta\lambda_m$ を実験的に
得たものを図4.

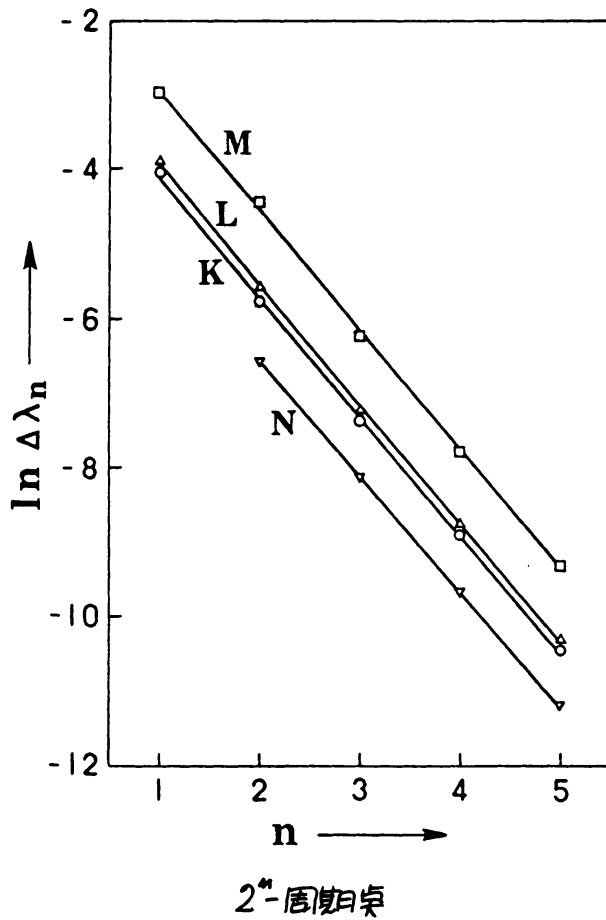


図4. I型branchingの進展.

$\Delta\lambda_m$: 2^m -周期解が安定に
存在するパラメータの範囲

$$\Delta\lambda_{n+1} = e^{-1.55} \Delta\lambda_n \quad (\text{実験式})$$

が成り立つ。したがってこの例では
パラメータの有限範囲で $n \rightarrow \infty$ へ
I型branchingが進展していると
考えられる。

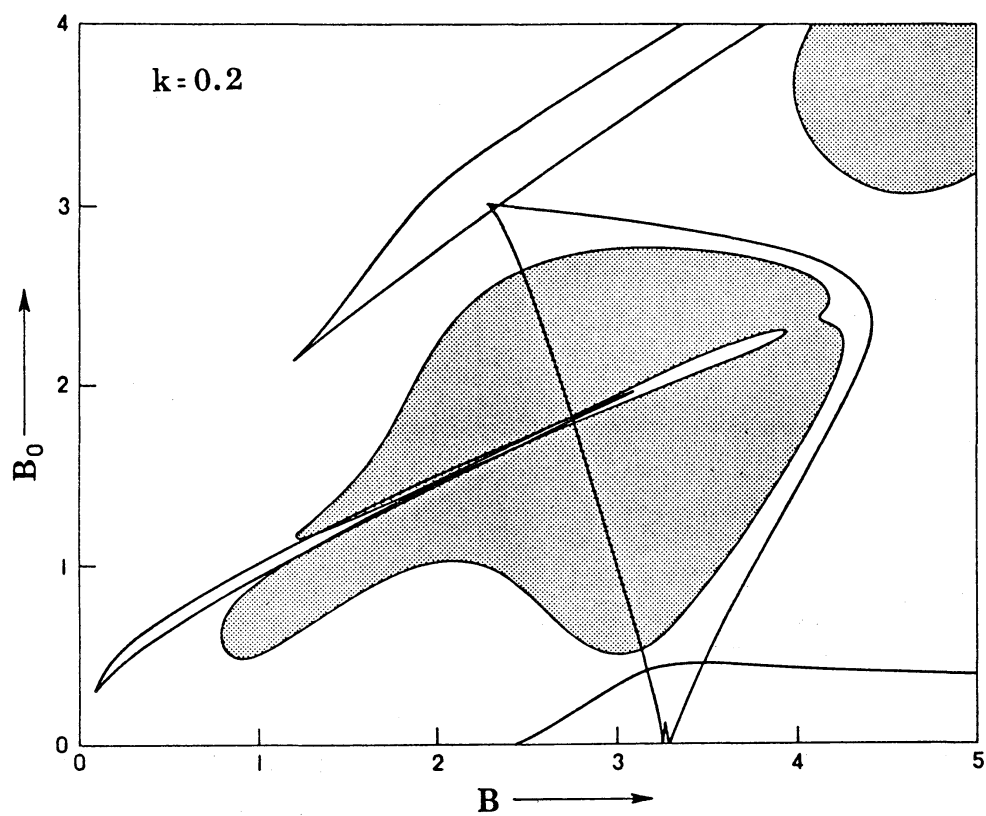


図5(a)

