

Dedekind 環上の Chevalley 群と K_2

筑波大学 阿部英一 (Eiichi Abe)

筑波大学 森田 純 (Jun Morita)

本稿における我々の目的は、Dedekind domain 上の Chevalley 群の群構造を調べることである。まず、 A を Dedekind domain、 $p (\neq 0) \in A$ を素元とし、次の条件 (*) を考える。

(*) $A^\times \longrightarrow (A/(p))^\times$ なる自然な写像が、上への写像である。ここに、 $A^\times$, $(A/(p))^\times$ は、可逆元のみす乗法群を表わす。また、 (p) は素イデアル、従って、Dedekind domain では極大イデアルとなり、 $A/(p)$ は体であることに注意する。この様な条件の下で、環 $R = A[\frac{1}{p}]$ 上の Chevalley 群の構造を調べる。我々は、その Chevalley 群が Tits 系の構造を持つということを示し、さらに、その群論的応用を見出す。我々の結果は、岩堀-松本 [1] によって得られた、 $\mathbb{F}$ -連体上の Chevalley 群の Tits 系に関する結果を、さらに、Laurent 多項式環上の Chevalley 群における Tits 系の結果 (cf. [2]) を

含んでいる。

Laurent 多項式環上の Chevalley 群は、アフィン型の Kac-Moody 群とみなせるが、我々は、Kac-Moody 群に関する論文 Peterson-Kac [3] に於て用いられた手法を基本道具として使う。必ずしも、体や局所環とは限らない場合について考察するので、色々な応用が得られる。例えば、Dedekind domain が universal か否か、quasi-universal か否か についてこの十分条件を得ることが出来る（実は、これが K_2 の構造と結びつく）、また、ある種の岩沢分解についての結果も得られる。§1 で記号の説明と準備を（§2 で主定理を提示する。§3, §4 で、その応用を論じる。さらに詳しくことは、Abe-Morita [4] を参照されたし。

1. Chevalley 群と Steinberg 群. Φ を被約かつ既約なルート系とし、基本ルートを $\Pi = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ とする。重型の複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ と、 $\mathfrak{g}$ の有限次元の忠実表現 ρ をとる。 ρ と $\mathfrak{g}$ の Chevalley basis より、Chevalley-Demazure 群スキームと呼ばれるアフィン群スキーム $G_\rho(\Phi, \cdot)$ が $\mathbb{Z}$ 上で定義される。これは、 Φ と ρ のウエイト格子 L_ρ だけで定まる群関手である。 L_ρ が基本ウエイト格子 (resp. ルート格子) に一致するとき、 $G_\rho(\Phi, \cdot)$ を simply connected

(resp. adjoint type) と呼ぶ。 $G_{sc}(\Phi, \cdot)$ (resp. $G_{ad}(\Phi, \cdot)$)
で表わす。

各ルート $\alpha \in \Phi$ に対し、 G_α から $G_P(\Phi, \cdot)$ への自然
変換 $\mathcal{X}_\alpha$ が存在する。すなわち、 $\mathcal{X}_\alpha$ は、可換環 $R (\ni 1)$
の加法群 $G_\alpha(R) = R^+$ から $G_P(\Phi, R)$ への群準同型を引き起
こす。これを $\mathcal{X}_\alpha$ で表わし、 $\mathcal{X}_\alpha$ の image を $U_\alpha = \{\mathcal{X}_\alpha(t) \mid$
 $t \in R\}$ とする。このとき、 $E_P(\Phi, R) = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ を、
 $G_P(\Phi, R)$ の基本部分群という。 $U^\pm(R) = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi^\pm \rangle$
とおく。もし R が、体、半局所環、ユークリッド整域のい
ずれかであれば、 $G_{sc}(\Phi, R) = E_{sc}(\Phi, R)$ となる。一般に、
 $l > 1$ ならば、 $E_P(\Phi, R) \triangleleft G_P(\Phi, R)$ である。各 α に対し、
 $K_1(\Phi, R) = G_{sc}(\Phi, R) / E_{sc}(\Phi, R)$ とおく。(以下、必要のな
い時は、 P を省く。)

