

s-d系におけるくりこみ群

— Abrikosov-Migdal の方法を中心にして —

東工大・理 杉 山 忠 男

関東学院大・工 山 本 隆

斎 藤 輝 夫

東邦大・医 大 島 洋

〔I〕 はじめに

近藤効果において、くりこみ群の cut-off energy を動かすことに対応するスケーリング則を最初に用いたのは、P. W. Anderson¹⁾であった。彼はそこで異方性のある s-d 交換相互作用を用いて、バンド幅 D を狭めていくと結合定数は次第に大きくなり、はじめ弱結合であったものでも最後には強結合になるであろうと推測した。しかし、この場合 $D \gg \omega$ の時のみスケーリング則を導く仮定が成り立ち $D \sim \omega$ のところに対しては、この議論は使えない。従って基底状態の近傍、すなわち、 D が小さい時の結合定数がどうなるかということは、はっきりしなかった。

この P. W. Anderson とほぼ同時期に M. Fowler and A. Zawadowski²⁾ と A. A. Abrikosov and A. A. Migdal³⁾ により、Gell-Mann-Low タイプのくりこみ群を用いた方法が提出された。ここでも $\omega \rightarrow 0$ の近傍での結合定数の値については、はっきりしなかった。特に後者では、この値が 1 の近くである時、電気抵抗と帯磁率について T/T_K の巾になるという結果を導いている。しかし帯磁率に関しては $T \rightarrow 0$ で $1/T$ より弱いけれども発散してしまい有限な結果が得られず、このくりこみ群の方法の限界を示した。

最近、K. G. Wilson⁴⁾ は、セル分割という独得な方法により結合定数の $\omega \rightarrow 0$ での固定点が $-\infty$ となることを得、又、数値計算により帯磁率、比熱に関しても良い結果を得ている。しかし、ここではセル分割によるくりこみ群の使用に適するようにハミルトニアンを書きかえ、かつ、数値計算に頼らなければならなかった。

そこで、ここではオーソドックスにくりこみ群を適用した場合の限界が何処にあるかを明確にするため、s-d 系におけるくりこみ群の方程式の定式化からていねいにはじめ、物理量の計算もなるべく詳細にたどってみることにした。そして、最後に異方性が

ある場合の第2発散項まで考慮した計算を行った。

〔II〕 くりこみ群

はじめに異方的な場合を考慮して、s-d 交換相互作用 ハミルトニアンを次のようにおく。

$$H_{sd} = - \left\{ \frac{1}{2} [J_+ \sigma_{\alpha\alpha'}^- S_{+\beta\beta'} + J_- \sigma_{\alpha\alpha'}^+ S_{-\beta\beta'}] + J_z \sigma_{\alpha\alpha'}^z S_{z\beta\beta'} \right\} \\ \times \Psi_{\alpha}^{\dagger}(0) \Psi_{\alpha'}(0) a_{\beta}^{\dagger}(t) a_{\beta}(t) \quad (1)$$

ここで $a_{\beta}^{\dagger}(t)$, $a_{\beta}(t)$ は Abrikosov⁵⁾ によって導入された pseudo-fermion の生成, 消滅演算子である。又, 以下断らないかぎり等方的であるとして, $J_+ = J_- = J_z = J_0$ とおく。

さて, くりこみ群の一般論に従って, くりこみ変換を次のようにおこう。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\alpha} &\rightarrow \alpha_1^{-1/2} \Psi_{\alpha} & G_0 &\rightarrow \alpha_1^{-1} G_0 & \Gamma_0 &\rightarrow \alpha_3 \Gamma_0 \\ a_{\beta} &\rightarrow \alpha_2^{-1/2} a_{\beta} & g_0 &\rightarrow \alpha_2^{-1} g_0 & J_0 &\rightarrow \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで, G_0 , g_0 , Γ_0 , J_0 は自由な Green 関数, 頂点部及び結合定数で, 運動量表示にして,

$$\left. \begin{aligned} G_0(\epsilon, \xi) &= \frac{1}{\omega - \xi(\mathbf{p}) + i\delta \text{sign} \xi} & \Gamma_0 &= -i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \\ g_{0\beta\beta'}(\omega) &= \frac{1}{\omega + i\delta \text{sign}(\beta - S)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

今, S は相互作用がない時の局在スピンの大きさを表わし, sign は, $\beta = S$ の時, プラス, $\beta < S$ の時, マイナスをとるものとする。又, pseudo-fermion のエネルギーを 0 とした。この時, (1) のハミルトニアン及びそれからつくられる S 行列は, すべて不変である。

