

Centers and defect groups of blocks of finite groups

千葉大学大学院理学研究科 音喜多 純拓

Yoshihiro Otokita

Graduate School of Science,

Chiba University

序論

本稿は RIMS 研究集会「有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究」(2016 年 12 月)における講演内容の解説, 要約である.

本研究では群環の中心の代数的構造について, その Loewy 構造を用いて考察する. 以下では G を有限群, F を素数標数 $p > 0$ を持つ代数的閉体とする. このとき群環 FG の両側イデアルとしての直既約因子を " FG のブロック" という. 各ブロック B に対し, その "不足群" と呼ばれる p -群が定義される. 有限群のモジュラー表現論において「ブロック B の代数的構造と不足群 δ_B の群論的性質の関係を解明する」という問題が考えられている. 例えば δ_B が自明なときや巡回群の場合などは B の構造がよく知られている. 本研究では上の問題から派生する「ブロックの中心 ZB と δ_B の関係」について考える. 例えば Brauer 予想は G の通常既約指標の個数に関する予想だが, これは「 $\dim_F ZB \leq |\delta_B|$ だろうか?」という ZB の次元と δ_B の位数に関する予想に言い換えることができる. 本稿では ZB を考察する手段として, その Loewy length, すなわち ZB の Jacobson 根基 JZB のべき零指数 $\text{ll}ZB$ を用いる. Okuyama [11] は $\text{ll}ZB$ の上限が $|\delta_B|$ で与えられることを述べた. 一般に $\text{ll}ZB \leq \dim_F ZB$ であるから, Brauer 予想が正しければ, Okuyama の結果はこの系として得られる. 本研究の目的はこの不等式の精密化である. 不足群 δ_B が巡回群, および可換群のときは, それぞれ Koshitani-Külshammer-Sambale [6], Külshammer-Sambale [8] によって良い上限が与えられているので, 本稿では非巡回群, および非可換群の場合について述べる.

ここで本稿で用いる記号, 表記を述べる. G の共役類全体の集合を $\text{Cl}(G)$ とする. 各 $C \in \text{Cl}(G)$ に対し, その class sum $C^+ := \sum_{g \in C} g$ が FG の元として定義される. また $g \in C$ の中心化群 $C_G(g)$ の Sylow p -部分群の 1 つ δ_C を固定し, " C の不足群" と呼ぶ (これは $g \in C$ の選び方に依らない). 整数 $m, n \geq 1$ に対し, 位数 m の巡回群を $\mathbb{Z}_m$, 2 つの巡回群の直積を $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ とする.

1 有限群のブロック

本章ではまず有限群のブロックの定義を示す. 序論で述べた通り, G を有限群, F を素数標数 $p > 0$ を持つ代数的閉体とし, それらから構成される群環を FG とする.

定義 1.1. 群環 FG は以下のように分解できる:

$$FG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m.$$

ここで各 $B_1, \dots, B_m$ は両側イデアルとして直既約である. このとき各直和因子 $B_1, \dots, B_m$ を FG のブロッ

クという。この分解には FG の単位元 e の中心的原始べき等元への分解

$$e = e_1 + \cdots + e_m$$

が対応し, $B_i = FGe_i$ を満たす。

次に各ブロックに対して, その不足群を定義する。 FG の中心 ZFG は class sum 全体を F 上の基底に持つことが知られている:

$$ZFG = \bigoplus_{C \in \text{Cl}(G)} FC^+.$$

FG のブロック B に対し, 対応する中心的原始べき等元を e_B とすると, これは ZFG の元であるから

$$e_B = \sum_{C \in \text{Cl}(G)} \beta_C \cdot C^+ \quad (1.1)$$

となる $\beta_C \in F$ が存在する。このとき次を満たす $C \in \text{Cl}(G)$ が存在する。

補題 1.2 ([10, V, Lemma 1.7]). (1.1) の表示に対し, 次の 2 条件を満たす $C \in \text{Cl}(G)$ が存在する。