$E(\Phi, R)$ の元 $\mathcal{X}_\alpha(t)$ は次の関係式を満たす。

$$(A) \quad \mathcal{X}_\alpha(s) \mathcal{X}_\alpha(t) = \mathcal{X}_\alpha(s+t),$$

$$(B) \quad [\mathcal{X}_\alpha(s), \mathcal{X}_\beta(t)] = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta \in \Phi \\ i,j > 0}} \mathcal{X}_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij} s^i t^j)$$

($\forall \alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$, $s, t \in R$, $N_{\alpha\beta ij}$ は $\mathbb{Z}$ -環 $\mathcal{O}$ によ
り定まる整数)。各 $\alpha \in \Phi$, $u \in R^\times$ に対し、

$$(W) \quad w_\alpha(u) = \mathcal{X}_\alpha(u) \mathcal{X}_{-\alpha}(-u^{-1}) \mathcal{X}_\alpha(u)$$

$$(H) \quad h_\alpha(u) = w_\alpha(u) w_\alpha(-1)$$

で、 $E(\Phi, R)$ の元 $w_\alpha(u)$, $h_\alpha(u)$ を定める。 $N(R) = \langle w_\alpha(u) \mid$

$a \in \Phi, u \in R^\times$, $H(R) = \langle h_a(u) \mid a \in \Phi, u \in R^\times \rangle$ とおく。
 このとき、 $H(R) \triangleleft N(R)$ かつ $N(R)/H(R) \simeq W = W(\Phi)$,
 Φ の Weyl 群, を得る。 $T(R) = \text{Hom}(L_\Phi, R^\times)$ とおくと、 $H(R)$
 $\subset T(R) \subset G(\Phi, R)$ となり、また、 $T(R)$ は $U^\pm(R)$ を正規化
 する。

さて、次の生成元と定義基本関係式で与えられる群を
 $St(\Phi, R)$ で表わし、Steinberg 群と呼ぶ。

生成元: $\hat{x}_a(t) \quad a \in \Phi, t \in R$

基本関係式: (A), (B) で $x_a \rightarrow \hat{x}_a$ としたもの, & "B"

$$(B') \quad \hat{w}_a(u) \hat{x}_a(t) \hat{w}_a(-u) = \hat{x}_{-a}(-u^{-2}t),$$

ただし、 $\hat{w}_a(u)$ は (W) と同様に定める。(後出の $\hat{h}_a(u)$ も
 (H) と同様に定める。) このとき、自然な写像 π が $\pi(\hat{x}_a(t))$
 $= x_a(t)$ により得られる: $St(\Phi, R) \xrightarrow{\pi} E_{sc}(\Phi, R)$ 。いま
 $K_2(\Phi, R) = \text{Ker } \pi$ とすれば、次の完全系列を得る。

$$1 \longrightarrow K_2(\Phi, R) \longrightarrow St(\Phi, R) \longrightarrow E_{sc}(\Phi, R) \longrightarrow K_1(\Phi, R) \longrightarrow 1$$

$E(\Phi, R)$ において、

$$(C) \quad h_a(u) h_a(v) = h_a(uv), \quad a \in \Phi, u, v \in R^\times$$

が成り立つので、

$$c_a(u, v) := \hat{h}_a(uv) \hat{h}_a(u)^{-1} \hat{h}_a(v)^{-1}$$

は、 $K_2(\Phi, R)$ の元である。 c_a を Steinberg symbol for a
 と呼ぶ。 $C(R) = \langle c_a(u, v) \mid u, v \in R^\times, a \in \Phi \rangle$ とおく。さらに、

$a \in \Phi$, $s, t \in R$, $1+st \in R^\times$ に対し

$$(D) \quad \chi_a(s) \chi_{-a}(t) = \chi_{-a}\left(\frac{t}{1+st}\right) h_a(1+st) \chi_a\left(\frac{s}{1+st}\right)$$