頂点部 Γ は伝導電子のエネルギー ω のみに依存するとみなせることを考慮すると, Heisenberg 表示で書かれた量の間のくりこみ変換は,

$$\left. \begin{aligned}
G(\omega, \xi; \Gamma_0, G_0, g_0, J_0) \\
&= \alpha_1 G(\omega, \xi; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0) \\
g(\omega; \Gamma_0, G_0, g_0, J_0) \\
&= \alpha_2 g(\omega; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0) \\
\Gamma(\omega; \Gamma_0, G_0, g_0, J_0) \\
&= \alpha_3^{-1} \Gamma(\omega; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0)
\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。今、 $\omega = \lambda$, $\xi = \mu$ と固定した時、

$$\left. \begin{aligned}
G(\lambda, \mu; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0) &= G_0(\lambda, \mu) \\
g(\lambda; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0) &= g_0(\lambda) \\
\Gamma(\lambda; \alpha_3 \Gamma_0, \alpha_1^{-1} G_0, \alpha_2^{-1} g_0, \alpha_3^{-1} \alpha_1 \alpha_2 J_0) &= \Gamma_0
\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

から $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を決定し、その時の値を z_1, z_2, z_3 とする。この時、 μ を適当にとり $z_1 = 1$ としておく。次に、

$$\left. \begin{aligned}
g_\lambda(\omega; J_\lambda) &\equiv g(\omega; z_3 \Gamma_0, G_0, z_2^{-1} g_0, J_\lambda) \\
\Gamma_\lambda(\omega; J_\lambda) &\equiv \Gamma(\omega; z_3 \Gamma_0, G_0, z_2^{-1} g_0, J_\lambda) \\
J_\lambda &\equiv z_3^{-1} z_2 J_0
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

から、

$$\left. \begin{aligned}
d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) &\equiv g_0(\omega)^{-1} g_\lambda(\omega; J_\lambda) \\
r\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) &\equiv \Gamma_0^{-1} \Gamma_\lambda(\omega; J_\lambda)
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を定義すると、規格化の条件 (5) は、

$$\left. \begin{aligned} d(1, J_\lambda) &= 1 \\ r(1, J_\lambda) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。次に (4) の左辺がくりこみ変換に対して不変な量であることを用いると、

$$z_2 g_0(\lambda) = z_2 g_\lambda(\lambda; J_\lambda) = z'_2 g_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})$$

$$z_3^{-1} \Gamma_0 = z_3^{-1} \Gamma_\lambda(\lambda; J_\lambda) = z_3'^{-1} \Gamma_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})$$

であるが、更にこれらを用いて、

$$\begin{aligned} g_\lambda(\omega; J_\lambda) &= z_2^{-1} z'_2 g(\omega; J_{\lambda'}) \\ &= g_\lambda(\lambda; J_\lambda) g_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})^{-1} g(\omega; J_{\lambda'}) \\ &= g_0(\lambda) g_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})^{-1} g(\omega; J_{\lambda'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(\omega; J_\lambda) &= z_3 z_3'^{-1} \Gamma(\omega; J_{\lambda'}) \\ &= \Gamma_\lambda(\lambda; J_\lambda) \Gamma_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})^{-1} \Gamma(\omega; J_{\lambda'}) \\ &= \Gamma_0 \Gamma_{\lambda'}(\lambda; J_{\lambda'})^{-1} \Gamma(\omega; J_{\lambda'}) \end{aligned}$$

となる。最後に両辺に $g_0^{-1}(\omega)$, Γ_0^{-1} をかけて、

$$d\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) = d\left(\frac{\lambda}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) \quad (9)$$

$$r\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) = r\left(\frac{\lambda}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) r\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) \quad (10)$$

となり、これらがくりこみ変換の基本方程式である。

続いて不変結合定数の表式を得るために、(4) と (7) から、

$$z_2 d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) = z'_2 d\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) \quad \left. \vphantom{\frac{\omega}{\lambda}} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} z_3^{-1} \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) &= z_3'^{-1} \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であり、又、関係式

$$z_3'^{-1} z_2' J_\lambda = z_3^{-1} z_2 J_{\lambda'} \quad (12)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) J_\lambda \\ = d\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda'}, J_{\lambda'}\right) J_{\lambda'} \equiv J_{\text{inv.}} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。これはくりこみ変換に対し不変であるから不変結合定数という。

次に、摂動計算を使いやすくするために、

$$\left. \begin{aligned} d_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) &\equiv g_0(\omega)^{-1} g(\omega; \Gamma_0, G_0, g_0, J_0) \\ \gamma_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) &\equiv \Gamma_0^{-1} \Gamma(\omega; \Gamma_0, G_0, g_0, J_0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

を定義し、規格化条件を、

$$d_0(1, J_0) = \gamma_0(1, J_0) = 1 \quad (15)$$

とすると、(4) と (14) から、

$$\left. \begin{aligned} d_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) &= d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) z_2 \\ \gamma_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) &= \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) z_3^{-1} \\ J_0 &= z_3 z_2^{-1} J_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