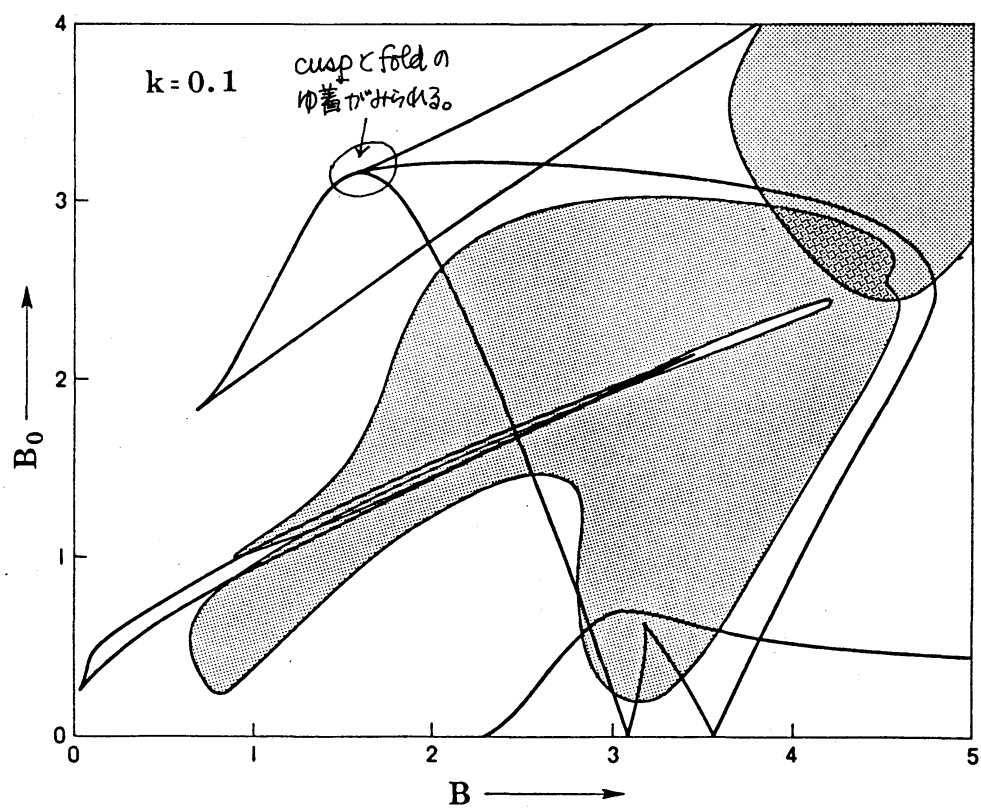


図5(b)

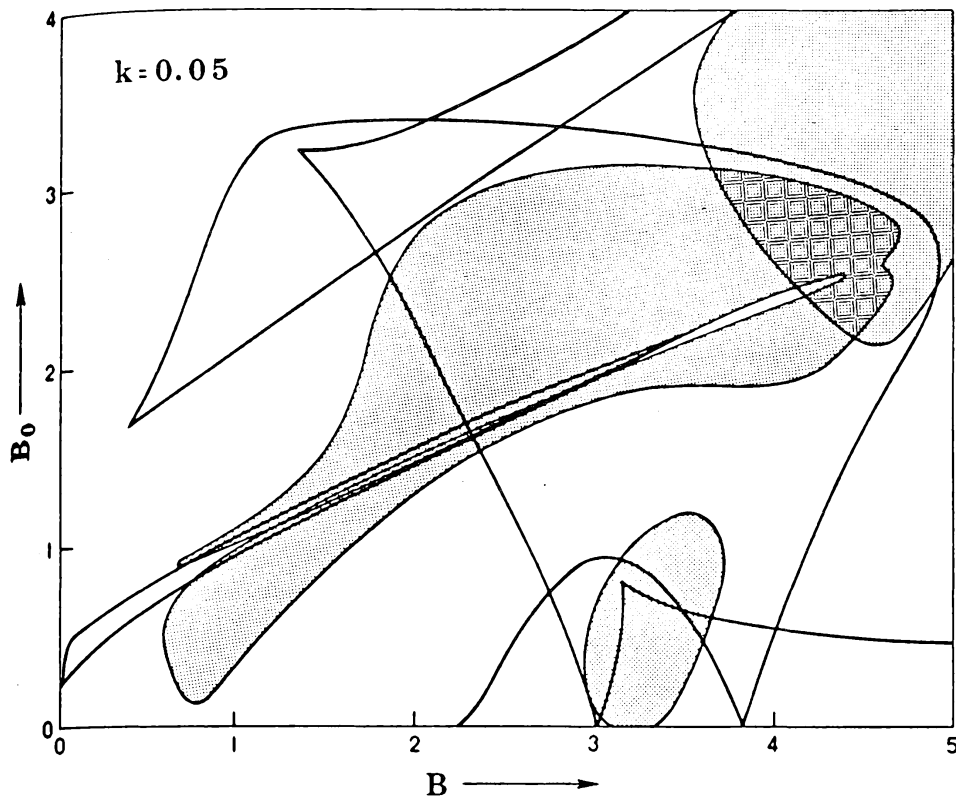


図5(c)

