

Simplicial Semigroup Ring の Buchsbaum 性と その Defining Ideal について

鴨井 祐二

東海大・理

1 Introduction

H を $\mathbf{N}^r$ ($r > 0$) の affine semigroup とし、 $h_1, \dots, h_{r+n} \in H$ を H の生成元とし次を満たすとする.

(H-1) $h_1, \dots, h_r$ は、 $\mathbf{Q}$ -linearly independent

(H-2) $\exists d > 0$ such that $dH \subset \sum_{i=1}^r \mathbf{N}h_i$

このとき、 H を simplicial semigroup とする.

ここで、field k 上の多項式環の間の写像を与える.

$$\begin{aligned} \varphi : S = k[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_n] &\longrightarrow k[t_1, \dots, t_r] \\ X_i &\longmapsto t^{h_i} \quad (1 \leq i \leq r) \\ Y_j &\longmapsto t^{h_{r+j}} \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

(ここで、 $h = (a_1, \dots, a_r) \in H$ について $t^h := t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ で monomial を表わす.)

このとき、 $\text{Im}(\varphi)$ を $k[H]$ で表わし (k 上 H の) semigroup ring とする. 又、 $\ker(\varphi)$ を I_H で表わし semigroup ring $k[H]$ の defining ideal とする. ここで、 $r = \dim k[H]$ かつ $n = \text{ht } I_H$ となっている.

便宜的に、 $x_i := t^{h_i}$ ($1 \leq i \leq r$), $y_j := t^{h_{r+j}}$ ($1 \leq j \leq n$) とし、 $k[H]$ の graded maximal ideal を $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, y_n)$ とおく.

本稿では、 $k[H]$ の Buchsbaum 性を I_H の Gröbner basis の言葉で述べ、さらに $n = 2$ の場合について $k[H]$ が Buchsbaum となるときの I_H の minimal basis をきめる.

2 準備

Definition 1. $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^m$ について、

- 1) $\alpha_{(i)} = \alpha$ の i 番目の成分
- 2) $\alpha \leq \beta \iff \alpha_{(i)} \leq \beta_{(i)} \text{ for } 1 \leq i \leq n$
- 3) $\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ and } \alpha \neq \beta$

とし、 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ は普通の意味に用いる。

S の monomial を $X^\alpha Y^\beta = X_1^{\alpha_{(1)}} \dots X_r^{\alpha_{(r)}} Y_1^{\beta_{(1)}} \dots Y_n^{\beta_{(n)}}$ for $\alpha \in \mathbb{N}^r, \beta \in \mathbb{N}^n$ で表わし、 S の monomial の全体を M_H で表わすことにする。

Definition 2. S の monomial ordering を以下の様に定める。

$$X^\alpha Y^\beta <_S X^\gamma Y^\delta \iff \begin{aligned} &wd(X^\alpha Y^\beta) < wd(X^\gamma Y^\delta) \\ &wd(X^\alpha Y^\beta) = wd(X^\gamma Y^\delta) \text{ and } X^\alpha Y^\beta > X^\gamma Y^\delta \text{ w.r.t. lexicographic} \end{aligned}$$

ここで、 $wd(X^\alpha Y^\beta) = \text{total degree of } \varphi(X^\alpha Y^\beta)$.

このとき、 $0 \neq f \in S$ について $<_S$ に関する最大の項を f の initial term と呼び $in(f)$ で表わすことにする。又、 S の subset F について、 F の initial term を

$$in(F) = \{in(f) \mid 0 \neq f \in F\}$$

とする。

Definition 3. S の ideal I と I の finite subset F について、

$$(in(I)) = (in(F))$$

を満たすとき F を I の Gröbner basis という。特にこのとき F は I を生成する。

次に幾つか記号を定める。

Notation 4.

- 1) $k[H]$ の subset J について

$$M(J) = \{X^\alpha Y^\beta \in M_H \mid \varphi(X^\alpha Y^\beta) \in J\}$$

とおく。特に、 $J = \{t^u\}$ のとき $M_u := M(J)$ と書くことにする。

- 2) $X^\alpha Y^\beta \in M_u$ ($u \in H$) について

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) = \{X^\gamma Y^\delta \in M_u \mid X^\alpha Y^\beta >_S X^\gamma Y^\delta\}$$

とおく。

Remark 5. 定義より次が成り立つ.