が成り立つ。よ、

$$d_a(s, t) = \hat{\chi}_{-a}\left(-\frac{t}{1+st}\right) \hat{\chi}_a(s) \hat{\chi}_{-a}(t) \hat{\chi}_a\left(-\frac{s}{1+st}\right) \hat{h}_a(1+st)^{-1}$$

は、 $K_2(\Phi, R)$ の元である。 d_a を Dennis-Stein symbol for a と呼ぶ。 $D(R)$ を、すべての $d_a(s, t)$ で生成される $St(\Phi, R)$ の正規部分群とする。このとき、 $C(R) \subset D(R) \subset K_2(\Phi, R)$ であり、また $E_{sc}(\Phi, R) \simeq St(\Phi, R) / K_2(\Phi, R)$ に注意する。

$Eu(\Phi, R) = St(\Phi, R) / C(R)$, $Eg(\Phi, R) = St(\Phi, R) / D(R)$ とおく。 R が universal (resp. quasi-universal) for Φ であるとす。 $Eu(\Phi, R) \simeq E_{sc}(\Phi, R)$ (resp. $Eg(\Phi, R) \simeq E_{sc}(\Phi, R)$) と定義する。これは、 A_n 型のときの J. Silvester の定義を一般の場合に拡張したものである。例えば、体 k , 体 k 上の n -変数多項式環 $k[X]$, $\mathbb{Z}$ などは、 $\forall \Phi$ に対し、 universal である。

2. アフィン Weyl 群に附随する Tits 系。 $\Phi_a = \Phi \times \mathbb{Z}$ と

おいて、 Φ_a の元をアフィンルートと呼ぶ。 σ_α ($\alpha = (a, n)$) に

$$\text{よ、 } 2. \quad \Phi_a \text{ 上の置換: } \beta = (b, m) \mapsto (\sigma_a(b), m - \frac{2(b, a)}{(a, a)} n)$$

を表わす。 σ_α ($\alpha \in \Phi_a$) で生成される Φ_a 上の置換群を、

W_a で表わし、アフィン Weyl 群という。 $\alpha = (a, n)$ に対し、

$\alpha + m = (a, n+m)$ と書くことにする。

$\alpha_i = (-a_i, 0)$, $i=1, \dots, l$, $\alpha_{l+1} = (a_0, 1)$ とおく。ここに、 a_0 は Φ の最高ルートである。さらに、 $\Pi_a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}\}$ とおくと、 $\forall \alpha \in \Phi_a$ は、 Π_a の元の $\mathbb{Z}$ 係数結合で $\alpha = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}$) と表わされる。(かも、 m_i は、同時に $m_i \geq 0$ か ≤ 0 のいずれかになる。それに合わせて、 Φ_a^+ , Φ_a^- を定めよう。

W_a は、 $S_a = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Pi_a\}$ で生成され、さらに (W_a, S_a) は、Coxeter 系となる。 $l(w)$ を $w \in W_a$ の長さ、 $N(w)$ を $\#\{\alpha \in \Phi_a^+ \mid w(\alpha) \in \Phi_a^-\}$ と定める。このとき、次を得る。

命題 1. $w \in W$, $s = \sigma_\alpha \in S_a$ ($\alpha \in \Pi_a$) とするとき、

(1) $l(ws) = l(w)$.

(2) $l(ws) > l(w) \Rightarrow w(\alpha) \in \Phi_a^+$.