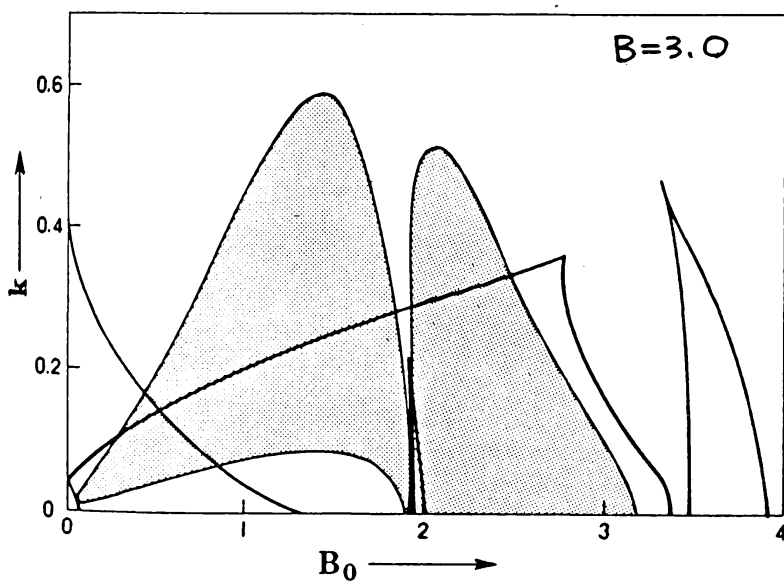


図5(d)

図5 Duffing 方程式の分岐集合. $110^\circ \times 7$ 度と変化した場合の分岐集合の変化 (a) ~ (c); 実線: 折り目型集合, 網目領域の境界: I型branching.

