

Zakharov-Shabat 方程式について

阪大 理 伊達悦朗

序. Zakharov-Shabat 方程式とは、二つの積分作用素

$$L = \sum_{j=0}^n u_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad M = \sum_{j=0}^m v_j(x, y, t) \frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

u_j, v_j は l 次正方形行列、を用いて

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial t} = [L, M]$$

と作用素方程式の形に表わされる。係数 u_j, v_j の成分についての非線型偏微分方程式のことである。

この方程式が考えられるようになった背景について、少し触れる。

1967 年に、Gardner, Greene, Kruskal, Miura [3] は、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, $u = u(x, t)$ の急減少な初期値問題と、一次元 Schrödinger 作用素 $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ の逆散乱理論との間の関係を示した。Lax [6] は、この関係の一部に着目し、KdV 方程式が作用素方程式 $\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L]$, $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$, $A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u(x, t)$ と同値であることを示した。その後、作用素 L, A を取り替えることにより、物理等で現われる非線型方程式

が得られることが知られ、その方程式の N -ソリトン解と呼ばれる厳密解を求める方法も知られてきている。Zakharov, Shabat [8] は、逆散乱理論に於いて基本的な役割を果たす Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式と呼ばれる積分方程式に着目し、上に述べた Zakharov-Shabat 方程式と導き、その N -ソリトン解を求める方法を示した。以上はすべて急減少な解についての結果であるが、Novikov, Dubrovin, Its, Matveev [2, 7] は、KdV 方程式の周期的問題について調べ、超楕円的な Riemann 面の理論との関係を示した。

Krichever [4, 5] は一般の Riemann 面から出発することにより、Zakharov-Shabat 方程式と導いた。ここでは、その Krichever の仕事について述べる。簡単な為にスカラー作用素 ($l=1$) の場合だけを述べる。

1. 関数 $\Psi(x, y, t, P)$

R をコンパクトな Riemann 面とし、その種数 g は正であるとす。 R の一点 P_0 を固定し、次の性質を持つ関数 $\Psi(x, y, t, P)$, $(x, y, t) \in U$ (U は $0 \in \mathbb{R}^3$ の近傍), $P \in R$ と考える。

i) $\Psi(x, y, t, P)$ は $R - \{P_0\}$ で有理型でその極は (x, y, t) に依らず、次数 g の一般因子 D となっている。(次数 g の因子 D の一般因子であるとは D の線型空間 $L(D) = \{f \in K(R) : (f) + D \geq 0\}$

が一次元であるときという。)

ii) $z = 1/k$ を P_0 に於ける一つの局所変数とする時、 $\Psi(x, y, t, P)$ は P_0 で次の形の真性特異点を持つ:

$$\Psi(x, y, t, P) = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(x, y, t) z^j\right)$$

$$Q(k) = a_n k^n + \dots + a_0$$

$$a_j, b_k \in \mathbb{C}$$

$$R(k) = b_m k^m + \dots + b_0$$

多項式 $Q(k), R(k)$ が与えられれば、Akhiezer [1] の方法を用いることにより、 $\Psi(x, y, t, P)$ は一意的に構成できる。

以下、その構成について述べる。

α_j, β_j ($j = 1, \dots, g$) を $\mathcal{R}$ の標準ホモロジー基底とする。

$\omega_1, \dots, \omega_g$ を第一種正規化微分の基底とする。つまり $\int_{\alpha_j} \omega_k = \delta_{jk}$ となるように定められているものとする。この時 $\tau_{jk} = \int_{\beta_j} \omega_k$ とおけば、行列 $T_g = (\tau_{jk})$ は対称で、 $I_m(T_g)$ は正定値となることが知られている。

周期行列 $\Omega = (I_g, T_g)$ の列ベクトルから生成される $\mathbb{C}^g$ の Lattice を Γ とおけば、 $\mathbb{C}^g/\Gamma$ が $\mathcal{R}$ の Jacobi 多様体 $J(\mathcal{R})$ である。 $\mathcal{R}$ から $J(\mathcal{R})$ への写像 w を次のように定義する: $Q \in \mathcal{R}$ を固定

$$w: \mathcal{R} \ni P \longmapsto w(P) = \left(\int_0^P \omega_1, \dots, \int_0^P \omega_g \right) \in J(\mathcal{R}).$$

この写像は因子群に線型に拡張し、同じく w で表れる。

ω_{P_0} を P_0 以外では正則で、 P_0 で二位の極を持つ第二種正規化微分とする。(正規化とは $\int_{\alpha_j} \omega_{P_0} = 0$ となる、ということ)

