

Balasubramanian の Multiple integration process について.

立教大・理 松本 耕二

(Kohji MATSUMOTO)

R. Balasubramanian は [1] において, ある種の二重指数和を評価する新しい技法を開発して "Multiple integration process" (以下, 本稿では M.I.P. と略記) と名づけ, Riemann zeta 函数の二乗平均の残余項の評価に応用した. [1] で扱われた問題は,

$$\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2 dt = T \log T - (1 + \log 2\pi - 2\gamma)T + O(T^{\theta+\varepsilon})$$

(ここに γ は Euler の定数, ε は任意に小さい正数) なる漸近式の残余項の改良であって, Balasubramanian は $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ に関する当時最高の評価であつた $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^{\frac{173}{1067}+\varepsilon})$ (Kolesnik [2]) を M.I.P. と結びつけ, $\theta = \frac{346}{1067}$ をえた. これは, Titchmarsh [3] の結果 $\theta = \frac{5}{12}$ を, 殆んど半世紀ぶりに更新した大結果であつて, M.I.P. の輝かしい成果であつたといえよう.

(念のために注意しておくが, M.I.P. というのはむしろ技術的な手段であって, [1] における議論の流れは Titchmarsh のアイデアを踏襲したものである. 更にいえば, Titchmarsh もまた, Hardy-Littlewood 以来の流れに沿っているのである. 二乗平均に対する漸近式を (残余項 $O(T)$ の形で) はじめて出したのは Hardy-Littlewood [4] であって, それは近似函数等式に本質的に依存するものだ. その後 Ingham [5] は $\theta = \frac{1}{2}$ をえたが, これは近似函数等式を用いて [4] のアイデアに従う限りの自然限界ともいえる結果であって, それ以上 θ の値を改良するためには, 近似函数等式そのものの精密化が必要だった. それは 1932 年, Siegel [6] によってなされた. そしてその直後, 近似函数等式の代りにこの Riemann-Siegel formula を用いて, $\theta = \frac{5}{12}$ に達したのが Titchmarsh なのである)

M.I.P. が他の問題に対してどの程度有効なのかはまだよくわからないが, どうも Balasubramanian の方法そのままでは, 適当範囲はそれほど広いとはいえないようである. 大小比較をする必要性から, ある種の "係数が実数" という条件がいるし, またある場合には, 部分和法が使えなくなると議論が進行しなくなるケースもおこってくる. (この後者の事実は, Heath-Brown 氏から手紙で指摘されてはじめて知った) それにもかかわらず, 実と限らない任意の原始指標に関する L -

函数について[1]の結果の拡張が可能である([7], [8].).

も、と別の問題に対する応用として、最近筆者は、Dirichlet 級数に関する F. Carlson の定理が、ある場合には M. I. P. を用いて精密化できることを発見した([9]). これ以外に M. I. P. を使った研究があるかどうか、筆者は知らない.

論文[1]は、決して読みやすいものではなく、またその M. I. P. を用いた部分はかなり後の方 (pp. 564-570) に出てくるという事情もあるので、ここでは M. I. P. の基本的な方法を紹介しようと思うが、細かい技術的な計算を追うよりも、その大要を述べる ■ にとどめる.

[Step 1.]

[1]において M. I. P. によって評価される量は次の二つである:

$$\sum_{n=1}^K \sum_{m < n} \frac{\sin(T \log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log(n/m)}$$

$$\sum_{n=1}^K \sum_{\substack{m \neq n \\ m \leq K}} \frac{\sin(2\theta_1(T) - T \log mn)}{(mn)^{\frac{1}{2}} (2\theta_1'(T) - \log mn)},$$

ただしここに $K = [(\frac{1}{2\pi} T)^{\frac{1}{2}}]$, $\theta_1(T) = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8}$ である. 基本的なアイデアは全く同じであるので、ここでは前者の評価法([1], Lemmas ²³~~23~~-26 および Lemma 33) を述べるが、その前にまず次の一般的な Lemma が必要である.

Lemma. ([17], Lemma 22)

$f(t) \geq 0$, $f(t) = g_1(t) + g_2(t)$, $\alpha \in \mathbb{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_{T-V}^{T+V} f(t) dt &\ll \max_{|u_i| \leq V/4\alpha} \int_{T-2V+u_1+u_2+\dots+u_\alpha}^{T+2V+u_1+u_2+\dots+u_\alpha} g_1(t) dt \\ &+ V^{-\alpha} \int_{-V/4\alpha}^{V/4\alpha} du_\alpha \int_{-V/4\alpha}^{V/4\alpha} du_{\alpha-1} \dots \int_{-V/4\alpha}^{V/4\alpha} du_1 \int_{T-2V}^{T+2V} g_2(t+u_1+\dots+u_\alpha) dt. \end{aligned}$$

これは, 初等的な計算でえられるごく簡単な補題であるが, Balasubramanian のアイデアの鍵となっており, M.I.P. の名前の由来ともなっているものである.