これから次式が得られる。

$$d_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) \gamma_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) J_0 = d\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) \gamma\left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda\right) J_\lambda = J_{\text{inv.}} \quad (17)$$

杉山忠雄・山本 隆・斎藤輝夫・大島 洋

今, z_2, z_3 は λ, D, J_λ の関数であるから, $x = \ell_n \frac{\omega}{D}$ として, (16) の両辺を x で微分する。

$$d'_0 \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right) = z_2 d' \left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda \right)$$

これから次式が得られる。

$$\frac{d'_0 \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right)}{d_0 \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right)} = \frac{d' \left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda \right)}{d \left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda \right)} = F \quad (18)$$

同様のことを行えば,

$$\frac{\gamma'_0 \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right)}{\gamma_0 \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right)} = \frac{\gamma' \left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda \right)}{\gamma \left(\frac{\omega}{\lambda}, J_\lambda \right)} = F_2 \quad (19)$$

最後に (17) から,

$$\frac{J'_{\text{inv.}}}{J_{\text{inv.}}} = \frac{d'_0}{d_0} + \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} = F + F_2 \quad (20)$$

となる。

〔Ⅲ〕 摂 動 計 算

まず, 摂動計算を用いるのに便利なように (20) を書きかえよう。pseudo-fermion の Green 関数に対する Dyson の方程式

$$g = g_0 + g_0 \Sigma g$$

から,

$$d_0 = \frac{g}{g_0} = \frac{1}{1 - g_0 \Sigma} \equiv \frac{1}{\Pi} \quad (21)$$

で $\Pi \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right)$ を定義すると, 不変結合定数は,

$$J_{\text{inv.}} = \frac{\gamma_0}{\Pi} J_0$$

となるから,

$$\frac{J'_{\text{inv.}}}{J_{\text{inv.}}} = \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} - \frac{H'}{H} = F_2 - F_1 \quad (22)$$

まず, pseudo-fermion の自己エネルギー Σ を計算する。最低次の自己エネルギーの diagram は図 1 となり, これは結合定数 J_0 に関して 2 次である。この diagram に対する表式は,

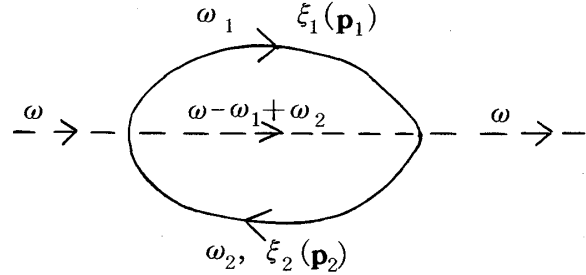


図 1

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)} = & \frac{J_0^2}{V^2} \delta_{\beta\beta''} (\sigma_{\alpha\alpha'} \cdot \mathbf{S}_{\beta\beta'}) \cdot (\sigma_{\alpha'\alpha} \cdot \mathbf{S}_{\beta'\beta''}) \\ & \times \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} G_0(\omega_1, \xi_1) G_0(\omega_2, \xi_2) g_0(\omega - \omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, スピン添字は, 2 度くりかえしたものは和をとるものとする。又, Green 関数の和と積分を実行するに際し,

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \int \frac{\rho m}{2\pi^2} d\xi = \rho \int d\xi$$

とし, バンド内の状態密度 ρ は簡単のために 1 とおく。こうして,

$$\begin{aligned} \Sigma \iint \dots = & \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\xi_1 \int d\xi_2 \frac{1}{\omega_1 - \xi_1 + i\delta} \\ & \times \frac{1}{\omega_2 - \xi_2 - i\delta} \times \frac{1}{\omega - \omega_1 + \omega_2 + i\delta} \end{aligned}$$

この時, $\delta \rightarrow +0$ であり, $i\delta$ の前の符号は, 伝導電子のスピン α が $\uparrow$ と $\downarrow$ の時, 同じ寄与をすることを考慮して上のように一定に定めた。又, ξ_1 は, $0 \sim D$, ξ_2 は, $-D \sim 0$ の範囲で積分し, 対数発散の出る部分のみを残すと, $\omega \ln \frac{D}{\omega}$ となる。これを (23) へ使い, (21) へ代入すると, 結局

$$\Pi = 1 - 2S(S+1)J_0^2 \ell_n \frac{D}{\omega} \quad (24)$$

が得られる。

次に頂点部 Γ について計算する。
まず, Heisenberg 表示での 2 体の
Green 関数の定義

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ = (-i)^2 \langle 0 | T[\Psi(x_1) \Psi^\dagger(x_2) \mathbf{a}(x_3) \mathbf{a}^\dagger(x_4)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