う。) $-(\int_0^P \omega_{P_0})^{-1}$ は P_0 を局所変数とする。

ω_Q, ω_R は P_0 以外では正則で、 P_0 で $dQ(1/z), dR(1/z)$ と同じ形の極を持つ第二種正規化微分とする。 $\omega_{P_0}, \omega_Q, \omega_R$ は一意的に定まる。

$$\int_{\beta_i} \omega_{P_0} = 2\pi i A_i, \quad \int_{\beta_i} \omega_Q = 2\pi i B_i, \quad \int_{\beta_i} \omega_R = 2\pi i C_i \quad i = \sqrt{-1}$$

とおく。 $A = (A_1, \dots, A_g), B = (B_1, \dots, B_g), C = (C_1, \dots, C_g)$ とおく。

並列構成するには Jacobi の逆問題

$$(*) \quad w(\sum_{j=1}^g P_j(x, y, t)) \equiv -xA - yB - tC + w(D) \pmod{\Gamma}$$

$$D = \sum_{j=1}^g P_j \text{ は極因子}$$

を解けばよいことが次のようにしてわかる。

並列が存在したとすれば、 $\omega = d \log \pi$ は $\mathbb{R}$ 上の Abel 積分となるといえる。極の様子を調べることにより

$$(**) \quad \omega = x\omega_{P_0} + y\omega_Q + t\omega_R + \sum_{j=1}^g \omega(P_j(x, y, t), P_j) + \sum_{j=1}^g C_j \omega_j,$$

$P_j(x, y, t)$ は π の零点、 $\omega(P, Q)$ は P, Q 以外では正則で P, Q でそれぞれ留数 $1, -1$ の一位の極を持つ第三種正規化微分、と表わされる。ここで C_j は一応未定である。並列が $\mathbb{R}$ 上の一価であることから

$$\int_{\alpha_k} \omega = 2\pi i m_k \quad \int_{\beta_k} \omega = 2\pi i n_k \quad m_k, n_k \in \mathbb{Z}$$

である。第一の関係式から $C_j = 2\pi i m_j$ が従う。第二の関係式から、

$$\int_{\beta_i} \omega(P, Q) = 2\pi i \int_Q^P \omega_j \quad \text{を用いて上の式が得られた。}$$

逆に Jacobi の逆問題 (*) を解いて、 $P_1(x, y, t), \dots, P_g(x, y, t)$ を決め (**) で ω を定め、 $\exp(\int_Q^P \omega)$ をつくればこれは定数倍

と一致してゐる。因子 D が一般因子であるとした

から、 $0 \in \mathbb{R}^3$ のある近傍 U に含まれた (x, y, t) に対し、

$P_1(x, y, t), \dots, P_g(x, y, t)$ は一意に定まるといふ。

並に Riemann の τ -関数を用いて表わすこととを考える。

Riemann の τ -関数とは

$$\vartheta(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp [2\pi i u^t m + \pi i m T_g^{-1} m]$$

$$u = (u_1, \dots, u_g) \in \mathbb{C}^g$$

で定義され、 g 変数関数である。

τ -関数については、次の事実が知られている：

δ は次数 g の正因子とすると、関数 $\vartheta(w(E) - w(\delta) + K)$

は E の関数として恒等的には零にならず、その零因子は δ である。

ここで K は $\alpha_j, \beta_j, \omega_j$ によって定まる Riemann の定数ベクトル

と呼ばれるものである。

従つて $\delta = \sum_{j=1}^g P_j, \delta' = \sum_{j=1}^g Q_j, E = \tau$ の一般因子とすると

$$\begin{aligned} \frac{d \log (\vartheta(w(E) - w(\delta) + K) / \vartheta(w(E) - w(\delta') + K))}{dx} \\ = \sum_{j=1}^g \omega(P_j, Q_j) \end{aligned}$$

となる。

このことを

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t, E) = \exp \left[x \int_0^P \omega_{P_1} + y \int_0^P \omega_{P_2} + t \int_0^P \omega_{P_3} \right] x \\ \times \frac{\vartheta(w(E) + Ax + By + Ct - w(D) + K)}{\vartheta(w(E) - w(D) + K)} \end{aligned}$$

と表わされる。この式から $\xi_j(x, y, t)$ がテータ関数で表示できることもわかる。

2. $\Psi(x, y, t, P)$ の満たす二つの微分方程式と Zakharov-Shabat 方程式

次の定理が成り立つ。

定理 $\Psi(x, y, t, P)$ は二つの微分方程式

$$L\Psi = \sum_{j=0}^n u_j(x, y, t) \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$M\Psi = \sum_{j=0}^m v_j(x, y, t) \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

