

関数空間の線形位相的性質について

横浜国大 寺田 敏司 (Toshiji Terada)

ここで考える位相空間は、すべて $T_{3\frac{1}{2}}$ を仮定し、線形空間のスカラーは実数とする。位相空間 X に対して、 X 上の実数値連続関数全体を $C(X)$ で表し、 $C(X)$ のメンバーで有界な関数全体を $C^*(X)$ と表す。 $C(X)$ および $C^*(X)$ は、普通に線形空間とみなす。さらに、 $C(X), C^*(X)$ 上に *pointwise convergence* の位相を考えて得られる位相線形空間を $C_p(X), C_p^*(X)$ と表すことにする。これらの関数空間 $C_p(X), C_p^*(X)$ に関する主要な興味は、 X 上の純粋に位相的性質が、 $C_p(X)$ または、 $C_p^*(X)$ 上の適当な線形位相的性質で特徴付けられるか、という問題である。

ここでは、*compact* 性および *no-bounded* 性と呼ばれる位相的性質が、 $C_p(X)$ の線形位相的性質で一応特徴付けられることを示す。さらに、これらの結果は、ほとんど *General Topology* 的な方法で得られることも示す。

§ 1. 準備

1.1. 定義. A を線形空間 E の部分集合とする。

- (1) $t \in \mathbb{R}$ をみたす任意のスカラー t に対して $tA \subset A$ となるとき, A は *circled* とよばれる。
- (2) E の任意のベクトル x に対して, 正のスカラー ρ_x が定まり, $0 \leq t \leq \rho_x$ ならば $tx \in A$ となるとき, A は *absorbent* とよばれる。

これらの定義および, 基本的な結果は, [2], [3], [5] などと, 参照して下さい。

1.2. 補助定理. 任意の位相線形空間は, 次の2条件をみたす 0 の近傍基底 $\mathcal{U}$ をもつ。

NB1) $\mathcal{U}$ の任意のメンバーは, *circled* かつ *absorbent*.

NB2) $\mathcal{U}$ の任意のメンバー U に対し, $\mathcal{U}$ のメンバー V で, $V+V \subset U$ をみたすものがとれる。

逆に, 線形空間 E 上に, NB1) と NB2) をみたす *filter basis* $\mathcal{U}$ が与えられれば, $\mathcal{U}$ を 0 の近傍基底とする線形位相がただ一つ定まる。

この事実から, $C(X)$ および $C^*(X)$ 上に各種の位相を考
えることができる。実際, X を位相空間とし, νX を X の
real compactification とする。良く知られているように,
 $C(X)$ と $C(\nu X)$ は, 代数的には, 同一視できる。ここでも,
 $C(X) = C(\nu X)$ と考える。 B を νX の任意の部分集合とし, ε
を任意の実数 (> 0) とする。

$$\langle B, \varepsilon \rangle = \{ f \in C(X) \mid f(B) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \}$$

と定める。今, $\mathcal{B}$ を νX の compact 部分集合の族で, 次の条
件をみたすものとする。

- i) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} \quad \text{s.t.} \quad B_1 \cup B_2 \subset B_3,$
- ii) $\cup \{ B \mid B \in \mathcal{B} \}$ は, νX で dense。

そこで,

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{ \langle B, \varepsilon \rangle \mid B \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \}$$

と定めると, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ は 1, 2. の NB1), NB2) をみたす $C(X)$ の
filter basis となる。 $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ が定める線形位相を $\tau_{\mathcal{B}}$ で表し,
この位相の与えられた $C(X)$ を $C_{\mathcal{B}}(X)$ で表すことにする。
 $C_{\mathcal{B}}^*(X)$ も同様に考えられる。

例 1. $\mathcal{B} = \{ F \mid F \text{ は } X \text{ の有限集合} \}$ とすれば,
 $C_{\mathcal{B}}(X) = C_p(X)$.

