

Branched covering space と Jones Polynomial

東大・理・数学 重原正明 (Masaaki Shigehara)

$(3, 1)$ -knot の Jones polynomial について考える。

knot の Alexander polynomial は, infinite cyclic cover とその covering transformation を用いて定義することができる。ところが, 同様に Conway calculus を用いて定義される, 1変数および2変数の Jones polynomial は, knot の場合に限っても, その covering space や branched covering space との関係は, それほどわかってはいない。

2つの oriented knot が mutant ([2]参照) であれば, その2つの knot は (1変数および2変数の) Jones polynomial も double cyclic branched covering space も等しくなる。このことから, 2つの knot の double cyclic branched covering space が等しいとき, その2つの knot の Jones polynomial は等しいのではないかという予想が成立する。ところが knot が prime でない場合には, 例えば granny knot と

square knot のように、1 変数 Jones polynomial の係数が、0 次を中心として対称になつていない knot を、向きの組み合わせを変えて 2 つ connected sum したものの組を考えれば、すぐに反例があることがわかる。そこで、prime knot に限定したらどうなるかが問題となる。

予想 2 つの prime knot の double cyclic branched covering space が等しいとき、その 2 つの knot の 1 変数 Jones polynomial は等しい。

ここでは、いくつかの反例を示して上の予想を否定的に解く。さらにいくつかの double branched covering space が等しい knot の組についても、その Jones polynomial 等を示す。なお、Alexander polynomial ではすでに反例 (double branched covering space が同じで polynomial が異なる。) がある ([5]) ので、2 変数 Jones polynomial についても、上の予想は否定的に解かれている。

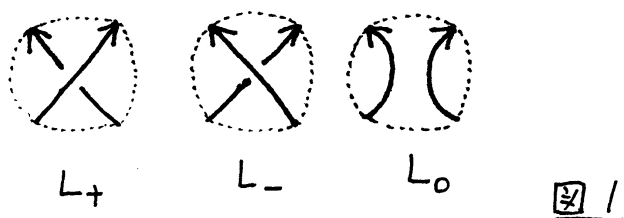
1 変数および 2 変数の Jones polynomial V および P の定義については、[3] のものに従う。つまり、

$$(1) \quad V_{\text{trivial knot}} = 1 \quad (1)' \quad P_{\text{trivial knot}} = 1$$

$$(2) \quad t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0} \quad (2)' \quad l^{-1}P_{L_+} - lP_{L_-} = mP_{L_0}$$

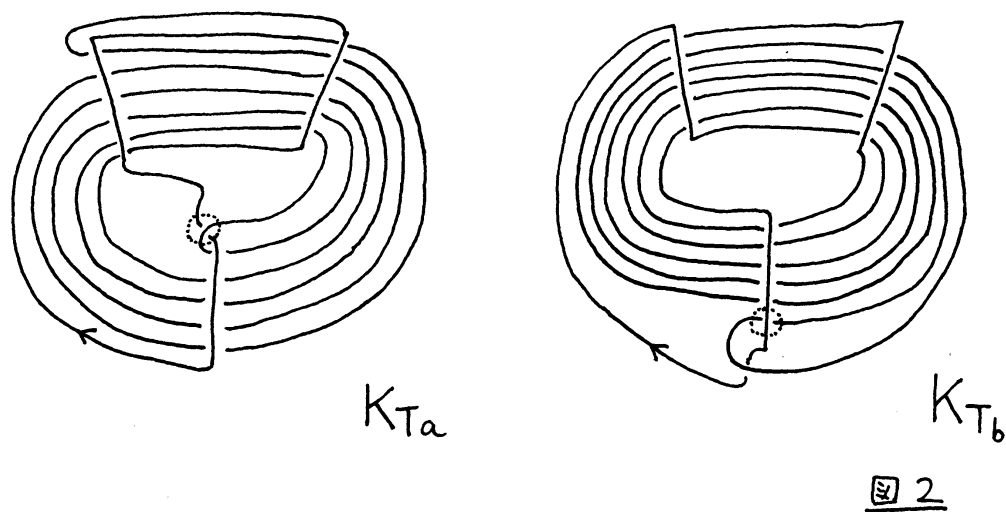
(ただし L_+ , L_- , L_0 はある球の内部では図 1 の通りで、その外では同一の、3 つの oriented link)