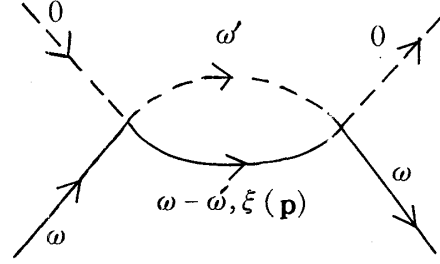


図 2

から相互作用表示に移る際, 2 次の項を取り出し, 頂点部 $\Gamma^{(2)}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} (25) \text{ の 2 次の項} &= -G_0(x_1 - x) G_0(x' - x_2) g_0(x_3 - x) g_0(x' - x_4) \\ &\times J_0 \Gamma^{(2)}(x - x') \end{aligned} \quad (26)$$

この時, $\Gamma^{(2)}(x - x')$ は,

$$\Gamma^{(2)}(x - x') = (-i)^2 J_0 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})^2 G_0(x - x') g_0(x - x') \quad (27)$$

(27) を (26) へ代入し, 全体を Fourier 変換し, 入射及び散乱後の pseudo-fermion のエネルギーを 0 とおくと, 図 2 に対応した次式が得られる。

$$\Gamma^{(2)}(\omega, \omega) = (-i)^2 J_0 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})^2 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \int \frac{d\omega'}{2\pi} G_0(\omega - \omega', \xi(\mathbf{q})) g_0(\omega') \quad (28)$$

ここで, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})^2 = S(S+1) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})$ として, pseudo-fermion の自己エネルギーの時と同様にして積分を実行し, 対数発散が出るのはスピン・フリップがある場合であることを考慮して, 結局, 発散項は次のようになる。

$$\Gamma^{(2)}(\omega, \omega) \sim 2 J_0 i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}) \ell_n \frac{D}{\omega} \quad (29)$$

続いて第 2 発散項を求めるために, 図 3 からの寄与を考える。ここで 3 次の図形で第 2 発散項を与えるのは図 3 のみである。上と同様にして,

$$\Gamma^{(3)}(\omega, \omega) = (-i)^3 J_0^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})^3 \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \\ \times G_0(\omega_1, \xi_1(\mathbf{p}_1)) G_0(\omega_2, \xi_2(\mathbf{p}_2)) g_0(\omega_2 - \omega_1) g_0(\omega_2 - \omega_1) \quad (30)$$

ここで, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S})^3$ から, 図3になるように
スピン添字をつけて計算すると, 因子,
 $S(S+1)-1$ が出る。こうして対数発散の
部分のみを取り出せば,

$$\Gamma^{(3)}(\omega, \omega) \sim 2 J_0^2 i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}) \\ \times \{S(S+1)-1\} \ell_n \frac{D}{\omega} \quad (31)$$

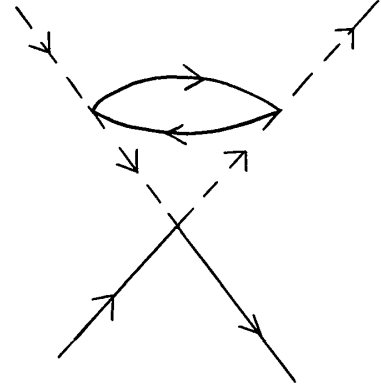


図 3

が得られる。

(29) と (31) を γ_0 の定義 (14) へ代入すると,

$$\gamma_0\left(\frac{\omega}{D}, J_0\right) = 1 - 2 J_0 \ell_n \frac{D}{\omega} - 2 \{S(S+1)-1\} J_0^2 \ell_n \frac{D}{\omega} \quad (32)$$

最後に, (24) と (32) から $\omega \rightarrow D$ の極限で,

$$\left. \begin{aligned} F_1(z) &= 2S(S+1)z^2 \\ F_2(z) &= 2z + 2\{S(S+1)-1\}z^2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。ここで, $\omega \rightarrow D$ で $J_{\text{inv.}} \rightarrow J_0$ とし, $J_{\text{inv.}} = z$ とおいた。

すべての最強発散項の和による不変結合定数を求めるには, (33) で z の1次まで近似として, $F_2(z)$ の第1項のみを (22) に用いて, $x \rightarrow 0$ で $\dot{z} \rightarrow J_0$ という境界条件のもとに解けばよい。結果は,

$$z = \frac{J_0}{1 - 2J_0 x} \quad \therefore J_{\text{inv.}} = \frac{J_0}{1 + 2J_0 \ell_n \frac{D}{\omega}} \quad (34)$$

これを (17) へ代入し, 今の近似では $d_0 = 1$ であることを用いると,

$$\Gamma = \frac{-i \sigma \cdot S}{1 + 2 J_0 \ell_n \frac{D}{\omega}} \quad (35)$$