例 2. $\mathcal{B} = \{K \mid K \text{ は } X \text{ の compact 部分集合}\}$ とするとき, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ は compact-open 位相で, このとき $C_{\mathcal{B}}(X)$ で表すことにする。

1.3. 補助定理. $\mathcal{B}$ を UX の compact 部分集合の族で, 1.2 の条件 i), ii) をみたすものとする。 μ を $C_{\mathcal{B}}(X)$ から $\mathbb{R}$ への 0 でない連続かつ線形な写像とする。このとき, UX の compact 部分集合 A (これを $\text{supp}(\mu)$ と表す) で, 次の条件をみたすものがある。

- a) $\mathcal{B}$ のあるメンバー B を $A \subset B$ となるようにとれる。
- b) $f|_A = 0$ ($f \in C(X)$) ならば, $\mu(f) = 0$ である。
- c) $A \cap G \neq \emptyset$ となる UX の任意の開集合 G に対して, $f|_{UX-G} = 0$ かつ $\mu(f) = 1$ をみたす $f \in C(X)$ がある。

証明. (位相的な証明). $\mathbb{R}$ の開区間 $(-1, 1)$ の逆像 $U = \mu^{-1}((-1, 1))$ は, $C_{\mathcal{B}}(X)$ の 0 の凸近傍である。 A , UX の compact 部分集合 K で,

$$(*) \quad \forall f \in C(X) \quad (f|_K = 0 \Rightarrow f \in U)$$

をみたす K の集合を $\mathcal{K}_U$ と表すことにする。このとき, U は 0 の近傍であるから, $\mathcal{B}$ のメンバー K_0 と $\varepsilon_0 > 0$ を

$\langle K_0, \varepsilon_0 \rangle \subset \sqcup$ をみたすように選べる。明らかに, $K_0 \in \mathcal{K}_\sqcup$ となるから, $\mathcal{K}_\sqcup \neq \emptyset$ である。

(1) $K \in \mathcal{K}_\sqcup$ である必要十分条件は, K のある近傍 V において $f|_V = 0$ をみたす $f \in C(X)$ が, つねに $f \in \sqcup$ となることである。

実際, 後半の条件は明らかに前半の条件の必要条件である。逆に, 後半の条件がみたされたとする。 $f \in C(X)$ が, $f|_K = 0$ をみたしたとすれば, $g = (f \vee (\frac{\varepsilon_0}{2})) + (f \wedge (-\frac{\varepsilon_0}{2}))$ と考えると, $2g$ は K の近傍 $V = \{x \in \cup X \mid |f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ の各点で 0 となるから, $2g \in \sqcup$ である。一方, $|2(f-g)| < \varepsilon_0$ であるから, $2(f-g) \in \langle K_0, \varepsilon_0 \rangle \subset \sqcup$ でもある。 $\sqcup$ は凸集合であるから, $f = \frac{1}{2}(2(f-g)) + \frac{1}{2}(2g) \in \sqcup$ となる。よって, $K \in \mathcal{K}_\sqcup$ がいえる。

(2) $\mathcal{K}_\sqcup$ は有限交叉性をもつ。

これを示すには, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_\sqcup$ ならば $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}_\sqcup$ となることを示せばよい。そこで, $f \in C(X)$ が, $K_1 \cap K_2$ のある近傍 V において, $f|_V = 0$ であるとする。

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) & (x \in K_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in K_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたす $g \in C(X)$ の存在は明らか。 $g|_{K_2} = 0$ より, $g \in \sqcup$ が導け, $(2f-g)|_{K_1} = 0$ より, $2f-g \in \sqcup$ が導け

る。よって, $f = \frac{1}{2}(2f - g) + \frac{1}{2}g \in \mathcal{U}$ となる。

(3) $A = \bigcap \{K \mid K \in \mathcal{K}_\mu\} \in \mathcal{K}_\mu$ である。

まず, $\mathcal{K}_\mu$ のメンバーはコンパクトであるから, $A \neq \emptyset$ は明らか。今, $f \in C(X)$ は A のある近傍 V において, $f|_V = 0$ をみたすものとする。このとき, $K \subset V$ となる K が, $\mathcal{K}_\mu$ のメンバーとして存在する。 $f|_K = 0$ ゆえ, $f \in \mathcal{U}$ となる。このことは, $A \in \mathcal{K}_\mu$ を導く。