によって、 $V_L(t)$, $P_L(l, m)$ (L はoriented link) を定義する。



1. 高橋の例について

図2の2つのknotは、[5]で示された double cyclic branched coverが同じ2つのknotで、 $n=2$ とおいたものである。([5]ではこの2つのknotのAlexander polynomialを計算することによって別のknotであることを示している。) この2つのknotの1変数Jones polynomialを計算する。図2に示した交点でcrossing changeをするとどちらも trivial knot になり、一方smoothingをすると、 K_{Ta} の



方は L_T (図3) に、 K_{Tb} の方は L_T の mirror image になる。

よって、

$$V_{K_{Ta}}(t) = t \left\{ \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_T}(t) + 1 \cdot t \right\}$$

$$V_{K_{Tb}}(t) = t \left\{ \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_T}(t^{-1}) + 1 \cdot t \right\}$$

計算により、

$$V_{L_T}(t) = \sqrt{t} (-t^6 - t^4 - t^{-1} + t^{-2})$$

であるから、

$$V_{K_{Ta}}(t) = -t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 2 - t^{-1}$$

$$V_{K_{Tb}}(t) = t^3 - t^2 + t - t^{-3} + t^{-4} - t^{-5} + t^{-6}$$

となり、 $V_{K_{Ta}} \neq V_{K_{Tb}}$ となる。また以下 $\widehat{K}$ で knot K の double cyclic branched covering space を表わすことにすると、

$\widehat{K_{Ta}}$ の Heegaard splitting を考えることによつて、

$$H_1(\widehat{K_{Ta}}) = H_1(\widehat{K_{Tb}}) = 1 \quad (\mathbb{Z} \text{ 係数})$$

つまり $\widehat{K_{Ta}}$ も $\widehat{K_{Tb}}$ も Homology sphere であることがわかる。

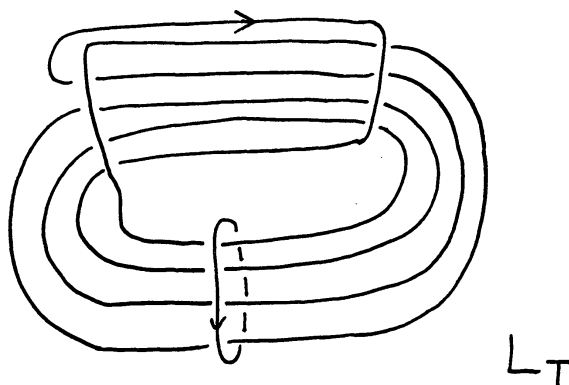


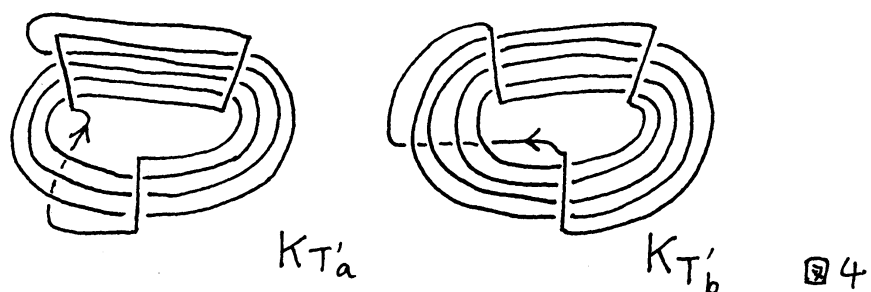
図3

ちなみに[5]の $n=1$ の例(図4)について計算機で計算した結果は次の通りである。この場合もdouble branched covering spaceはhomology sphereとなる。