さて、ここで、 A を Dedekind domain, P を nonzero prime ideal $\subseteq A$ とする。 (A, P) が admissible pair であるとは、

(A1) $P = (\varphi)$: 単項イデアル

(A2) $A^\times \longrightarrow (A/P)^\times$ が上の写像

が成り立つときにいう。この時、 $R = A[\frac{1}{p}]$ とおく。 $t (\neq 0) \in R$ に対し、 $t = up^r$ (u は p と素), $u \in A$, $r \in \mathbb{Z}$ と一意なる分解が得られるから、 $v(t) = r$ と定義しておく。また

$\nu(0) = \infty$ とする。このとき、写像 $\nu: R \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ は、

$$(V1) \quad \nu(s+t) \geq \min \{\nu(s), \nu(t)\}$$

$$(V2) \quad \nu(st) = \nu(s) + \nu(t)$$

をみたす。以下、 (A, P) は *admissible pair* と仮定する。

ここで、 $\alpha = (a, n) \in \Phi_a$ に対し、 $E(\Phi, R)$ の元を、

$$x_\alpha(u) = x_\alpha(up^n) \quad \forall u \in A$$

$$w_\alpha(u) = x_\alpha(u) x_{-\alpha}(-u^{-1}) x_\alpha(u) \quad \forall u \in A^\times$$

$$h_\alpha(u) = w_\alpha(u) w_\alpha(-1) \quad \forall u \in A^\times$$

を定め、 $U_\alpha = \{x_\alpha(u) \mid u \in A\} \simeq A^+$ とおく。 $N(R)$ 、

$H(A)$ を、前節での様に定める。 $U^+(A, P) = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_a^+ \rangle$ 、

$B(A, P) = \langle U^+(A, P), H(A) \rangle$ とおく。この時、次を得る。

定理 2. (1) $B(A, P) \cap N(R) = H(A)$, $N(R)/H(A) \simeq W_a$.

(2) $(E(\Phi, R), B(A, P), N(R), S_a)$ は Tits 系である。

(3) $E(\Phi, R) = \bigsqcup_{w \in W_a} B(A, P) w B(A, P)$: Bruhat 分解が成立。

例. いくつか例を考えてみる。

(1) F を $\mathbb{F}$ -体、 A をその整数環、 P をその素イデアルとする。このとき、 (A, P) は *admissible pair* となり、

$R = A[\frac{1}{p}]$ ($P = (p)$) は F 自身となる。従って、上の結果は、岩堀-松本 [1] の Bruhat 分解と一致する。

(2) $A = F[X]$ を、体 F 上の一変数多項式環、 $P = (X)$

としたとき、 (A, P) は *admissible pair* となり、 $R = A[\frac{1}{X}]$

$= F[X, X^{-1}]$ は Laurent 多項式環 となる。従って、上の結果は、[2] におけるものと一致する。

(3) $A = \mathbb{Z}$, $P = (2)$ or (3) とする。このとき、 (A, P) は、admissible pair となる。従って、 $E(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $E(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$ は、Tits 系の構造をもつ。一般に、 S' を $\mathbb{Z}$ の乗法的集合とし、 $\pm S' \bmod p$ が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を生成しているとする。 $(p \notin S' \cup -S' : \text{素数})$ 。このとき、 $S = S' \cup \{p\}$, $A = S^{-1}\mathbb{Z}$, $P = (p)$ とすれば、 (A, P) は admissible pair となり、 $R = A[\frac{1}{p}] = S^{-1}\mathbb{Z}$ は、今までの議論に乗るので、 $E(\mathbb{Z}, R)$ は Tits 系の構造をもつ。

3. 或る種の Dedekind 環上の Chevalley 群の群表示.

(A, P) を admissible pair, $P = (p)$, $R = A[\frac{1}{p}]$ とする。 $E(\mathbb{Z}, R)$ においてと同様に、 $E_u(\mathbb{Z}, R)$ において、部分群 $B_u(A, P)$, $H_u(A)$, $N_u(R)$ を定める。 $E_g(\mathbb{Z}, R)$ においても、同様に、 $B_g(A, P)$, $H_g(A)$, $N_g(R)$ を定義する。このとき、 $H_u(A) \triangleleft N_u(R)$, $H_g(A) \triangleleft N_g(R)$ が言えて、さらに、 $N_u(R)/H_u(A) \cong N_g(R)/H_g(A) \cong W_a$ が成り立つ。しかも、定理 2 と同様に、次が成り立つ。