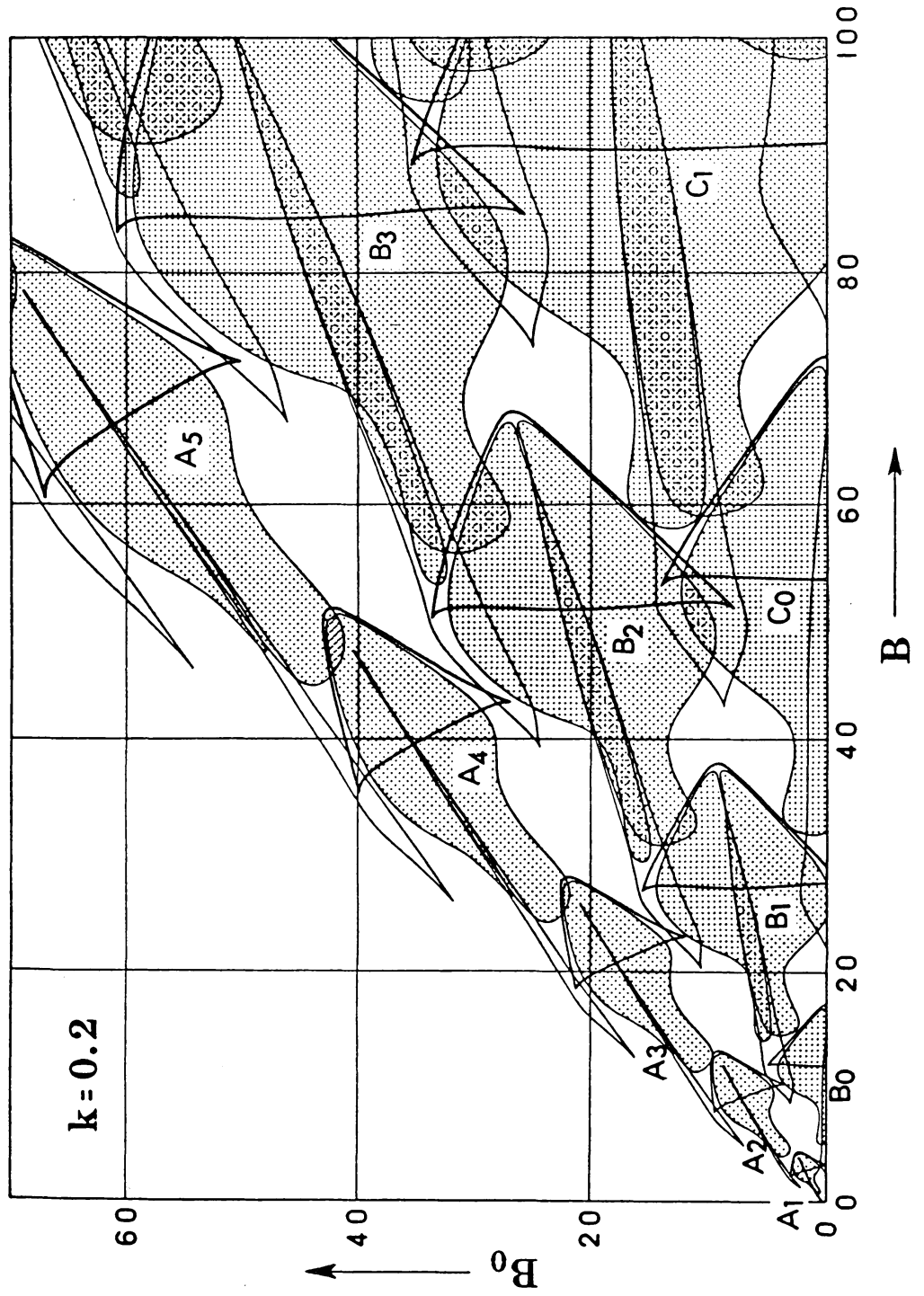


図6. Duffing 方程式の折れ目分岐, I型-branching.

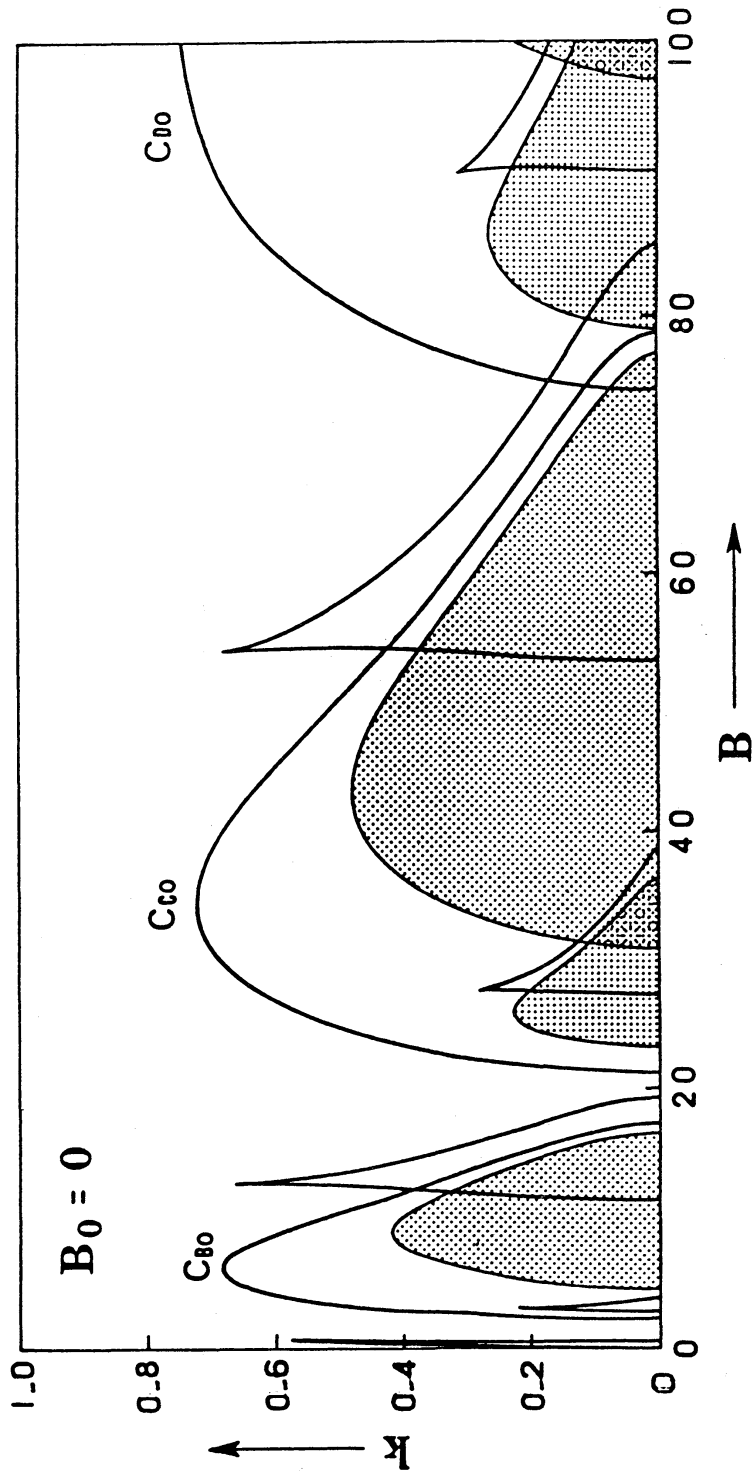


图 6 (b) 前型 $B_0 = 0$ の分岐図. $C_{B0}, C_{C0}, C_{B0}, C_{C0}$; cusp point の集合.