これは, Abrikosov⁵⁾ の結果と一致している。

〔Ⅳ〕 物理量の評価

最初, Abrikosov⁵⁾ は近藤温度を (35) の発散点として定義したが, ここでは, もう少し一般的に定義しなおすことにする。

まず, ω が D の近傍の時, (22) の右辺は, $z = J_{\text{inv.}}$ のみの関数となるから, 次のように書き直すことができる。

$$\frac{d(\ell_n z)}{dx} = f(z) \quad (36)$$

これは, Lie の微分方程式と呼ばれているものと同等な方程式であり, 以下, くりこみ群の方程式と云うことにする。

(36) を積分して,

$$x = \int \frac{d(\ell_n z)}{f(z)} \equiv q(z) \quad (37)$$

で $q(z)$ を定義し, 境界条件, $x \rightarrow 0$ の時 $z \rightarrow J_0$ で任意定数 $q(J_0)$ を決定すれば,

$$x = q(z) - q(J_0) \quad (38)$$

である。これから, $q(z) = 0$ となるような ω の値として近藤温度 T_k を定義すると,

$$T_k \equiv D \exp [-q(z)] \quad (39)$$

となる。このような定義は, 最強発散項のみを集めた場合の定義を含んでおり, 一般的には, $|z| \sim 1$ となるようなエネルギーとして近藤温度を定義することに対応するものである。

さて, くりこみ群の方程式 (36) から

$$\frac{\omega}{z} \frac{dz}{d\omega} = f(z) \quad (40)$$

となり、 $\omega \rightarrow 0$ で $\frac{dz}{d\omega}$ が有限であると仮定すると、 $f(z) \rightarrow 0$ である。この時の z の値を z_0 とし、 z_0 を固定点と呼ぶ。固定点の近傍でくりこみ群の方程式は、

$$\frac{1}{z_0} \frac{dz}{d\omega} = f'(z_0)(z - z_0) \quad (41)$$

となり、前述と同様の境界条件で積分して、

$$z = z_0 + (J_0 - z_0) \left(\frac{\omega}{D} \right)^{z_0 f'(z_0)} \quad (42)$$

となるが、 z が T/T_k の関数であることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} z &= z_0 + a \left(\frac{T}{T_k} \right)^{z_0 f'(z_0)} \\ a &= (J_0 - z_0) \left(\frac{T_k}{D} \right)^{z_0 f'(z_0)} > 0 \end{aligned} \quad (43)$$

である。境界条件、 $\omega \rightarrow 0$ で $z \rightarrow z_0$ に適合させるためには、 $z_0 < 0$ として、

$$f'(z_0) < 0 \quad (44)$$

でなければならないことが分る。ただし、ここでは、 $J_0 > z_0$ 、 $z > z_0$ とした。又、 $z_0 > 0$ の時、(44) の符号は逆転する。

このような考察からは、固定点 z_0 がどのような値になるかという、これ以上の情報は得られない。

次に、帯磁率を考えるために、局在モーメントの縮みの大きさを計算しよう。磁気モーメント M は、 S_z の期待値だから、Bohr 磁子 μ と g -因子を用いて

$$\begin{aligned} M &= g\mu \langle S_z \rangle \\ &= g\mu \sum_{m=-S}^S \langle 0 | \mathbf{a}_m(t+\tau) S_z \mathbf{a}_m^\dagger(t) | 0 \rangle \\ &= -g\mu \sum_m m \int \frac{d\omega}{2\pi i} g_{mm}(\omega) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、 $\tau \rightarrow +0$ とする。

(45) を相互作用のない 0 次の近似で積分すれば、

$$M_0 = g \mu S \quad (46)$$

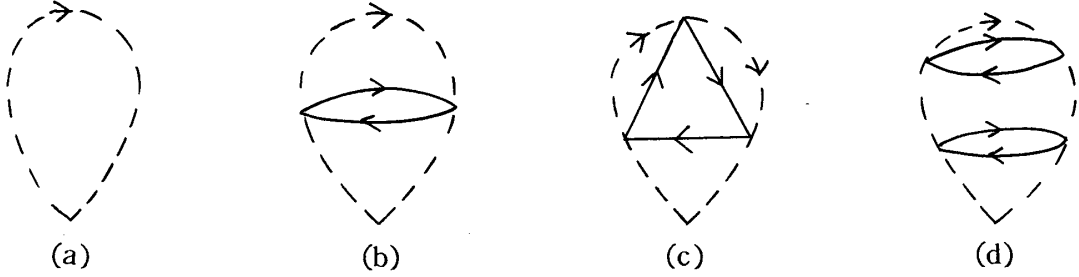


図 4

(45) の各次数での近似は、図 4 のようになり、(46) は (a) の場合である。今、(45) を pseudo-fermion の Green 関数と頂点部とに分離して考えれば、

$$M = g \mu S \frac{\gamma_S}{\Pi} \quad (47)$$

となるから、

$$\frac{\gamma'_S}{\gamma_S} = F_3(z) \quad (48)$$

として、くりこみ群の方程式は、

$$\frac{d}{dx} (\ell_n M) = F_3(z) - F_1(z) \quad (49)$$

となる。

γ_S に対する最低次の項は、図 4 の (b) から出るので、

$$\gamma_S \left(\frac{\omega}{D}, J_0 \right) = 1 - 2 J_0^2 \{ S(S+1) - 1 \} \ell_n \frac{D}{\omega} + 0(J_0^4) \quad (50)$$