(4) A は a), b), c) の条件をみたす。

a) は $A \subset K_0$ より明らか。 b) $f \in C(X)$ が $f|_A = 0$ をみたすとする。任意のスカラー α に対し, $\alpha f|_A = 0$ ゆえ, $\alpha f \in \mathcal{U}$, すなわち, $|\mu(\alpha f)| \leq 1$ 。これより, $\mu(f) = 0$ が得られる。 c) $U X$ の開集合 G が, $G \cap A \neq \emptyset$ をみたすとする。 $A - G \in \mathcal{K}_\mu$ ゆえ, $A - G$ のある近傍 V と $g \in C(X)$ で $g|_V = 0$, $\mu(g) = 1$ をみたすものがとれる。ところで, $G \cup V$ は A の近傍であるから, $h \in C(X)$ を $h(A) = \{1\}$, $h(U X - (G \cup V)) = \{0\}$ をみたすようにとれる。そこで, $f = h \cdot g$ (積) を考えれば, $f|_{U X - G} = 0$ であり, $f|_A = g|_A$ ゆえ, $\mu(f) = \mu(g) = 1$ が成り立つ。

$\text{supp}(\mu)$ が μ に対して一意的に定まることも、明らかである。

§ 2. 関数空間の線形位相的性質

2.1. 定義. A を位相線形空間 E の部分集合とする。

1) A が absorbent, circled, convex かつ closed であるとき, A は barrel とよばれる。

2) A が barrel で, 0 の barrel である近傍の列 $\{A_i\}$ によって $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と表せるとき, A は κ_0 -barrel とよばれる。

局所凸線形位相空間 E において, すべての barrel が, 0 の近傍となるとき, E は barrelled であるといわれる。また, すべての κ_0 -barrel が 0 の近傍となる場合には, E を κ_0 -barrelled であるといふ。

2.2. 補助定理 (Nachbin-Shirota [4], [6]) . 位相空間 X に対して, 次は同値である。

(1) $C_K(X)$ が barrelled である。

(2) X の任意の relatively pseudocompact な閉集合は compact である。

この結果の位相的証明は, Asanov-Shamgnov [1] にある。

2.3. 定義 ([5]). $\mathcal{P}$ を局所凸位相線形空間における線形位相的性質とする。すなわち, E と F が局所凸位相線形空間で *linearly homeomorphic* とするとき, E が性質 $\mathcal{P}$ をもつならば F も性質 $\mathcal{P}$ をもつものとする。さらに, $\mathcal{P}$ は, *inductive limits* に関して閉じていて, *finest* 局所凸位相をもつ位相線形空間は, 性質 $\mathcal{P}$ をもつとする。いま, $(E, \mathcal{T})$ は局所凸位相線形空間, すなわち, 局所凸線形位相 $\mathcal{T}$ をもつ線形空間 E , とする。このとき, E 上に $\mathcal{T}$ より弱くなく, 性質 $\mathcal{P}$ をもつ局所凸線形位相のうちで, 最も弱いもの $\mathcal{S}$ が存在する。この位相線形空間 $(E, \mathcal{S})$ を, $(E, \mathcal{T})$ に *associate* する $\mathcal{P}$ -space という。

一般に, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ より強くなる。

2.4. 定義 ([5]). 位相空間 X に対し, X' は次のように定められる $\cup X$ の部分空間とする。

$$X' = \cup \{ \mathcal{C}_{\cup X} A \mid A \text{ は } X \text{ の relatively pseudo-compact 部分集合} \}$$

超限帰納法により, $X_0 = X$, $X_{\alpha+1} = (X_\alpha)'$, また α が limit ordinal α とき, $X_\alpha = \cup \{ X_\beta \mid \beta < \alpha \}$ と定める。このとき, ある λ において, $X_\lambda = X_{\lambda+1}$ となる。この X_λ を