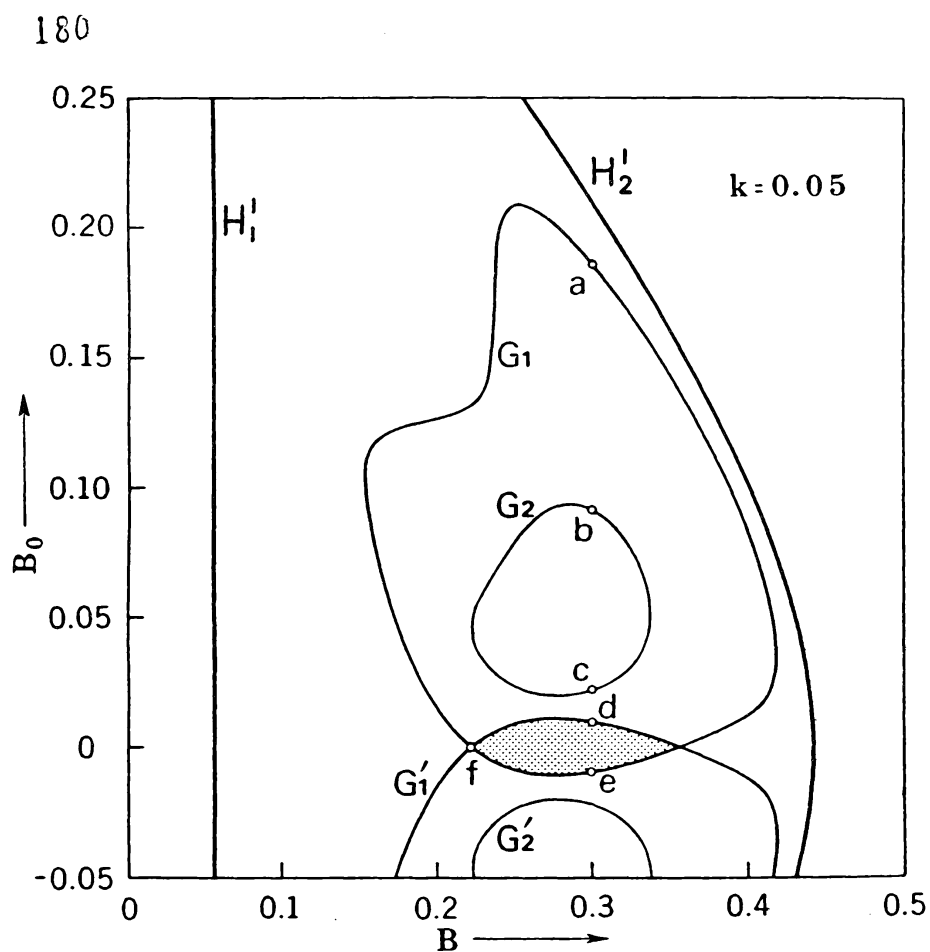


図7. Duffing方程式
 ホモクリニック点の発生
 に関与する集合
 G_1, G_1', G_2 .
 点(a)~(f)の T_λ に
 対応する phase portraits
 は図9.

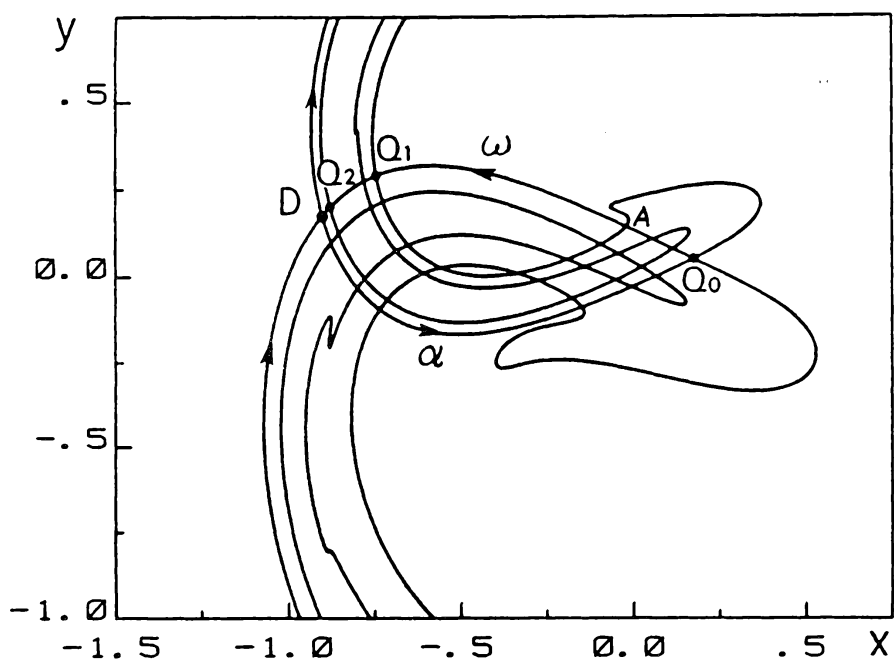


図8.
 不変点Dの α 軌, ω 軌.
 $B = 0.3$
 $B_0 = 0.05$
 $D \propto Q_0, \omega A \propto Q_1, \omega D$
 の領域 $\square$ は
 T_λ によって horseshoe
 型に写される。