- (1) $\beta_C \neq 0$.
- (2) $\beta_{C'} \neq 0$ となる任意の $C' \in \text{Cl}(G)$ に対して, δ_C は $\delta_{C'}$ のある G -共役を含む。

(2) より上の条件を満たす δ_C は G -共役を除いて一意に定まる。その 1 つを δ_B と書き, " B の不足群 " という。序論で述べたようにブロック B とその不足群 δ_B には代数的な関係性があると考えられている。例えば次が成り立つ。

定理 1.3 ([10, III, Theorem 6.37]). 以下は同値である。

- (1) $\delta_B = 1$.
- (2) B は単純環である。

不足群が巡回群の場合には次が成り立つ。

定理 1.4 (Rickard [15]). 不足群 δ_B が巡回群ならば, ある $\text{Aut}(\delta_B)$ の p' -部分群 $\mathbb{Z}_l$ (すなわち $\mathbb{Z}_{p-1}$ の部分群) が存在し, B と $F[\delta_B \rtimes \mathbb{Z}_l]$ が導来同値となる。

この他, $\delta_B \simeq \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^n}$ の場合も B の構造が決定されている (Erdmann [3], Eaton-Kessar-Külshammer-Sambale [2]).

2 ブロックの中心

本研究の目的はブロック B の中心 ZB を考察することである。まず次の基本的な性質を確認する。

命題 2.1. ブロックの中心 ZB は局所環である。

上の命題から Jacobson 根基 JZB は ZB のただ 1 つの極大イデアルである。ここで ZB の Loewy length を定義する。

定義 2.2. JZB のべき零指数を $\text{ll}ZB$ とする。すなわち,

$$\text{ll}ZB := \min\{n \geq 1 \mid JZB^n = 0\}.$$

この定義を用いると定理 1.3 を ZB に関する条件で表せる。

定理 2.3. 以下は同値である.

- (1) $\delta_B = 1$.
- (2) $ZB \simeq F$.
- (3) $\text{ll}ZB = 1$.

本研究の動機は Okuyama [11] による次の結果であった.

定理 2.4 (Okuyama [11]). B を FG のブロック, δ_B をその不足群とすると, $\text{ll}ZB \leq |\delta_B|$.

また以下は同値である.

- (1) $\text{ll}ZB = |\delta_B|$.
- (2) B はべき零ブロックで δ_B は巡回群.

ここでは”べき零ブロック”の定義には言及しないが, 上の (1), (2) は「 B は位数 $|\delta_B|$ の巡回群の群環と森田同値である」という条件と同値となる (Broué-Puig [1], Puig [14] 参照). このとき $n = |\delta_B|$ とすると ZB は $F[X]/(X^n)$ と同型になる.

本研究では「不足群 δ_B の群論的性質を用いて, 不等式 $\text{ll}ZB \leq |\delta_B|$ を精密化できるか?」という問題を考えた. 例えば δ_B が巡回群, 可換群の場合は次の結果がある.

定理 2.5 (Koshitani-Külshammer-Sambale [6]). δ_B が巡回群のとき,

$$\text{ll}ZB = \frac{|\delta_B| - 1}{l} + 1 \leq |\delta_B|.$$

ここで l は定理 1.4 によって定まる整数 $1 \leq l \leq p-1$ である.

定理 2.6 (Külshammer-Sambale [8]). δ_B が $(p^{a_1}, \dots, p^{a_r})$ 型の可換群のとき,

$$\text{ll}ZB \leq p^{a_1} + \dots + p^{a_r} - r + 1 \leq |\delta_B|.$$

ここで $\text{ll}ZB$ に関する 1 つの予想を述べたい. そのために有限 p -群 P の群環 FP の Loewy length を考える. このとき FP は局所環であり, したがって ZB と同様ただ 1 つの極大イデアル JFP を持つ. FP の Loewy length, すなわち JFP のべき零指数を Wallace[16] に従って $t(P)$ と書くことにする:

$$t(P) := \min\{n \geq 1 \mid JFP^n = 0\}.$$

P の構造を用いて $t(P)$ を計算する方法が Jennings[4] によって与えられているが, 準備を要するのでここでは省略する. $t(P)$ の基本的な性質は次の命題である.