μX で表す。明らかに, $X \subset \mu X \subset \nu X$ であるから, $C(\mu X) = C(X)$ と考えてよい。

2.5. 補助定理 ([5]), $C_p(X)$ に associate する barrelled space は $C_\kappa(\mu X)$ である。

証明. 2.2. により, $C_\kappa(\mu X)$ は barrelled である。さらに, $C_\kappa(\mu X)$ の位相が $C_p(X)$ の位相より弱くないことも, 明らか。したがって, μX の任意の compact 部分集合 K と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\langle K, \varepsilon \rangle$ が $C_p(X)$ に associate する barrelled space において, 0 の近傍になることを示せばよい。

まず, $C_p(X)$ に associate する barrelled space の位相は $C_p(\mu X)$ の位相より弱くないことは明らか。そこで,

$$H_K = \{ f \in C(\mu X) \mid |f(x)| \leq \varepsilon/2 \text{ for } \forall x \in K \}$$

と定めると, H_K は $C_p(\mu X)$ において, barrel である。したがって, H_K は $C_p(X)$ に associate する barrelled space においても, barrel であり, よって, 0 の近傍である。 $H_K \subset \langle K, \varepsilon \rangle$ であるから, $\langle K, \varepsilon \rangle$ も $C_p(X)$ に associate する barrelled space において 0 の近傍となる。

2.6. 系. 位相空間 X に対して, 次は同値である.

(1) X は pseudocompact である.

(2) $C_p(X)$ に associate する barrelled space は normable である.

2.7. 補助定理 ([5]). 位相空間 X に対して,

$$B_{\alpha_0} = \{ \text{cl}_{\alpha_0} A \mid A \subset X, |A| \leq \alpha_0, A \text{ は relatively pseudocompact} \}$$

と定める. $C_p(X)$ に associate する α_0 -barrelled space は $C_{B_{\alpha_0}}(X)$ と同じである.

証明. まず, $C_{B_{\alpha_0}}(X)$ が α_0 -barrelled であることを示す. 今, $H = \bigcap \{ W_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ は $C_{B_{\alpha_0}}(X)$ の α_0 -barrel, ここで, W_n は barrel の 0 の近傍, とする. $C^*(X)$ 上に sup-norm を与えて得られる Banach space を $C_n^*(X)$ で表す. $C_n^*(X) \cap H$ は, $C_n^*(X)$ において barrel であるから, 0 の近傍となる. よって, $\sigma > 0$ が存在して, $f \in C^*(X)$ かつ $\|f\| \leq \sigma$ ならば, $f \in H$ とできる. 一方, 各 n に対して, $K_n \in B_{\alpha_0}$ および, $\varepsilon_n > 0$ が存在して, $\langle K_n, \varepsilon_n \rangle \subset W_n$ とできる. このとき, $\varepsilon = (\frac{1}{2})\sigma$ と定めると, 各 n に対して

$$\langle K_n, \varepsilon \rangle \subset W_n$$

が成り立つ。実際、 $f \in \langle K_n, \varepsilon \rangle$ とすれば、 $|2f(x)| < \sigma$ だが、 K_n の任意の x について成り立つ。今、 $g \in C^*(X)$ を $g|_{K_n} = 2f|_{K_n}$, $\|g\| < \sigma$ となるようにとる。 $g \in H \subset W_n$ 。
また、 $2f - g \in \langle K_n, \varepsilon \rangle \subset W_n$ も明らかであるから、
 $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(2f - g) \in W_n$ となる。

次に、 $K = \text{cl}_{\nu_X} \cup \{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める。 K が $\mathcal{B}_{\mathcal{H}_0}$ のメンバーであることは明らか。また、

$$\langle K, \varepsilon \rangle \subset \bigcap \{ \langle K_n, \varepsilon \rangle \mid n \in \mathbb{N} \} \subset H$$

も成立する。よって、 H は、 $C_{\mathcal{B}_{\mathcal{H}_0}}(X)$ において、 0 の近傍である。以上によって、 $C_{\mathcal{B}_{\mathcal{H}_0}}(X)$ が $\mathcal{H}_0$ -barrelled であることが知られる。