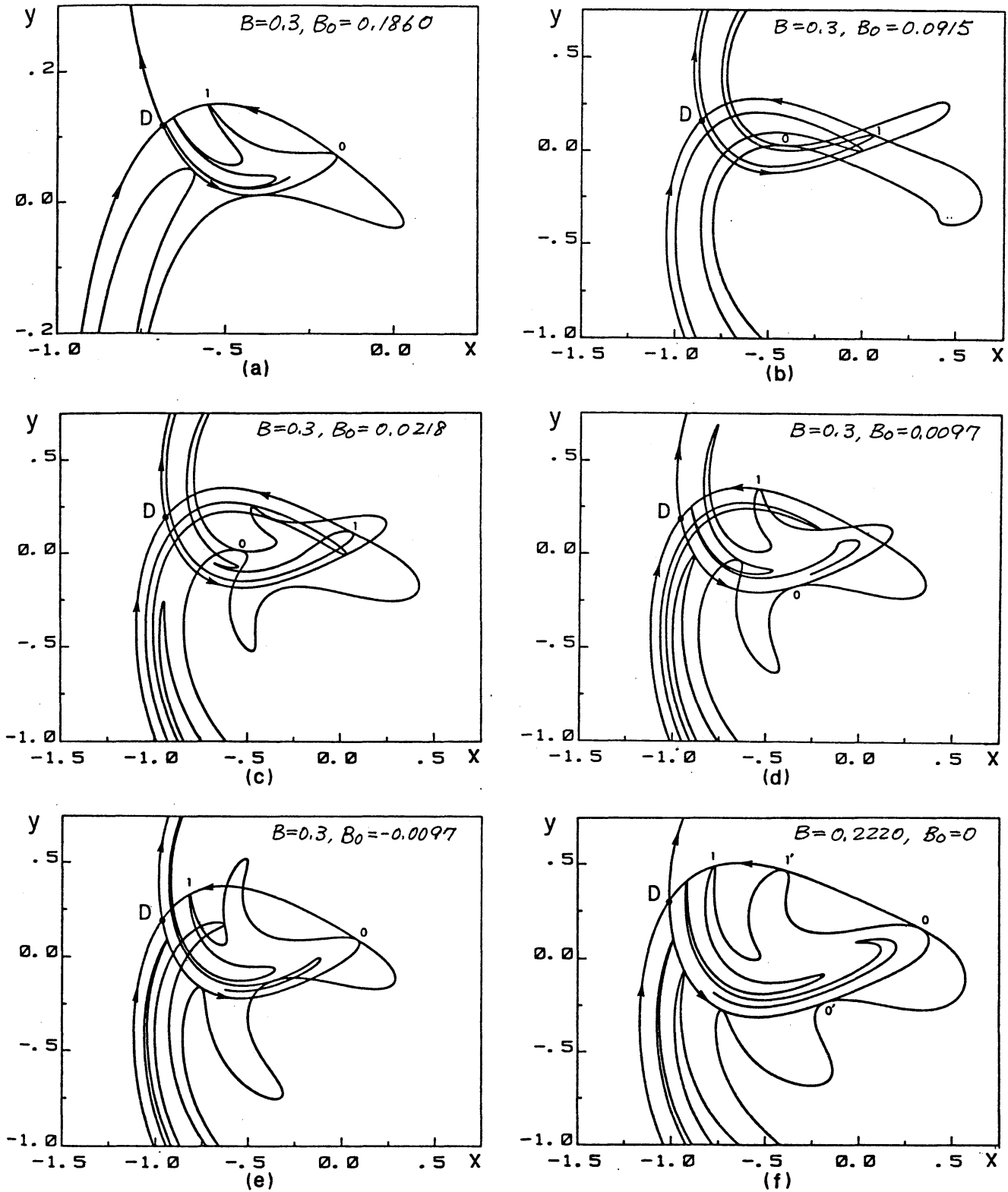


図9. 図7 (a)~(f)のphase portraits. 点0は T_λ で点1に写される。

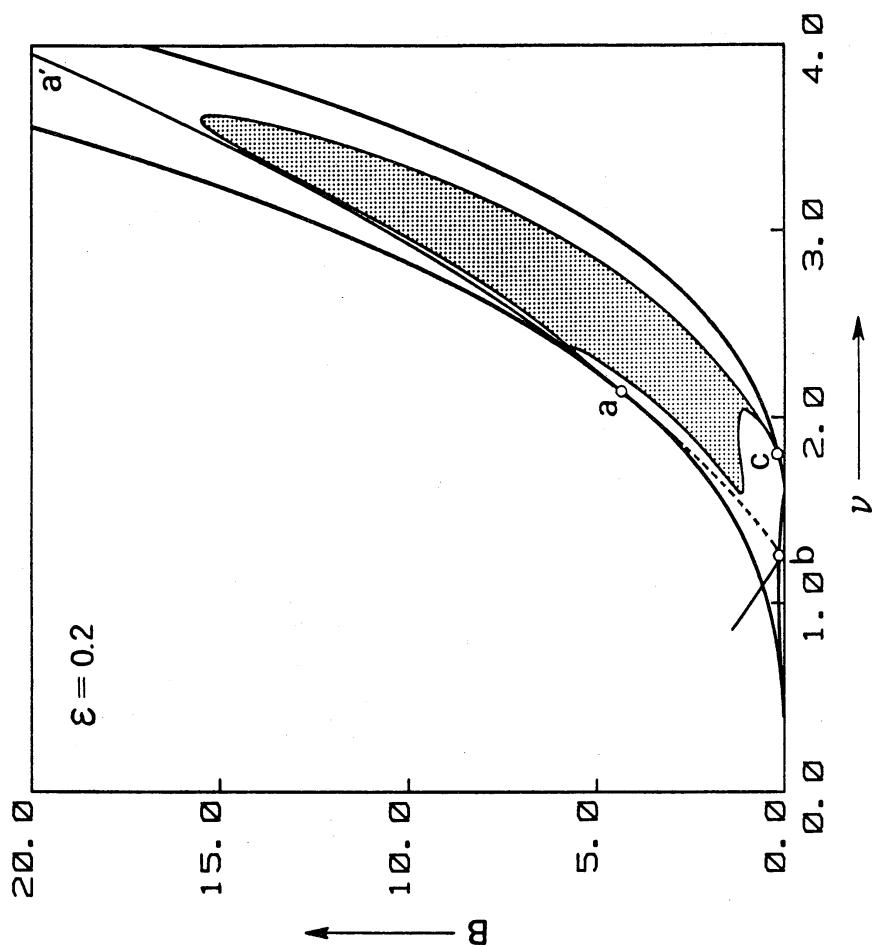