1) $X^\alpha Y^\beta, X^\gamma Y^\delta \in M_H$ について、

$$X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H \iff X^\alpha Y^\beta \in \Sigma(X^\gamma Y^\delta) \text{ or } X^\gamma Y^\delta \in \Sigma(X^\alpha Y^\beta)$$

2) $X^\alpha Y^\beta \in M_H$ について、

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) \neq \phi \iff X^\alpha Y^\beta \in (in(I_H))$$

3) $X^\alpha Y^\beta$ が $\Sigma(X^\gamma Y^\delta)$ の minimal element ならば $\Sigma(X^\alpha Y^\beta) = \phi$.

4) $(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta)$ in $\mathbf{N}^{r+n}$ について、

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) \neq \phi \implies \Sigma(X^\gamma Y^\delta) \neq \phi$$

5) $X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H, J \subset k[H]$ について、

$$X^\alpha Y^\beta \in M(J) \iff X^\gamma Y^\delta \in M(J)$$

6) $1 \leq i \leq r$ について、

$$X^\alpha Y^\beta \in M((x_i)) \iff \exists X^\alpha Y^\beta - X_i X^\gamma Y^\delta \in I_H$$

7) $1 \leq i \leq r$ について、

$$Y^\beta \in M(x_i) \implies \Sigma(Y^\beta) \neq \phi$$

更に次の集合を定義する.

$$\mathcal{R} = \{X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in S \mid X^\gamma Y^\delta \in M(X^\alpha Y^\beta) \text{ and } \text{Gcd}(X^\alpha Y^\beta, X^\gamma Y^\delta) = 1\}$$

このとき、Remark 5. より $\mathcal{R} \subset I_H$ となるが更に次がわかる.

Proposition 6. $I_H = (\mathcal{R})$ かつ、 $(in(I_H)) = (in(\mathcal{R}))$.

従って、 I_H の Gröbner basis は $\mathcal{R}$ の中から選べる.

3 Buchsbaum 性について

$\mathcal{R}$ の subset $\mathcal{R}_H, \mathcal{F}_H$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_H &= \{X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in \mathcal{R} \mid \Sigma(Y^\delta) = \phi\} \\ \mathcal{F}_H &= \{f \in \mathcal{R}_H \mid in(f) = Y^\beta, \beta \in \mathbf{N}^n\} \\ \mathcal{F}' &= \{f \in \mathcal{R}_H \mid in(f) \in (in(\mathcal{F}_H))\} \end{aligned}$$

とおくとすぐに $(in(I_H)) = (in(\mathcal{R}_H))$ がわかる. このとき更につぎがわかっている.

Remark 7. 次は同値.

- 1) $k[H]$ は Cohen-Macaulay .
- 2) $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H))$.

Definition 8. $(Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r})$ が次を満たすとき condition (B) を満たすと言う.

- B-1) $1 \leq i \leq r$ について、 $\Sigma(Y^{\beta_i}) = \phi$.
- B-2) $1 \leq i \leq n$ について、 $Y^{\beta_i} \in M([(x_i) : \mathbf{m}])$.
- B-3) $1 \leq i \neq j \leq n$ について、 $Y^{\beta_i} \notin M([(x_j) : \mathbf{m}])$.
- B-4) $1 \leq i \neq j \leq r$ について、 $Gcd(Y^{\beta_i}, Y^{\beta_j}) = 1$.
- B-5) $1 \leq i < j \leq r$ について、 $\exists X_j Y^{\beta_i} - X_i Y^{\beta_j} \in I_H$.

(B) を満たす monomial の sequence の全体を Δ_H で表わし、

$$\mathcal{G}_H = \{X_j Y^{\beta_i} - X_i Y^{\beta_j} \mid (Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H, 1 \leq i < j \leq r\}$$

とおく.

このとき、 $k[H]$ の Buchsbaum 性について次の特徴付けが得られる.

Theorem 9. The following conditions are equivalent.

- 1) $k[H]$ is Buchsbaum.
- 2) We can choose a Gröbner basis of I_H from $\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H$
(or equivalently, $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$).