であり、これから $F_3(z)$ を求めると、

$$F_3(z) = 2 \{ S(S+1) - 1 \} z^2 + 0(z^4) \quad (51)$$

である。ここで、 $0(z^4)$ としたのは、図 4 の (c) のような奇数次の diagram からの寄

与が 0 であることを考慮したためである。

(49) に (33) と (51) を用い、又、 z の値として (34) を使って、 $x \rightarrow 0$ で $M \rightarrow g \mu S$ という境界条件のもとに積分すればよい。

$$\frac{d(\ell_n M)}{dx} = -2z^2, \quad z = \frac{J_0}{1-2J_0 x}$$

より、

$$\begin{aligned} M &= g \mu S \exp \left[J_0 - \frac{J_0}{1-2J_0 x} \right] \\ &\simeq g \mu S \left[1 + \frac{2J_0^2 x}{1-2J_0 x} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

となる。最後は展開の第 1 項までとった。(52) は最強発散項を摂動計算により求めた Yoshida and Okiji⁽⁶⁾ の結果と一致している。ただし、磁場は局在スピンにのみ影響を与え、伝導電子は感じないものとした。

〔V〕異方性がある場合

異方性がある時は、最初のハミルトニアン (1) に戻って考えなければならないが、エネルギー及び運動量に関する部分は、異方性があってもなくても同じである。従って、スピンと結合定数の部分のみを考えればよい。

まず、最強発散項の近似をとる。この時は 1 軸性交換相互作用を考えれば十分であるから、 $J_+ = J_- = J_\perp$ とする。

ここで、スピン演算子に関する性質

$$\left. \begin{aligned} S_+ S_- &= \frac{1}{2} + S_z, & S_- S_+ &= \frac{1}{2} - S_z \\ S_- S_z &= -S_z S_- = \frac{1}{2} S_-, & S_+ S_z &= -S_z S_+ = -\frac{1}{2} S_+ \\ S_z S_z &= \frac{1}{4} \\ \text{ただし, } |S| &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

を用い、この場合、考慮すべき唯一つの diagram，図2で、対数発散が出るのは、スピン・フリップが存在する場合であることを思い浮かべると、

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{J_{\perp}}{2} [\sigma^- S_+ + \sigma^+ S_-] + J_z \sigma^z S_z \right\}^2 \\ & \sim -\{J_{\perp} J_z [\sigma^- S_+ + \sigma^+ S_-] + 2 J_{\perp}^2 \sigma^z S_z\} \end{aligned} \quad (54)$$

となる。これを、元のハミルトニアンに対応する各項と比較して、対数発散の部分をつけ加えると、 r_0 に対し、結局、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r_{0\perp} &= 1 + 2 J_z \ell_n \frac{\omega}{D} \\ r_{0z} &= 1 + \frac{2 J_{\perp}^2}{J_z} \ell_n \frac{\omega}{D} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

これをくりこみ群の方程式へ代入すると、

$$\frac{1}{J_{\text{inv.}}^{\perp}} \frac{d J_{\text{inv.}}^{\perp}}{dx} = 2 J_{\text{inv.}}^z, \quad \frac{1}{J_{\text{inv.}}^z} \frac{d J_{\text{inv.}}^z}{dx} = \frac{2 J_{\text{inv.}}^{\perp 2}}{J_{\text{inv.}}^z} \quad (56)$$