そこで、 A を X の任意の relatively pseudocompact である可算集合とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\langle \text{cl}_{\nu_X} A, \varepsilon \rangle$ の $C_p(X)$ における閉包は barrel であり、

$$\overline{\langle \text{cl}_{\nu_X} A, \varepsilon \rangle} = \bigcap \{ H_F \mid F \text{ は } A \text{ の有限集合} \}$$

ここで、 $H_F = \{ f \in C(X) \mid |f(x)| \leq \varepsilon \text{ for } \forall x \in F \}$ と表せる。 $\overline{\langle \text{cl}_{\nu_X} A, \varepsilon \rangle}$ は $\mathcal{H}_0$ -barrel であるから、 $C_p(X)$ に associate する $\mathcal{H}_0$ -barrelled space において $\mathcal{H}_0$ -barrel であり、したがって、 0 の近傍となる。よって、 $C_{\mathcal{B}_{\mathcal{H}_0}}(X)$ が、 $C_p(X)$ に associate する $\mathcal{H}_0$ -barrelled space に他ならずたことかわかる。

§3. Compact 性 および $\mathcal{B}_0$ -bounded 性 の特徴付け

3.1. 定義. $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ を線形空間 E 上の線形位相とし, $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$ とする. u を $(E, \mathcal{T}_1)$ から実数空間 $\mathbb{R}$ への連続な線形写像とする. 次の条件が成り立つとき, u は $(E, \mathcal{T}_2)$ に関して, special outer functional であるという.

- a) u は $(E, \mathcal{T}_2)$ 上では連続でない。
- b) E の任意の点列 $\{f_n\}$ に対して, 連続な線形写像 $u_0: (E, \mathcal{T}_2) \rightarrow \mathbb{R}$ があって, $u_0(f_n) = u(f_n)$ が各 n について, 成り立つようにできる。

3.2. 補助定理. 位相空間 X に対して, $\mathcal{B}$ は 1.2 の条件 i), ii) をみたす $\forall X$ の compact 部分集合の族とする. $\mathcal{B}$ はさらに, $X \subset \cup \mathcal{B}$ もみたすものとする. u を $C_b(X)$ から $\mathbb{R}$ への連続な線形写像とすると, 次は同値である。

- (1) u は $C_p(X)$ に関して, special outer functional である。
- (2) $\text{supp}(u)$ は, $\forall X$ の有限集合で, $\text{supp}(u) \cap (\forall X - X) \neq \emptyset$ をみたす。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). $\text{supp}(u)$ が, $\forall X$ の無限集合とする

と, UX の開集合の列 $\{U_n\}$ を, 互いに交わりなく, 各 n について, $U_n \cap \text{supp}(u) \neq \emptyset$ となるようにとれる。1.3 により, 各 n に対して, $f_n \in C(X)$ を $f_n|_{UX-U_n} = 0$, $u(f_n) = 1$ となるようにとれる。このとき, $C_p(X)$ から $\mathbb{R}$ への任意の連続な線形写像 u_0 に対して, $\text{supp}(u_0)$ は有限集合であるから, 十分大きい n に対して $u_0(f_n) = 0 \neq 1 = u(f_n)$ である。すなわち, u は 3.1 の b) を満たさないことになる。また, u は $C_p(X)$ 上の写像としては連続でないならば, 当然 $\text{supp}(u) \cap (UX - X) \neq \emptyset$ となる。

(2) $\Rightarrow$ (1). u は (2) の条件を満たすものとする。今, $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_j\}$ と, $\text{supp}(u) \cap (UX - X) = \{y_1, \dots, y_j\}$ とする。 u は

$$u = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_k \delta_{x_k} + \beta_1 \delta_{y_1} + \dots + \beta_j \delta_{y_j}$$

と表せる。ここで, δ_z は $\delta_z(f) = f(z)$ で定義される写像 $\delta_z: C(UX) \rightarrow \mathbb{R}$ である。 u は明らかに $C_p(X)$ 上では連続でない。また, $\{f_n\}$ を $C(X)$ の任意の列とする。

$$Z_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n^{-1}(f_n(y_i))\} \quad (i=1, 2, \dots, j)$$