図11. DVP方程式のモクリニック表の分岐集合:
(分岐領域の境界), 分岐領域で
homoclinic 点が見える。

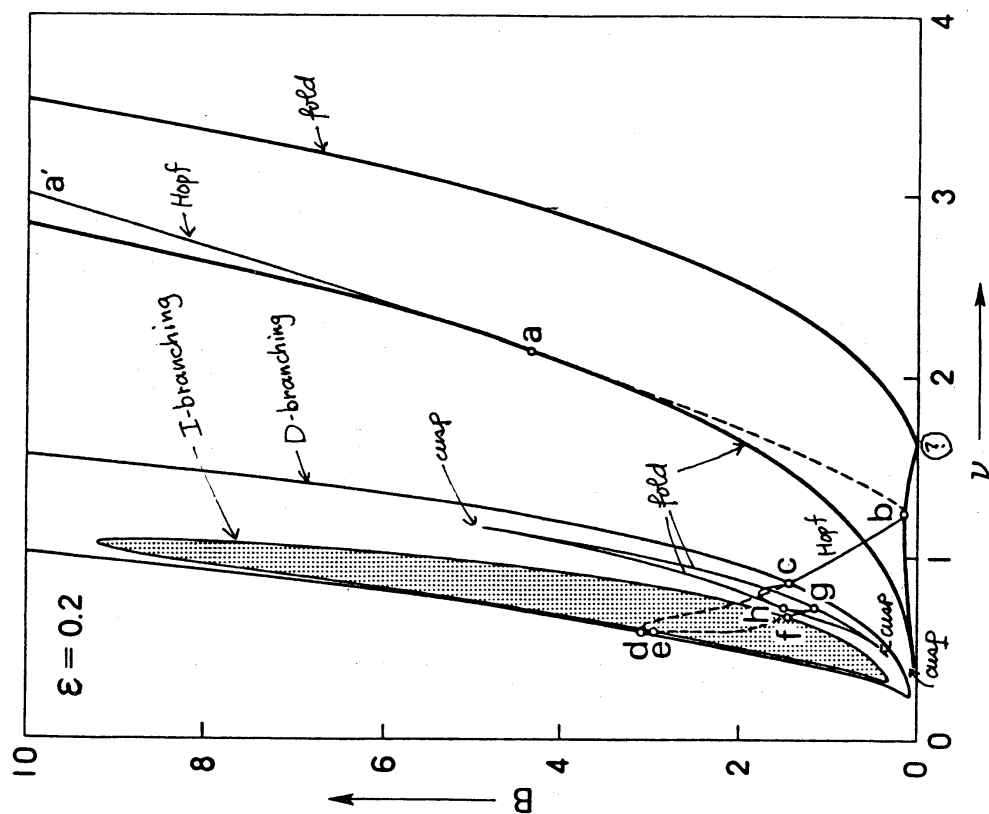


図10. DVP 方程式の分岐集合.