命題 2.7 (Wallace [16]). $|P| = p^n$ のとき, $n(p-1) + 1 \leq t(P) \leq p^n$.

ここで P が $(p^{a_1}, \dots, p^{a_r})$ 型の可換群の場合を考える. すると Motose[9] より,

$$\begin{aligned} t(P) &= t(\mathbb{Z}_{p^{a_1}}) + \dots + t(\mathbb{Z}_{p^{a_r}}) - r + 1 \\ &= p^{a_1} + \dots + p^{a_r} - r + 1. \end{aligned}$$

よって定理 2.6 に基づいて次を予想できる. この予想は Külshammer-Sambale[8] でも言及されている.

予想 2.8. 任意のブロック B に対して, $\text{ll}ZB \leq t(\delta_B)$ だろうか?

上の予想はすでにいくつかの場合で確かめられている (Külshammer-Sambale[8], Otokita[12]).

3 主結果

前章の定理 2.5, 2.6 より, 不足群 δ_B が非巡回群, および非可換群の場合が次の研究対象となる. 本研究ではその主結果として次を得た.

定理 3.1 (Otokita [13]). B を FG のブロックとし, その不足群 δ_B の位数を p^d とする. このとき次が成り立つ.

(1) δ_B が非巡回群のとき,

$$\text{l}ZB \leq p^{d-1} + p - 1.$$

(2) δ_B が非可換群のとき,

$$\text{l}ZB < p^{d-1}.$$

予想 2.8 が正しければ上の (1) はその系として導くことができる (Koshitani[5] 参照).

さて, 講演で述べた主結果は以上であるが, 最近新たな結果を得たので最後にそれについて述べたい.

定理 3.2 (Külshammer-Otokita-Sambale [7]). 用いる記号は定理 3.1 と同様とする. δ_B が非可換群のとき, 次のいずれかが成り立つ.

(1) $\text{l}ZB < 3p^{d-2}$.

(2) $p \geq 5$,

$$\delta_B \simeq \langle x, y, z \mid x^{p^{d-2}} = y^p = z^p = [x, y] = [x, z] = 1, [y, z] = x^{p^{d-3}} \rangle$$

で $\text{l}ZB < 4p^{d-2}$.

上の (1), (2) いずれの場合も $\text{l}ZB < \min\{p^{d-1}, 4p^{d-2}\}$ を満たす.

参考文献

- [1] M. Broué, L. Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117–128.
- [2] C. Eaton, R. Kessar, B. Külshammer, B. Sambale, *2-blocks with abelian defect groups*, Adv. Math. **254** (2014), 706–735.
- [3] K. Erdmann, *Blocks whose defect groups are Klein four groups: a correction*, J. Algebra **76** (1982), 505–518.
- [4] S. A. Jennings, *The structure of the group ring of a p -group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.
- [5] S. Koshitani, *On the nilpotency indices of the radicals of group algebras of p -groups which have cyclic subgroups of index p* , Tsukuba J. Math. **1** (1977), 137–148.
- [6] S. Koshitani, B. Külshammer, B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.
- [7] B. Külshammer, Y. Otokita, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, arXiv:1703.01917v1.
- [8] B. Külshammer, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks*, arXiv:1607.06241v2.
- [9] K. Motose, *On C. Loncour's results*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 570–571.
- [10] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA (1989).
- [11] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.

- [12] Y. Otokita, *Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [13] Y. Otokita, *On centers of blocks with non-cyclic defect groups*, arXiv:1611.06058v1.
- [14] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77–116.
- [15] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.
- [16] D. A. R. Wallace, *Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite p -soluble group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **16** (1968/69), 127–134.