と定めると, Z_i は UX の zero-set であるから, $Z_i \cap X \neq \emptyset$ かつ各 $i=1, 2, \dots, j$ について成り立つ。各 $Z_i \cap X$ から 1 点 z_i をとる。そこで

$$u_0 = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_k \delta_{x_k} + \beta_1 \delta_{z_1} + \dots + \beta_j \delta_{z_j}$$

と定めると, $u_0: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続かつ線形であり,
各 n に対して,

$$\begin{aligned} u_0(f_n) &= \alpha_1 f_n(x_1) + \cdots + \alpha_k f_n(x_k) + \beta_1 f_n(z_1) + \cdots + \beta_j f_n(z_j) \\ &= \alpha_1 f_n(x_1) + \cdots + \alpha_k f_n(x_k) + \beta_1 f_n(y_1) + \cdots + \beta_j f_n(y_j) \\ &= u(f_n) \end{aligned}$$

となる。よって, u は $C_p(X)$ に関して, special outer functional である。

3.3. 定理. 位相空間 X に対して, 次は同値である。

- (1) X は $\mathfrak{M}_0$ -bounded (i.e. 任意の可算部分集合の閉包は compact) である。
- (2) $C_p(X)$ に associate する barrelled space は normable であって, $C_p(X)$ に associate する $\mathfrak{M}_0$ -barrelled space は $C_p(X)$ に関して special outer functional をもたない。

証明. (1) $\rightarrow$ (2). $\mathfrak{M}_0$ -bounded ならば "pseudocompact" であるから, (2) の前半は 2.6 の結果から明ら。さらに, X は $\mathfrak{M}_0$ -bounded ならば, $\mathcal{B}_{\mathfrak{M}_0}$ のメンバーはすべて, X の部分集合である。したがって, $C_{\mathcal{B}_{\mathfrak{M}_0}}(X)$ から $\mathbb{R}$ への任意の連続な線形写像 u に対して $\text{supp}(u) \subset X$ となる。よって, $C_{\mathcal{B}_{\mathfrak{M}_0}}(X)$ は $C_p(X)$ に関して, special outer functional を

もたない。

(2) $\rightarrow$ (1). (2) の前半から, X は pseudocompact でなければならぬ。また, X が σ -bounded でないとする。ある可算集合 $A \subset X$ がとれて, $(\text{cl}_{\beta X} A) - X \neq \emptyset$ とできる。

$y \in (\text{cl}_{\beta X} A) - X$ とする点 y をとり, $\delta_y : C_{B_{\sigma_0}}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を, $\delta_y(f) = f(y)$ で与えられる写像とすると, 3.2 により, δ_y は $C_p(X)$ に関して special outer functional である。

3.4. 定理. 位相空間 X に対して, 次は同値である。

(1) X は compact である。

(2) $C_p(X)$ に associate する barrelled space は normable であり, $C_p(X)$ に関して special outer functional をもたない。

証明. (1) $\rightarrow$ (2). X が compact ならば, $X = \mu X = \beta X$ であるから, 明らか。

(2) $\rightarrow$ (1). (2) の前半から, X は pseudocompact となり, $\beta X = \mu X$ が得られる。また後半から, $\mu X = X$ が得られる。よって, $X = \beta X$ となる。

文献

- [1] Asanov, M.O. and Shamgunov, N.K.; The topological proof of the Nachbin-Shirota's theorem, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 24, (1983), 693-699
- [2] Jarchow, H.; *Locally Convex Spaces*, B.G. Teubner Stuttgart, 1981.
- [3] Kelly, J. L. and Namioka, I.; *Linear topological spaces*, Princeton, 1963.
- [4] Nachbin, L.; Topological vector spaces of continuous functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 40, (1954), 471-474.
- [5] Schmets, J.; *Espaces de fonctions continues*, Lecture notes in math. 519, Springer-Verlag, 1976.
- [6] Shirota, T.; On locally convex vector spaces of continuous functions, *Proc. Japan Acad.* 30, (1954), 294-298