定理 3. $(E_u(\mathbb{Z}, R), B_u(A, P), N_u(R), S_a)$ & $(E_g(\mathbb{Z}, R), B_g(A, P), N_g(R), S_a)$ は Tits 系である。

定理2及び定理3の結果を用いて、*universality* 並びに *quasi-universality* に関する、次の遺伝定理を導くことができる。

定理4. A が *universal for* $\mathfrak{A}$ ならば、 R もそうである。同様に、 A が *quasi-universal* ならば、 R もそうである。

証明 (短いので、証明します。) A : *universal* とする。

このとき、次の可換図形で、下の写像は同型である。

$$\begin{array}{ccc} E_u(\mathfrak{A}, R) & \xrightarrow{\pi} & E_{sc}(\mathfrak{A}, R) \\ \uparrow & \searrow G & \uparrow \\ E_u(\mathfrak{A}, A) & \xrightarrow{\sim} & E_{sc}(\mathfrak{A}, A) \end{array}$$

よって、とくに、 $B_u(A, P) \simeq B(A, P)$ である。一方、

$$E_u(\mathfrak{A}, R) = B_u(A, P) N_u(R) B_u(A, P)$$

$$E_{sc}(\mathfrak{A}, R) = B(A, P) N(R) B(A, P)$$

が、Tits系より言えるから、 $\text{Ker } \pi \subseteq B_u(A, P)$ を得る。

従って、 π は同型である。すなわち、 R は *universal* である。*quasi-universal* についても全く同様である。□

系5. (1) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ は *universal for* $\forall \mathfrak{A}$ である。

(2) $S = \{p_1, \dots, p_m\}$ を素数の有限集合とし、各 i ($1 \leq i \leq m$) に対し、 $\{\pm 1, p_1, \dots, p_{i-1}\} \bmod p_i$ が $(\mathbb{Z}/(p_i))^{\times}$ を生成するとする。このとき、 $S^{-1}\mathbb{Z}$ は *universal for* $\forall \mathfrak{A}$ である。

注意. (1) 我々の method は、rank 1 のときも含めて、すべての type 重 について有効である。

(2) 系 5(2) の例として、たとえば、 $S = \{2, 5, 97\}$ なども、条件をみたす。すなわち、 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{97}]$ はすべての重 に対し、universal である。

(3) 系 5(2) の条件は、必ずしも必要ではない。実際、 $S = \{5, 7\}$ とすると、 $\mathbb{Z}[\frac{1}{5}, \frac{1}{7}]$ は universal for A_n ($n \geq 2$) が知られている。しかし、 S は、系 5(2) の条件は満たしていない。

例. 次の特異特殊なものも、我々の考察の対象になっている。 $\mathbb{F}_3$ を 3 元体、 $A = \mathbb{F}_3[X, X^{-1}]$ を $\mathbb{F}_3$ 上の Laurent 多項式環、 $P = (X^2 + X - 1)$ とする。このとき、 (A, P) は、admissible pair となり、また A は universal for $\forall$ 重 である。従って、定理 4 により、 $\mathbb{F}_3[X, \frac{1}{X}, \frac{1}{X^2+X-1}]$ も universal for $\forall$ 重 となる。

4. 岩沢分解.

ここでは、Dedekind domain 上の Chevalley 群 において、或る種の岩沢分解についての結果を述べる。さて、 A, P, R は、今までの通りとする。このとき、定理 2 の直接の応用として次を得る。

$$\begin{aligned}
E(\Phi, A) &= B(A, P) N(A) B(A, P), \\
E(\Phi, R) &= B(A, P) N(R) B(A, P) \\
&= B(A, P) H(R) N(A) B(A, P) \\
&= B(A, P) H(R) E(\Phi, A) \\
&= E(\Phi, A) H(R) E(\Phi, A)
\end{aligned}$$

注意. 通常, A を P.I.D., K をその商体としたとき,

$$G(\Phi, K) = U^\pm(K) T(K) G(\Phi, A) \quad \text{を、右既分解という。}$$

(cf. [5], $\mathbb{C}$ の場合の. いわゆる右既分解の類似物である。)