を満たす。 u_j, v_j は $a_j, b_j, \frac{\partial^k \xi_j}{\partial x^k}$ の多項式で一意に定まり、

特に $u_n = a_n, u_{n-1} = a_{n-1}, v_m = b_m, v_{m-1} = b_{m-1}$ である。

証明 P_0 に於いて

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t) \left[\sum_{l=0}^n \left(\sum_{\alpha=l}^n \xi_{\alpha-l} a_\alpha \right) k^l + \text{regular} \right]$$

$$\frac{\partial^q \Psi}{\partial x^q} = \exp(kx + Q(k)y + R(k)t) \left[\sum_{p=0}^q a C_p \sum_{l=0}^p \frac{\partial^{q-p} \xi_{p-l}}{\partial x^{q-p}} k^l + \text{regular} \right]$$

である。

$\sum_{\alpha=0}^n u_\alpha \frac{\partial^\alpha \Psi}{\partial x^\alpha}$ と $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ の k^l ($l=0, \dots, n$) の係数を比較すれば

$$\sum_{\alpha=l}^n \sum_{\beta=l}^{\alpha} a C_\beta u_\alpha \frac{\partial^{\alpha-\beta} \xi_{\beta-l}}{\partial x^{\alpha-\beta}} = \sum_{\alpha=l}^n \xi_{\alpha-l} a_\alpha$$

である。これは $l=m$ から順次解ける。 u_α はこのように定め

ておけば

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \sum_{j=0}^n u_j \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j} \right) / \Psi \in L \left(\sum_{j=1}^q P_j(x, y, t) \right)$$

となる。因子 $\sum_{j=1}^q P_j(x, y, t)$ は $(x, y, t) \in \square$ の時、一般因子であ

るから、上の線型空間は一次元であり、関数 $(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \sum_{j=0}^m u_j \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j}) / \Psi$ は定数となる。この関数は P の変になるから、定数は零である。 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{j=0}^m u_j \frac{\partial^j \Psi}{\partial x^j}$ も同様にして示される。(証明)

この定理から

$$[L - \frac{\partial}{\partial y}, M - \frac{\partial}{\partial t}] \Psi = 0$$

である。 Ψ は「 $\neq 0$ である」と仮定すると

$$[L - \frac{\partial}{\partial y}, M - \frac{\partial}{\partial t}] = 0$$

となる。こうして Zakharov-Shabat 方程式が得られ、テータ関数で表示される解があることも示された。

以上にと以外では正則で、 P の $Q(k)$ の形の主要部を持つ有理型関数 $E(P)$ が存在すれば、 $\Psi(x, y, t, P) = \tilde{\Psi}(x, t, P) e^{yE(P)}$ と分離され、この時は Lax 表示

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [M, L]$$

が得られる。

例を示す。

$$Q(k) = k^2, \quad R(k) = k^3 + bk$$

とすれば

$$\frac{3}{2} u_y = -\frac{3}{2} u_{xx} + 2v_x$$

$$v_y - u_t = v_{xx} - u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x - b u_x \quad u = -2 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x}$$

が得られる。

v を消去すれば Kadomchev - Petviashvili の方程式

$$\frac{3}{4}u_{yy} - u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xxxx} + \frac{3}{2}(uu_x)_x + bu_{xx} = 0$$

が得られる。この方程式は dispersive な媒質内の波の二次元の非定常問題を記述している。 $u(x, y, t)$ はテ-ラ関数を用いれば

$$u(x, y, t) = E + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \mathcal{A}(Ax + By + Ct + F)$$

と表示される。

以上、 P_0 以外では正則で、 P_0 で二位の極を持つ有理型関数が存在すれば、この時 $\mathcal{A}$ は超楕円的で、 P_0 はその Weierstrass 点でなくてはならないが、その時

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x$$

が得られる。これは $t \rightarrow 4t$ と変数変換すれば KdV 方程式である。

P_0 が $b^3 + b^2k$ の形の極を持つ、他では正則な有理型関数が存在すれば Bousinesque の方程式が得られる。この方程式は KdV 方程式より前に、水の波を記述するものとして知られていたものである。

引用文献

1. N.I. Akhiezer, A continuous analogue of orthogonal polynomials on a system of intervals, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 1409 - 1412
2. B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zonal linear operators and abelian varieties, Uspehi Math. Nauk 31 (1976), 55-136 (Russian)
3. D. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, A method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095-1098
4. I. M. Krichever, Algebro-geometric construction of Zakharov-Shabat equation and its periodic solutions, Dokl. Akad. Nauk USSR 227 (1976), 291-294 (Russian)
5. ———, Algebraic curves and commuting matrix differential operators, Functional Anal. and Its Appl. 10 (1976), 75-76 (Russian)
6. L. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure and Appl. Math. 21 (1968), 467-490

7. S. P. Novikov, The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation I, Functional Anal. and Its Appl. 8 (1974), 236-246
8. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem I, Functional Anal. and Its Appl. 8 (1974), 226-235