Theorem 9. の証明のために幾つか準備をする. 定義に従えば直ちにつきがわかる.

Lemma 10. $k[H]$ が Buchsbaum とする.

- 1) $X^\alpha Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$ and $\alpha_{(i)} = 0$ とすると、 $Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$.
- 2) $Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$ and $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ とすると、 $\exists (Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$ s.t. $\beta = \beta_i$.

Lemma 11. $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$ とする.

- 1) $X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H$ with $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ and $X^\alpha Y^\beta >_S X^\gamma Y^\delta$ について、 $\exists (Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$ s.t. $\beta = \beta_i$ for some $1 \leq i \leq r$.
- 2) $\mathcal{R}_H = \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}_H$.

更に、後藤 [2] による $k[H]$ の Buchsbaum 性の特徴付けを挙げておく.

Theorem. (Goto) 次は同値.

- 1) $k[H]$ is Buchsbaum.
- 2) $k[H]$ is quasi-Buchsbaum. (or equivalently, $x_1^2, \dots, x_r^2$ are weak sequence (w.r.t. $\mathfrak{m}$)).

Lemma 12. $t^v, t^{u_1}, \dots, t^{u_p} \in k[H]$ について

$$[(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v] = \sum_{i=1}^p [(t^{u_i}) : t^v]$$

Proof. $[(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v] \supset \sum_{i=1}^p [(t^{u_i}) : t^v]$ は明らかだから逆向きの包含を示す.

$\forall f \in [(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v]$ について、 $f = \sum_{i=1}^m c_i t^{w_i}$, $c_i \neq 0$ and $w_i \in H$ ($1 \leq i \leq m$) と書けば

$$t^v f = \sum_{i=1}^m c_i t^{v+w_i} \in (t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$$

である. $(t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$ は、graded ideal だから $1 \leq \forall j \leq m$ について

$$t^{v+w_j} \in (t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$$

となり、 $1 \leq \exists i \leq m$, $\exists h \in H$ があって

$$t^{v+w_j} = t^{h+u_i}$$

と書ける. (i.e. $t^{v+w_j} \in (t^{u_i})$)

だから、 $t^{w_j} \in [(t^{u_i}) : t^v]$ となり

$$f \in \sum_{i=1}^p [(t^{u_i}) : t^v]$$

が示せた. □

Proof of Theorem 9. $1) \implies 2)$ $f = X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in \mathcal{R}_H$ について、 $\text{in}(f) \notin (\text{in}(\mathcal{F}_H))$ とする. このとき、 $>_S$ の定義よりある $1 \leq i < j \leq r$ があって

$$f = X_j X^{\alpha'} Y^\beta - X_i X^{\gamma'} Y^\delta$$

と書ける. このとき、Remark 5, 5) より $X^{\alpha'} Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$. 更に $\text{Gcd}(X^\alpha, X^\gamma) = 1$ だから、Lemma 10, 1) より

$$Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$$

となり 仮定より $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ だから Lemma 10, 2) より

$$\exists(Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H \text{ s.t. } \beta = \beta_i$$

となる. 従って

$$\exists X_j Y^\beta - X_i Y^{\beta_j} \in \mathcal{G}_H \text{ and } in(f) = X^\alpha Y^\beta \in (in(\mathcal{G}_H))$$

となり

$$(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$$

が示せた.

2) $\implies$ 1) Lemma 11, 2) と 後藤の定理より

$$\mathcal{R}_H = \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}_H \implies x_1^2, \dots, x_r^2 \text{ are weak-sequence (w.r.t. } \mathbf{m}).$$

が言えれば良いが Lemma 12 より $1 \leq i < j \leq r$ について

$$[(x_i^2) : x_j^2] = [(x_i^2) : \mathbf{m}]$$

を確かめれば良い. そこで $[(x_i^2) : x_j^2] \neq [(x_i^2) : \mathbf{m}]$ として矛盾を導く.