となり、これらを積分して、

$$J_{\text{inv.}}^{\perp 2} - J_{\text{inv.}}^{z2} = \text{const.} \quad (57)$$

が得られる。これは scaling 則を用いた Andersonの結果¹⁾と一致している。

次に、第2発散項について考える。この時は、完全に異方性があるハミルトニアン(1)を用いなければならない。

上と同様に、スピンと結合定数の部分のみを考え、diagram，図3にスピン添字をつけて慎重に計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{J_+}{2} \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^- S_{+\beta' \beta_2} + \frac{J_-}{2} \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^+ S_{-\beta' \beta_2} + J_z \sigma_{\alpha_1 \alpha_2}^z S_{z \beta' \beta_2} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{J_+}{2} \sigma_{\alpha' \alpha}^- S_{+\beta_2 \beta_1} + \frac{J_-}{2} \sigma_{\alpha' \alpha}^+ S_{-\beta_2 \beta_1} + J_z \sigma_{\alpha' \alpha}^z S_{z \beta_2 \beta_1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{J_+}{2} \sigma_{\alpha_2 \alpha_1}^- S_{+\beta_1 \beta} + \frac{J_-}{2} \sigma_{\alpha_2 \alpha_1}^+ S_{-\beta_1 \beta} + J_z \sigma_{\alpha_2 \alpha_1}^z S_{z\beta_1 \beta} \right\} \\
& = \frac{J_+}{2} \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M(M+1) - J_+ J_- \right\} 2 \sigma_{\alpha' \alpha}^- S_{+\beta' \beta} \\
& \quad + \frac{J_-}{2} \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M(M-1) - J_+ J_- \right\} 2 \sigma_{\alpha' \alpha}^+ S_{-\beta' \beta} \\
& \quad + J_z \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M^2 - J_+ J_- \right\} 2 \sigma_{\alpha' \alpha}^z S_{z\beta' \beta}
\end{aligned}$$

これを，元の式

$$\frac{J_+}{2} \sigma_{\alpha' \alpha}^- S_{+\beta' \beta} + \frac{J_-}{2} \sigma_{\alpha' \alpha}^+ S_{-\beta' \beta} + J_z \sigma_{\alpha' \alpha}^z S_{z\beta' \beta}$$

と比較して，対数発散の部分をつけ加え，(55)と一緒にして， γ_0 に対し次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_{0+} &= 1 + 2 J_z \ell_n \frac{\omega}{D} + 2 \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M(M+1) - J_+ J_- \right\} \ell_n \frac{\omega}{D} \\
\gamma_{0-} &= 1 + 2 J_z \ell_n \frac{\omega}{D} + 2 \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M(M-1) - J_+ J_- \right\} \ell_n \frac{\omega}{D} \\
\gamma_{0z} &= 1 + \frac{2 J_+ J_-}{J_z} \ell_n \frac{\omega}{D} + 2 \left\{ J_+ J_- S(S+1) - (J_+ J_- - J_z^2) M^2 - J_+ J_- \right\} \ell_n \frac{\omega}{D}
\end{aligned} \right\} \quad (58)$$

ここで， M は相互作用する前の局在スピンの z 成分の大きさを表わす。又，同様にして， Π についても計算すれば，

$$\Pi = 1 + 2 \left[J_+ J_- - \{ S(S+1) - M^2 \} + J_z^2 M^2 \right] \ell_n \frac{\omega}{D} \quad (59)$$

となり，今， $J_{\text{inv.}}^+ = u$ ， $J_{\text{inv.}}^- = v$ ， $J_{\text{inv.}}^z = w$ とおいて，くりこみ群の方程式は

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= 2w - 2M(uv - w^2) - 2uv \\
\frac{1}{u} \frac{dv}{dx} &= 2w + 2M(uv - w^2) - 2uv \\
\frac{1}{w} \frac{dw}{dx} &= \frac{2uv}{w} - 2uv
\end{aligned} \right\} \quad (60)$$

この時、 $T=0$ での固定点の大きさをみるために、(60)の右辺を0とおくと

$$uv \sim 1, \quad w \sim 1 \quad (61)$$

となり、異方性がない場合($z \sim 1$)と同様な結果になる。もちろん、これは固定点が実際に $-\infty$ になるという結果⁴⁾とは一致しないものである。

〔VI〕 結 論

すでにいろいろな所で言い古されてきたことであるが、以上述べてきたことからわかるように、Gell-Mann-Low タイプのくりこみ群の使用は、摂動計算の便法であり、それ以上のものではない。

s-d 系においては、第2発散項まで求めるのが限度であり、それ以上は、労ばかり多く、あまり益がないように思われる。又、はじめにも述べたように、すべての発散項を考慮した固定点の値がどのくらいになるかということは、この方法では決められず、そのため、第2発散項までで、この値が1の近傍として物理量を求めると、実験に合わない結果になってしまう。

くりこみ群の方法は、Appendixで示すように、くりこみ可能なハミルトニアンに対しては、いつでも使えるが、くりこみ群の方程式は、本文中で示したように、常に、 ω がDの近傍でしか解が得られないことは重要である。そのため、 $\omega \rightarrow 0$ での評価をするには、かなり無理がある。

このような、決定的な限界をもつ方法ではあるが、最もオーソドックスにくりこみ群を適用した方法としての意義は、十分認められると思うし、又、今後、s-d系による近藤効果の問題を更に考えていく上で、多くの示唆を含むように思われる。このような理由から、筆者らは、Abrikosov and Migdalの方法を中心にして、方法論的立場から、なるべく詳細にまとめてみた次第である。