[Step 2.]

さて Balasubramanian は, 和

$$\psi(t) = \sum_{m=1}^K \sum_{m < n} \frac{\sin(t \log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log(n/m)}$$

を考える. ($T-100H \leq t \leq T+100H$) 最終的にほしいの値 $\psi(T)$ の評価であるが, そのために T の近傍における実函数 $\psi(t)$ の挙動をみるのである. ($H \ll T$). 結果的には, 任意に小さい正数 δ に対して,

$$\psi(T) = O(HT^{50\delta}) \quad (1)$$

がえられる ([17], Lemma 26) のであるが, そのためにまず,

$$\psi(T_0) = O(HT^{\frac{50}{100}\delta}) \quad (2)$$

をみたす T_0 が, $T-4H \leq T_0 \leq T+4H$ の範囲に存在すること
を示す (このあたりで出てくる, 100, 50, 4 とした数には,
もちろんあまり深い意味はない)

ここで $\psi(t) \in \mathcal{R}$ ということが本質的に重要となる. まず
[$T-4H, T+4H$] の範囲で $\psi(t) = 0$ となる点があれば, その
点を T_0 とすればよい. そうでなければ $\psi(t)$ の符号が [$T-4H,$
 $T+4H$] の間で一定ということだから, たとえば $\psi(t) > 0$ と
してよい. すると $\psi(t) = f(t)$ として [Step 1] の Lemma が使え
る.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{m < HT^{10\delta}} \sum_{n < m} + \sum_{(M) > HT^{10\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{0 < m-n < MH^{-1+\delta}} \\ &\quad + \sum_{(M) > HT^{10\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{m-n > MH^{-1+\delta}} \\ &= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) \end{aligned}$$

とわければ, Lemma によつて,

$$\begin{aligned} \int_{T-H}^{T+H} \psi(t) dt &\ll \max_{|u_i| \leq H/4\alpha} \int_{T-2H+u_1+\dots+u_\alpha}^{T+2H+u_1+\dots+u_\alpha} (S_1(t) + S_2(t)) dt \\ &\quad + H^{-\alpha} \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_\alpha \dots \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_1 \int_{T-2H}^{T+2H} S_3(t+u_1+\dots+u_\alpha) dt \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける.

ここでまず, $S_1(t)$ については "trivial bound" $O(HT^{10\delta})$ を

使う. $S_2(t)$ に関しては次の [Step 3] でやる. $S_2(t)$ の入った積分については, この積分を実行してやることにより,

$$\ll H^{-\alpha} \sum_{(M) > HT^{10\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{m-n \geq MH^{-1+\delta}} Y_1(mn)^{-\frac{1}{2}} \left(\log \frac{m}{n}\right)^{-\alpha-2}$$

となる. ここに Y_1 は, 積分によって出てくる $\sin$ と $\cos$ の和であり, その項数 $\ll_{\alpha} 1$, 従って $Y_1 \ll_{\alpha} 1$ を得る. $\alpha = \alpha(\delta)$ を十分大きくとれば, 上式 $\ll_{\delta} 1$ とできることがわかる.

[Step 3].

$S_2(t)$ を評価するため, Balasubramanian は次の評価を使う:

$T - 100 \frac{H}{\bullet} \leq t \leq T + 100 H$ において一様に,

$$\sum_{\gamma < (M/H)^{1+\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \frac{\exp\{it \log((m-\gamma)/m)\}}{(m(m-\gamma))^{\frac{1}{2}} \log((m-\gamma)/m)} = O(HT^{50\delta}) \quad (4)$$

が成り立つ.

この評価が成り立つような H が存在することは, もちろん自明ではない. Balasubramanian は van der Corput の方法を用いて, $H = T^{27/82 + \varepsilon}$ として (4) が成り立つことを示し ([1], Lemma 33. そこで述べられるアイデアは Titchmarsh [10] によるものである), さらに Kolesnik の結果 [2] によれば ~~11/1067~~ $H = T^{346/1067 + \varepsilon}$ とできることを示唆している.