$X^\alpha Y^\beta$ を $M([(x_i^2) : x_j^2] \setminus [(x_i^2) : \mathbf{m}])$ の最小元とする. 仮定より、 $\alpha_{(i)} \leq 1$ で $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ である. このとき Remark 5, 6) より、

$$\exists X_j^2 X^\alpha Y^\beta - X_i^2 X^\gamma Y^\delta \in I_H$$

もし、 $\Sigma(X^\gamma Y^\delta) \neq \phi$ ならば $X^\gamma Y^\delta$ を $\Sigma(X^\gamma Y^\delta)$ の最小元で置き換えることにより

$$\Sigma(X^\gamma Y^\delta) = \phi$$

としてよい. 今、 $X^\alpha Y^\beta \notin M((x_i^2))$ だから $\gamma_{(j)} \leq 1$ である.

ここで、 $Gcd(X_j^2 X^\alpha Y^\beta, X_i^2 X^\gamma Y^\delta) = X^\mu Y^\nu$ とし

$$X_j^2 X^\alpha Y^\beta = X^\mu Y^\nu X^{\mu_1} Y^{\nu_1} \text{ and } X_i^2 X^\gamma Y^\delta = X^\mu Y^\nu X^{\mu_2} Y^{\nu_2}$$

とおく. このとき、 $g := X^{\mu_1} Y^{\nu_1} - X^{\mu_2} Y^{\nu_2} \in \mathcal{R}_H \setminus \mathcal{F}_H$ だから $g \in \mathcal{G}_H$ となる. 一方で $\mu_{1(j)} > 0$ and $\mu_{2(i)} > 0$ だから

$$X^{\mu_1} = X_j \text{ and } \alpha_{(i)} = 1$$

となる. 従って

$$X^\alpha Y^\beta \in M(x_i[(x_i) : \mathbf{m}]) \subset M([(x_i^2) : \mathbf{m}])$$

となり矛盾. □

Corollary 13. $k[H]$ が Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring のとき

$$\dim(k[H]) \leq \text{ht}_S(I_H) \quad (\text{i.e. } r \leq n)$$

Proof. $k[H]$ は non Cohen-Macaulay だから Remark 7. より

$$\mathcal{G}_H \neq \phi$$

従って、 $\exists(Y^{\beta_1}, \dots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$. ここで

$$n_i = \#\{k \in \{1, \dots, r\} \mid \beta_{i(k)} > 0\}$$

とすれば、Definition 8. の条件 B-2) より $\beta_i \neq 0$ だから $n_i > 0$. 従って、

$$r \leq \sum_{i=1}^r n_i$$

と成る. 一方で (B-4) $\text{Gcd}(Y^{\beta_k}, Y^{\beta_l}) = 1, (k \neq l)$ であったから

$$\sum_{i=1}^r n_i \leq n$$

よって

$$r \leq n$$

□

4 codimension 2 の Case について

ここでは、 $n = 2$ の Case について $k[H]$ が Buchsbaum となる I_H の minimal basis をきめる.

[3] により Cohen-Macaulay となるものは判っているから non Cohen-Macaulay, Buchsbaum について決めれば良い. そこで次を示す.

Theorem 14. $n = 2$ のとき次は同値.

- 1) $k[H]$ は Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring .
- 2) $\dim(k[H]) = 2$ で I_H は次の minimal basis を持つ.

$$Y_1^{b+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}-1} X_{i_2}^{a_{i_2}+1} Y_2^{c-1}, Y_2^{c+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} Y_1^{b-1}, Y_1 Y_2 - X_1^{a_1} X_2^{a_2}, X_{i_1} Y_1^b - X_{i_2} Y_2^c$$

ここで、 $a_1, a_2, b, c \in \mathbf{N}_+, \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$.

このとき、 $H \cong \langle (b+c, 0), (0, b+c), (a_1c-1, a_2c+1), (a_1b+1, a_2b-1) \rangle$ as semigroup .