尚、筆者らの未熟のため、この小論中に、多くの間違いや独断が含まれているかもしれないが、この点を含め、全体にわたり、諸先生及び諸兄の方々の忌憚のない批判や忠告がいただければ幸いです。

〔 謝 辞 〕

このような研究に対し、あらゆる便宜を与えて下さり、終始励まして下さった堀素夫

助教授に対し、深く感謝いたします。又、筆者らの1人(S)は、この課題に関する討論に参加して下さった堀研究室のすべての方々、とりわけ、有益な批判や忠告をして下さった石田義明氏に深く感謝します。

更に、この小論をまとめるに際し、芳田奎先生の著者⁷⁾、高橋康先生の著書⁸⁾及びその他の書物⁹⁾から多くのことを教えられたことを付記し、感謝の意を表します。

[Appendix] くりこみ可能性

ここでは、s-d系にくりこみ群の方法が使えるための基礎づけとして、(1)のハミルトニアンにくりこみ可能性について議論しておくことにする。

今、 n 個の頂点をもつ Feynman 図形を考える。伝導電子を実線、pseudo-fermion を点線とすると、各 vertex からは、2本の実線と2本の点線が出ているから、 E_φ を実線の外線の数、 E_a を点線の外線の数とすると、実線と点線の内線の数 I_φ , I_a は

$$I_\varphi = \frac{2n - E_\varphi}{2}, \quad I_a = \frac{2n - E_a}{2} \quad (\text{A.1})$$

となる。

p_0 を伝導電子のエネルギー、 ξ を伝導電子の運動エネルギー、 k_0 を pseudo-fermion のエネルギーとすると、S 行列中の積分変数は、 $dp_{01} \cdots dp_{0I_\varphi} d\xi_1 \cdots d\xi_{I_\varphi} dk_{01} \cdots dk_{0I_a}$ であり、運動量保存則に関する δ 関数は、各 vertex で、エネルギーの保存則のみ成り立つから、 n 個である。そのうち1つは、S 行列全体のエネルギー保存を示しているから、結局、残る独立変数の個数は

$$2I_\varphi + I_a - n + 1 \quad (\text{A.2})$$

となる。被積分関数中で発散に寄与するのは、 G, g について $1/p_0 - \xi$, $1/k_0$ の形であるから、S 行列は、

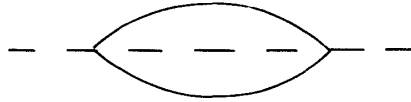
$$2I_\varphi + I_a - n + 1 - (I_\varphi + I_a) \geq 0$$

だと発散する。これに (A.1) を使って書き直すと、

$$E_\varphi \leq 2 \quad (\text{A.3})$$

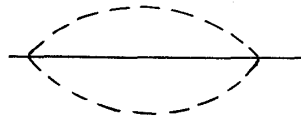
となる。これから，発散図形は，

$$(イ) \quad E_\varphi = 0$$



(a)

$$(ロ) \quad E_\varphi = 2$$



(b)



(c)

となるが，(a) は pseudo-fermion の Green 関数 g の中へくりこまれ，(b) は伝導電子の Green 関数へのくりこみであり，この場合，無視できる。(c) は vertex Γ へのくりこみとなる。従って，primitive divergence のみを考えると，有限個の発散しか出ず，くりこみ可能である。ただし，ここでは，通常の紫外発散は，バンド幅 D で cut されるが，同じ所から， $\omega \rightarrow 0$ で対数発散が出ることを考慮して，紫外発散に対するくりこみ可能性と同様の議論を行った。

以上のことから，(1) のハミルトニアンはくりこみ可能であり，有限個のくりこみ定数の中に，すべての発散がくりこめ，くりこみ群の方法が使えることが示された。

参 考 文 献

- 1) P. W. Anderson ; J. Phys. C 3, 2436 (1970)
- 2) M. Fowler and A. Zawadowski ; Solid State Commun. 9, 471 (1971)
- 3) A. A. Abrikosov and A. A. Midal ; J. Low Temp. Phys. 3, 519 (1970)
- 4) K. G. Wilson ; Rev. Mod. Phys. 47, 773 (1975)
- 5) A. A. Abrikosov ; Physics 2, 5 (1965)

- 6) K. Yoshida and A. Okiji ; Prog. Theor. Phys. **34**, 505 (1965)
- 7) 芳田 奎著 ; 物性物理学シリーズ 2, 3 磁性 I, II (朝倉書店, 1972)
芳田 奎編 ; 固体物理 — その発展と現代の焦点 — (岩波書店, 1976)
- 8) 高橋 康著 ; 物性研究者のための場の量子論 I, II (培風館 1974, 1976)
- 9) N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov ; Introduction to the Theory of Quantized Fields
(Interscience, New York, 1959), Chapter VIII