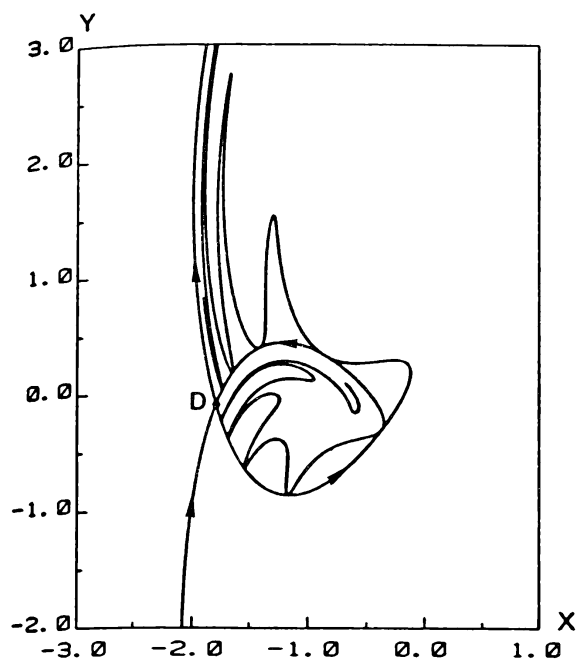
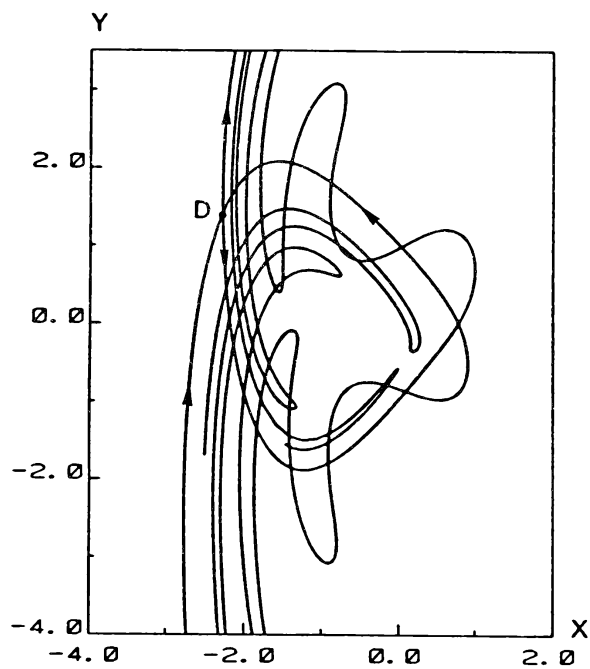
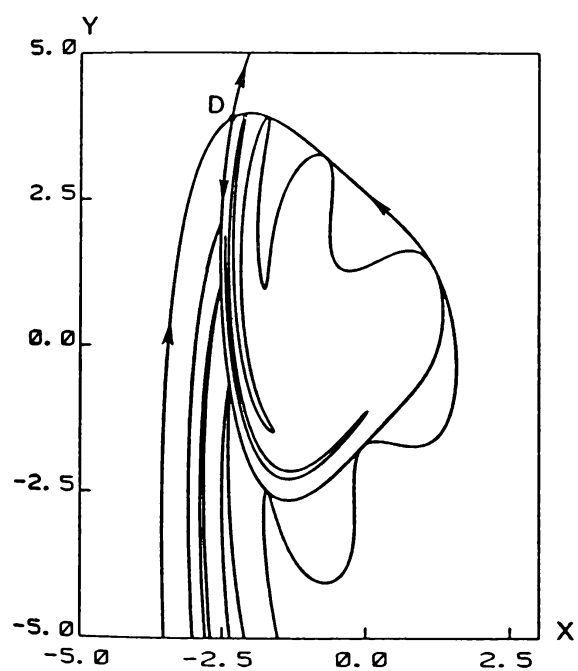
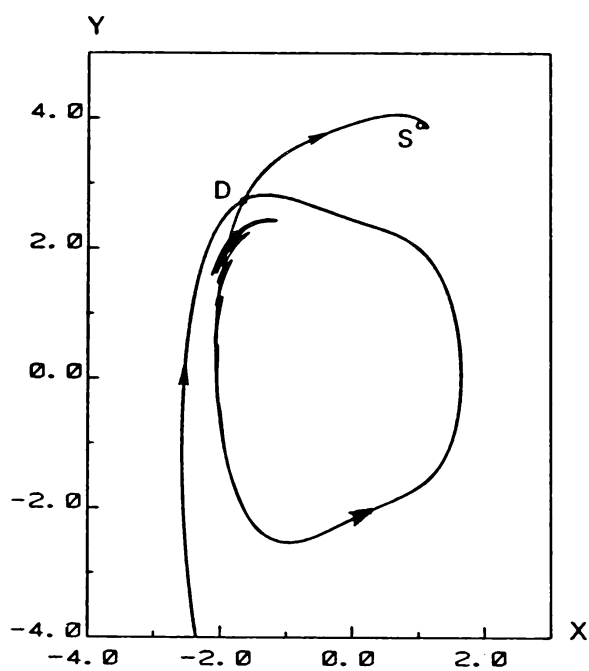
(a) $B=3.0$, $\nu=1.9999$ (b) $B=3.0$, $\nu=2.80$ (c) $B=3.0$, $\nu=2.5376$ (d) $B=0.5$, $\nu=1.9343$

图12. DVP方程式のphase portraits.