さらに, $A \subset A' \subset K$ (A' : 部分環) としたとき,

$$\begin{aligned}
G(\Phi, A') &= U^\pm(A') T(A') G(\Phi, A) \\
E(\Phi, A') &= U^\pm(A') H(A') (E(\Phi, A') \cap G(\Phi, A))
\end{aligned}$$

が従う。

さて、我々の場合に話を戻そう。 $(A_1, P_1), (A_2, P_2)$ を, admissible pairs とする (つまり, 必ずしも P.I.D. とは限らない場合にも, 何かしらの分解を与えようという目論みである)。次の条件が満たされるとき, (A_2, P_2) は (A_1, P_1) の admissible extension であると言う。

$$(A3) \quad A_1 \subset A_2, \quad P_1 \subset P_2.$$

$$(A4) \quad A_1^\times \longrightarrow (A_2/P_2)^\times \quad \text{が上への写像である。}$$

例えば, $(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], (1+\sqrt{-1}))$ は $(\mathbb{Z}, (2))$ の admissible extension であり, また, (A, P) が admissible pair ならば, $(A_P, P_A P)$

は、 (A, P) の *admissible extension* である。

定理 6. (A_2, P_2) を (A_1, P_1) の *admissible extension* とする。

$$(1) \quad E(\Phi, A_2) = B(A_2, P_2) E(\Phi, A_1) \quad \text{が成立.}$$

$$(2) \quad P_1 = P_2 \quad (P_1 = (p_1), P_2 = (p_2)), \quad R_i = A_i[\frac{1}{p_i}] \quad \text{なるとき.}$$

$$\begin{aligned} E(\Phi, R_2) &= B(A_2, P_2) E(\Phi, R_1) \\ &= B(A_2, P_2) H(R_1) E(\Phi, A_1) \end{aligned}$$

が成立。

例 $E(\Phi, \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) = B(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], (1+\sqrt{-1})) E(\Phi, \mathbb{Z})$ が成り立つ。

また、 (A, P) を *admissible pair* としたとき、

$$E(\Phi, A_p) = B(A_p, PA_p) E(\Phi, A)$$

が成り立つ。

系 7. (A, P) を *admissible pair* とし、 K を A の商体。

$P = (p)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} G(\Phi, K) &= T(K) U^-(K) U^+(PA_p) E(\Phi, A) \\ &= T(K) U^-(A_p) U^+(PA_p) E(\Phi, A[\frac{1}{p}]) \end{aligned}$$

が成立。

補足. 定義より明白なのであるが、可換環 R ($\neq 1$) に対し、

$$(1) \quad R: \text{universal for } \Phi \iff K_2(\Phi, R) = C(R),$$

$$(2) \quad R: \text{quasi-universal for } \Phi \iff K_2(\Phi, R) = D(R)$$

であることに注意して、おわりとする。

文献表.

- [1] N. Iwahori - H. Matsumoto : On some Bruhat decompositions and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES 25(1965), 5-48.
- [2] J. Morita : Tits' systems in Chevalley groups over Laurent polynomial rings, Tsukuba J. Math. 3 (1979), 41-51.
- [3] D.H. Peterson - V.G. Kac : Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 80 (1983), 1778-1782.
- [4] E. Abe - J. Morita : Some Tits systems with affine Weyl groups in Chevalley groups over Dedekind domains, preprint (1986).
- [5] R. Steinberg : Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Lecture notes, 1968.

可換環上の Chevalley 群に関しては:

- [A] E. Abe : Chevalley groups over local rings, Tohoku Math. J. 21 (1969), 474-494.
- [B] A. Borel : Properties and linear representations of Chevalley groups, Seminar on algebraic groups and related

finite groups, Springer LN 131 (1970), 1-55.

[S] M.R. Stein: Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings, Amer. J. Math. 93 (1971), 965-1004.

などを参照して下さい。

〒305

茨城県新治郡桜村 筑波大学数学系

阿部 英一

森田 純