以下、 $(\text{ht } I_H =) n = 2$ とし、定理の証明のため幾つか準備をする．ここで $\mathcal{F}_H$ を次の subset に分割する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid \text{in}(f) = Y_1^b, b \in \mathbf{N}_+\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid \text{in}(f) = Y_2^c, c \in \mathbf{N}_+\} \\ \mathcal{F}_3 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid \text{in}(f) = Y_1^b Y_2^c, b, c \in \mathbf{N}_+\}\end{aligned}$$

このとき、 $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$ だから $\text{in}(\mathcal{F}_i)$ の minimal element が存在する．そこで、 $\text{in}(\mathcal{F}_1)$ (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$) の minimal element を $Y_1^{b_1}$ (resp. $Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3} Y_2^{c_3}$) とおく．更に、 $f \in \mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$) について、 $\text{in}(f) = Y_1^{b_1}$ (resp. $Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3} Y_2^{c_3}$) のときに f を $\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$) の minimal element と呼ぶ．

Lemma 15. $k[H]$ が Buchsbaum のとき

$$(\text{in}(\mathcal{F}_H)) = (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3} Y_2^{c_3})$$

Proof. $(\text{in}(\mathcal{F}_1), \text{in}(\mathcal{F}_2)) = (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2})$ だから、 $\text{in}(\mathcal{F}_3) \subset (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3} Y_2^{c_3})$ がいえればよい．

そこで、 $\exists f = Y_1^b Y_2^c - X^\alpha \in \mathcal{F}_3$ such that $Y_1^b Y_2^c \notin (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3} Y_2^{c_3})$ として矛盾を導く．(このとき、 $b < b_1, c < c_2$ である．)

$\mathcal{F}_3$ の minimal element を

$$f_3 = Y_1^{b_3} Y_2^{c_3} - X^{\alpha_3} \in \mathcal{F}_3$$

とする．このとき、仮定から $b_3 > b$ and $c_3 < c$ であるか $b_3 < b$ and $c_3 > c$ でなければならない．

$b_3 > b$ and $c_3 < c$ とすると

$$g := Y_1^{b_3-b} f - Y_2^{c-c_3} f_3 = X^{\alpha_3} Y_2^{c-c_3} - X^\alpha Y_1^{b_3-b} \in I_H$$

$Y_1^{b_3-b}, Y_2^{c-c_3} \notin (\text{in}(\mathcal{F}_H))$ だから Theorem 9. より

$$\text{in}(g) \in (\text{in}(\mathcal{G}_H))$$

そこで、 $\text{in}(g) = X^{\alpha_3} Y_2^{c-c_3}$ とすると $\exists X_i Y_2^d - X_j Y_1^e \in \mathcal{G}_H$ があって $X_i Y_2^d$ は、 $X^{\alpha_3} Y_2^{c-c_3}$ を割る．

ところが $Y_2^d \in M([(x_j) : y_2])$ だから $Y_2^{d+1} \in (\text{in}(\mathcal{F}_2))$. 従って、

$$Y_2^{c-c_3+1} \in (\text{in}(\mathcal{F}_2)) \text{ and } c - c_3 + 1 \geq c_2$$

しかし、 $c_3 > 0$ だから $c - c_3 + 1 \leq c < c_2$ でなければならない．よって矛盾．

$in(g) = X^\alpha Y_1^{b_3-b}$ としても同様に矛盾する.

$b_3 < b$ and $c_3 > c$ としても同じだから Lemma 15. が示せた. $\square$

$\Sigma(Y^{b_1})$ (resp. $Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3}Y_2^{c_3}$) の minimal element を $X^{\alpha_1}Y_2^{c_1}$ (resp. $X^{\alpha_2}Y_1^{b_2}, X^{\alpha_3}$) とし、

$$\begin{aligned} f_1 &= Y_1^{b_1} - X^{\alpha_1}Y_2^{c_1} \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 &= Y_2^{c_2} - X^{\alpha_2}Y_1^{b_2} \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 &= Y_1^{b_3}Y_2^{c_3} - X^{\alpha_3} \in \mathcal{F}_3 \end{aligned}$$

とおく.

Remark 16. $\Sigma(X^{\alpha_1}Y_2^{c_1}) = \phi$ (resp. $X^{\alpha_2}Y_1^{b_2}$) だから $c_1 < c_2$ (resp. $b_2 < b_1$)

Lemma 17. $k[H]$ が Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring のとき、 $\dim(k[H]) = 2$ で

$$\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\} \text{ where } \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$$

Proof. Corollary 13. より $\dim(k[H]) = 2$ は言えている. さらに、Theorem 9. より

$$\exists X_{i_1}Y_1^b - X_{i_2}Y_2^c \in \mathcal{G}_H \text{ with } b < b_1, c < c_2$$

がある. このとき、

$$Y_1^b \in M([(x_{i_2}) : \mathbf{m}]) \subset M([(x_{i_2}) : y_1])$$

であるから、Remark 5, 2) and 7) より

$$Y_1^{b+1} \in (in(\mathcal{F}_H))$$

となる. 従って、

$$b+1 \geq b_1$$

即ち、

$$b+1 = b_1$$

となる. 同様にして、 $c+1 = c_2$ も言える.