$$V_{K_{T'_a}} = t^{-5} + t^{-7} - t^{-11} + t^{-12} - t^{-13}$$

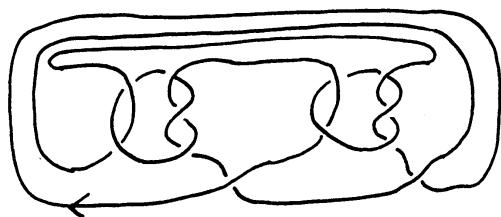
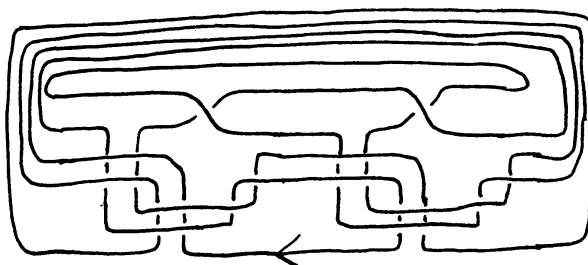
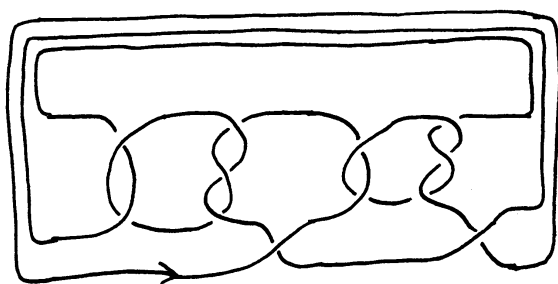
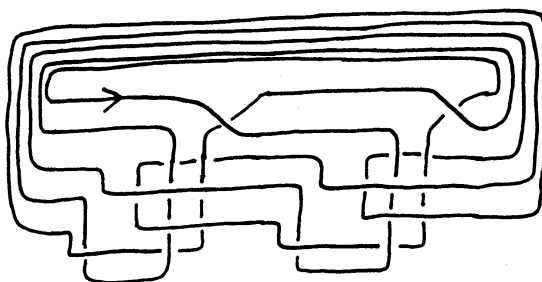
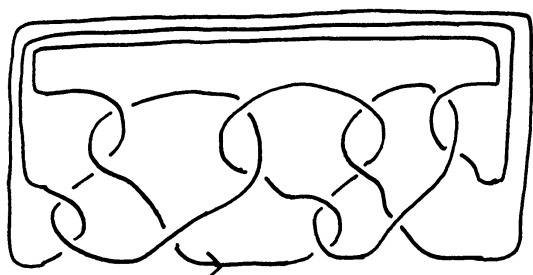
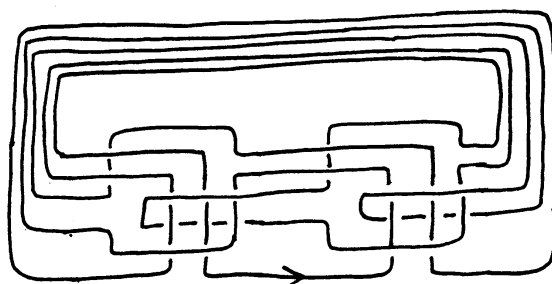
$$V_{K_{T'_b}} = -t^{14} + t^8 + t^6$$

$K_{T_a}, K_{T_b}, K_{T'_a}, K_{T'_b}$ が prime かどうか筆者には不明である。



2. 中西・作間の例

[4]および[6]で示された n -fold cyclic branched covering spaceが等しいknotの例の、 $n=2$ の場合(図5, 6, 7)について、その(1変数および2変数) Jones polynomialを計算機で計算した。この例の各組のknotは、 K_{N3_b} 以外はいずれも[4]でprimeであることが示されている。計算時間は1つのknotについて最大でも数時間であった。その結果を、double cyclic branched covering spaceの1次元 $\mathbb{Z}$ 係数homology群(元のknotのSeifert surfaceから考える。)と一緒に示す。

 K_{N1a}  K_{N1b} 图 5 K_{N2a}  K_{N2b} 图 6 K_{N3a}  K_{N3b} 图 7

$$\begin{aligned}
P_{KN1a} &= \ell^4(m^4 + 2m^2 + 1) \\
&\quad - \ell^2(m^6 + 5m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad + (m^6 + 7m^4 + 13m^2 + 8) \\
&\quad - \ell^{-2}(m^4 + 4m^2 + 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{KN1b} &= \ell^2 \\
&\quad - 2m^2 \\
&\quad - \ell^{-2}(2m^2 + 1) \\
&\quad + \ell^{-4}(m^6 + 6m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad - \ell^{-6}(m^6 + 7m^4 + 15m^2 + 8) \\
&\quad + \ell^{-8}(m^4 + 4m^2 + 4)
\end{aligned}$$

$$V_{KN1a} = t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 4t + 4 - t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

$$\begin{aligned}
V_{KN1b} &= t^2 - 2t + 4 - 3t^{-1} + 3t^{-2} - 3t^{-3} + 2t^{-4} - 2t^{-5} + t^{-6} \\
&\quad - t^{-7} + t^{-8} - t^{-9} + t^{-10}
\end{aligned}$$