さて (4) を用いると, $S_2(t) = O(HT^{50\delta})$ が容易にえられ, 以上えられた結果を (3) にすべて代入することにより,

$$\int_{T-H}^{T+H} \psi(t) dt \ll H^2 T^{50\delta}$$

をうる. よって $[T-H, T+H]$ の間にある T_0 が存在して, $\psi(T_0) = O(HT^{50\delta})$ となっていなければならない. 即ち (2) が証明された. ([1], Lemma 23)

[Step 4]

(2): $\psi(T_0) \ll HT^{50\delta}$ から, (1): $\psi(T) \ll HT^{50\delta}$ を導くには, $\psi(T) - \psi(T_0)$ があまり大きくはなりえないことを示せばよい. 実際 Balasubramanian は [1], Lemma 25 において,

$$\psi(T) - \psi(T_0) = O(HT^{50\delta}) \quad (5)$$

を示す. (2) と (5) から明らかに (1) を得る.

(5) の証明は, 次のようにして行われる.

$$\begin{aligned} \psi(T) - \psi(T_0) &= \int_{T_0}^T \psi'(t) dt \\ &= \int_{T_0}^T \sum_{m=1}^K \sum_{n < n} \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{T_0}^T \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &\quad + O((T-T_0) \log T). \end{aligned}$$

この第一項、積分の評価のために, 再び [Step 1] の Lemma が用いられる.

[Step 5]

まず $T-100H \leq t \leq T+100H$ で,

$$\sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{Re} \left| \sum_{m=1}^K m^{-\frac{1}{2}+it} \right|^2 \geq 0$$

であることに注意すれば, M.I.P. の基本 Lemma が適用できる
ことがわかる. そこで

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{m=1}^K \frac{1}{m} + 2 \sum_{m \leq HT^{10\delta}} \sum_{n < m} \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad + 2 \sum_{(M) > HT^{10\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{0 < m-n < MH^{-1+\delta}} \\ & \quad + 2 \sum_{(M) > HT^{10\delta}} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{m-n \geq MH^{-1+\delta}} \\ &= S_4(t) + S_5(t) + S_6(t) + S_7(t) \end{aligned}$$

と令けて,
$$\int_{T-4H}^{T+4H} \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$\begin{aligned} & \ll \max_{|u_i| \leq H/\alpha} \int_{T-8H+u_1+\dots+u_\alpha}^{T+8H+u_1+\dots+u_\alpha} (S_4(t) + S_5(t) + S_6(t)) dt \\ & \quad + H^{-2} \int_{-H/\alpha}^{H/\alpha} du_\alpha \dots \int_{-H/\alpha}^{H/\alpha} du_1 \int_{T-8H}^{T+8H} S_7(t+u_1+\dots+u_\alpha) dt \end{aligned}$$

とする. あとは [Step 2] [Step 3] と同様に, $S_4(t)$, $S_5(t)$ については "trivial bound" を用い, $S_6(t)$ は積分してから式 (4) を使い, $S_7(t)$ の入った積分は積分を実行したあとで α を十分大きくすることによって, 求める評価 (5) が出てくることになる.

([1], Lemma 24). 以上の Balasubramanian による $\psi(T)$ の評価の道筋である.

文 献

[1] R. Balasubramanian, An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978) 540-576.

[2] G. A. Kolesnik, On the estimation of some exponential sums, Acta Arith. 25 (1973) 7-30. (in Russian)

[3] E. C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (ζ), Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 195-210.

[4] G. H. Hardy - J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, Acta Math. 41 (1918) 119-196.

[5] A. E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1926) 273-300.

- [6] C.L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik 2 (1932) 45-80.
- [7] K. Matsumoto, The mean square of Dirichlet L -functions, Proc. Japan Acad. 58 (1982) 443-446.
- [8] ———, Dirichlet の L -函数の 2 乗平均について, In: "Fourier analysis on arithmetical sequences", 数理研講究録.
- [9] ———, On a theorem of Carlson for Dirichlet series of finite order, in preparation.
- [10] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford (1951).

付記. 講演では [9] の内容について話しましたが, その後証明の中にミスが見つかり, 現在修正原稿を準備中です. そうした事情もあって, この稿では [9] の内容にまでは触れないことにしました. しかしこの稿を M.I.P. の解説を中心にまとめたのは, 当初からの予定です. 雑な解説になりましたが, 詳細にたちいると相当のページ数を要することになるので, 御了承ください.