ところが Definition 8. の B-1), B-2) により

$$(Y_1^{b_1-1}, Y_2^{c_2-1}) \in \Delta_H \implies (Y_2^{b_2-1}, Y_1^{c_1-1}) \notin \Delta_H$$

だから

$$\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\} \text{ where } \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$$

となる. $\square$

Proof of Theorem 14. 1) $\implies$ 2) Lemma 17. より $\dim(k[H]) = 2$ で $\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\}$ where $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$ である. ここで、 $b = b_1 - 1$, $c = c_2 - 1$ と置けば Theorem 9, Lemma 15. より

$$\begin{aligned} f_1 &= Y_1^{b+1} - X_1^{a_{11}} X_2^{a_{12}} Y_2^{c_1} \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 &= Y_2^{c+1} - X_1^{a_{21}} X_2^{a_{22}} Y_1^{b_2} \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 &= Y_1^{b_3} Y_2^{c_3} - X_1^{a_1} X_2^{a_2} \in \mathcal{F}_3 \\ g &= X_{i_1} Y_1^b - X_{i_2} Y_2^c \in \mathcal{G}_H \end{aligned}$$

が I_H の Gröber basis である. ここで、

$$Y_1^b \in M([(x_{i_2}) : \mathfrak{m}]) \subset M([(x_{i_2}) : y_2])$$

だから $Y_1^b Y_2 \in (in(\mathcal{F}_H))$. 即ち、 $Y_1^{b_3} Y_2^{c_3}$ は $Y_1^b Y_2$ を割らなければならない. 従って、

$$c_3 = 1$$

同様にして $b_3 = 1$. 即ち、

$$f_3 = Y_1 Y_2 - X_1^{a_{i_1}} X_2^{a_{i_2}}$$

そこで次の relation を見る.

$$X_{i_1} f_1 - Y_1 g = X_{i_2} Y_1 Y_2^c - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}} Y_2^{c_1} \in I_H$$

ここで、 $c_1 < c + 1$ であったから

$$X_{i_2} Y_1 Y_2^{c-c_1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}} \in I_H$$

を得る. $a_{1i_2} = 0$ なら、(H-1),(H-2) に反する. 従って、

$$g' = Y_1 Y_2^{c-c_1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} \in I_H$$

$b > 0$ より $Y_1 \notin (in(f_1)) = (Y_1^b + 1)$ であるから

$$c - c_1 > 0$$

したがって次の relation を得る.

$$g' - Y_2^{c-c_1-1} f_3 = X_{i_1}^{a_{i_1}} X_{i_2}^{a_{i_2}} Y_2^{c-c_1-1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} \in I_H$$

ここで、 $\Sigma(Y_2^{c-c_1-1}) = \phi$ であるから再び (H-1),(H-2) より、

$$a_{i_1} = a_{1i_1} + 1, a_{i_2} = a_{1i_2} - 1, c - c_1 - 1 = 0$$

となる. 即ち、

$$f_1 = Y_1^{b+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}-1} X_{i_2}^{a_{i_2}+1} Y_2^{c-1}$$

となる．同様にして、

$$f_2 = Y_2^{c+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} Y_1^{b-1}$$

を得る．今、 f_1, f_2, f_3, g は I_H の minimal Gröbner basis であるから $\mu(I_H) \leq 4$ ．一方で $\mu(I_H) \leq 3$ なら $k[H]$ は Cohen-Macaulay になってしまう．従って、

$$\mu(I_H) = 4$$

よって、 f_1, f_2, f_3, g が求める minimal basis .