$$H_1(\widetilde{KN1a}) \cong H_1(\widetilde{KN1b}) \cong \mathbb{Z}/25$$

$$\begin{aligned}
P_{KN2a} &= (m^4 + 4m^2 + 4) \\
&\quad - \ell^{-2}(m^6 + 7m^4 + 13m^2 + 7) \\
&\quad + \ell^{-4}(m^6 + 5m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad - \ell^{-6}(m^4 + 2m^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{KN2b} &= -\ell^{10}(m^4 + 4m^2 + 4) \\
&\quad + \ell^8(m^6 + 7m^4 + 15m^2 + 8)
\end{aligned}$$

$$-l^6(m^6+6m^4+9m^2+5)$$

$$+l^4(2m^2+1)$$

$$+l^2(2m^2+1)$$

$$V_{KN2a} = t^2 - t + 1 + t^{-1} - 3t^{-2} + 4t^{-3} - 5t^{-4} + 5t^{-5} - 4t^{-6} \\ + 3t^{-7} - t^{-8}$$

$$V_{KN2b} = -t^{12} + t^{11} - t^{10} + t^9 - t^8 + 2t^7 - 2t^6 + 3t^5 - 3t^4 \\ + 3t^3 - 3t^2 + 2t$$

$$H_1(\widetilde{KN2a}) \cong H_1(\widetilde{KN2b}) \cong \mathbb{Z}/23$$

$$P_{KN3a} = l^4(m^4+2m^2+2) \\ - l^2(m^6+5m^4+10m^2+6) \\ + (m^6+7m^4+12m^2+7) \\ - l^{-2}(m^4+4m^2+2)$$

$$P_{KN3b} = l^2 \cdot 2 \\ - (3m^2+1) \\ - l^{-2}(3m^2+2) \\ + l^{-4}(m^6+6m^4+9m^2+6) \\ - l^{-6}(m^6+7m^4+15m^2+8) \\ + l^{-8}(m^4+4m^2+4)$$

$$V_{KN3a} = t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 5 - 2t^{-1} + t^{-2} \\ + t^{-3} - t^{-4}$$

$$V_{K_{N3b}} = 2t^2 - 3t + 5 - 5t^{-1} + 4t^{-2} - 4t^{-3} + 3t^{-4} - 2t^{-5} + t^{-6} \\ - t^{-7} + t^{-8} - t^{-9} + t^{-10}$$

$$H_1(\widetilde{K_{N3a}}) \cong H_1(\widetilde{K_{N3b}}) \cong \mathbb{Z}/33$$

この例を見てわかる通り、1変数Jones polynomialそのものだけでなく、そのrelative degree（最高次の項と最低次の項の次数の差）や、さらにそれを2で割った剰余もdouble cyclic branched covering spaceからは決まらないことがわかる。

これらの例から1変数Jones polynomialとdouble cyclic branched covering spaceとの関係を予測することは今のところできていない。

なお、1変数Jones polynomialが等しくてdouble cyclic branched covering spaceが異なるknotとしては、[1]にある図8のknotがその例となっている。（[1] Section 6 参照）

n: even

n: odd

ただし

$$\overline{n} = \begin{cases} \text{n-half twists} & n > 0 \\ \text{n-half twists} & n = 0 \\ \text{|n|-half twists} & n < 0 \end{cases}$$

※ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & q \\ r & p \end{pmatrix}$ とし、 $p \neq \pm 1$ が等しく、 q が異なるような2つのknotをとる。

図8

[参考文献]

- [1] T. Kanenobu: Examples on Polynomial Invariants of Knots and Links, Math. Ann. 275, 555-572 (1986)
- [2] W. B. R. Lickorish, A. S. Lipson : Polynomials of 2-cable-like links, preprint
- [3] 村上 育: リンク理論における多項式不変量, 報告集「低次元多様体の幾何学的諸相」14-32
- [4] Y. Nakanishi: Primeness of Links, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9, 415-440 (1981)
- [5] 高橋元男: 8の字結び目のsurgery で出来る homology spheres, 「多様体に於ける低次元トポロジーの問題」京大数理研講究録 309
- [6] M. Sakuma: Periods of Composite Links, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9, 445-452 (1981)