2) $\implies$ 1) $\dim(k[H]) = 2$ で I_H は次の minimal basis を持つとする．

$$\begin{aligned} f_1 &= Y_1^{b+1} - X_1^{a_1+1} X_2^{a_2-1} Y_2^{c_1} && \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 &= Y_2^{c+1} - X_1^{a_1-1} X_2^{a_2+1} Y_1^{b_2} && \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 &= Y_1 Y_2 - X_1^{a_1} X_2^{a_2} && \in \mathcal{F}_3 \\ g &= X_2 Y_2^c - X_1 Y_1^b && \in \mathcal{G}_H \end{aligned}$$

このとき、Buchberger's algorithm [1] により f_1, f_2, f_3, g は I_H の minimal Gröbner basis になる．

ここで Theorem 9. の条件 2) により $(Y_1^b, Y_2^c) \in \Delta_H$ を確かめればよい．

ところが I_H の Gröbner basis は判っているから (B-1),(B-2),(B-4),(B-5) は明か．よって、(B-3) を確かめれば良い．

$Y_1^b \in M([(x_1) : \mathbf{m}])$ とすると

$$\exists X_2 Y_1^b - X_1^{d_1} X_2^{d_2} Y_1^{e_1} Y_2^{e_2} \in I_H \text{ with } \Sigma(Y_1^{e_1} Y_2^{e_2}) = \phi, d_1 > 0$$

ところが、 $\Sigma(Y_1^b) = \phi$ だから $d_2 = 0$ となり monomial ordering の定義から

$$X_2 Y_1^b \in (in(I_H)) = (Y_1^{b+1}, Y_2^{c+1}, Y_1 Y_2, X_2 Y_2^c)$$

となり矛盾．

$Y_2^c \in M([(x_2) : \mathbf{m}])$ としても同様にして矛盾するから

$$(Y_1^b, Y_2^c) \in \Delta_H$$

以上から Theorem 17. の同値性が言えた．

つぎに H の生成元を決める． $H = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N} h_i$ について

$$h_1 = (d_1, 0), h_2 = (0, d_2), h_3 = (d_{31}, d_{32}), h_4 = (d_{41}, d_{42})$$

とおくと、relation $f_3 \in I_H$ から

$$h_3 + h_4 = a_1 h_1 + a_2 h_2$$

従って、

$$d_{4i} = a_i d_i - d_{3i} \text{ for } i = 1, 2$$

とかける．次に relation $g \in I_H$ より、

$$h_2 + ch_4 = h_1 + bh_3$$

だから、

$$\begin{aligned} bd_{31} &= cd_{41} - d_1 \\ bd_{32} &= cd_{42} + d_2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} bd_{31} &= c(a_1 d_1 - d_{31}) - d_1 \\ bd_{32} &= c(a_2 d_2 - d_{32}) + d_2 \end{aligned}$$

となり、これをまとめると

$$\begin{aligned} d_{31} &= \frac{d_1}{b+c}(a_1 c - 1) \\ d_{32} &= \frac{d_2}{b+c}(a_2 c + 1) \end{aligned}$$

を得る．更にこれを最初の relation に代入すれば

$$\begin{aligned} d_{41} &= \frac{d_1}{b+c}(a_1 b + 1) \\ d_{42} &= \frac{d_2}{b+c}(a_2 b - 1) \end{aligned}$$

となる．そこで、

$$\begin{aligned} T: \mathbf{Q}^2 &\longrightarrow \mathbf{Q}^2 && \mathbf{Q}\text{-isomorphism} \\ (p, q) &\longmapsto (b+c)(p/d_1, q/d_2) \end{aligned}$$

とすれば次の semigroup の同型が得られる．

$$H \cong T(H) = \langle (b+c, 0), (0, b+c), (a_1 c - 1, a_2 c + 1), (a_1 b + 1, a_2 b - 1) \rangle$$

□

参考文献

- [1] B.Buchberger, *Gröbner bases : An algorithmic method in polynomial ideal theory*, In "Multidimensional system theory,(N.K.Bose), 184-232, Reidel Publ. Comp., 1985.
- [2] S.Goto, *Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum ring*, Nagoya Math. J. **80** (1980), 107-116.
- [3] Y.Kamoi, *Defining ideals of Cohen-Macaulay semigroup rings*, to appear.