

指教問題について

東大 教養 内山 康一

0. compact manifold X 上で elliptic (pseudo-) differential operator $P: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ を考える。そのとき, global な量 $a\text{-index } P = \dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P$ が, local data である symbol $\sigma(P)$ を通じて定まる, $t\text{-index } P$ に等しいというのが Atiyah-Singer の定理であった。最近 L. Hörmander (と Atiyah) はこの定理の成立する operator を (classical) elliptic op. からある種の hypoelliptic operator へ拡張した。以下,

L. Hörmander "On the index of pseudodifferential operators"

の idea を紹介する。

注意 1) elliptic op. P に対し, その principal symbol $\sigma(P)$ が $K(TX)$ (TX は X の cotangent bundle で, $K(TX)$ は 'compact 台の' K 群) の元を定め, $K(TX)$ の任意の元は, ある 0 次 elliptic pseudo-diff op. で実現されることが重要であった。ここで elliptic op. とは, principal symbol が non-singular

という意味である。しかし index をもつ作用素はこれに限らぬわけで、定理の枠は拡張されることが期待されていた。 $K(TX)$ の定義からそういうことはいえる。拡張にあたって、 $K(TX)$ の元が全て elliptic op. で実現され、それについては指数定理が成立していたから、手順として、

④ 新しい作用素 P が α -index をもつ。 symbol ももつ。
 ⑤ P を ④ の枠内で変形して、 classical elliptic op. に変形する。

⑥ ⑤ の変形 (homotopy) に対し、 α -index, symbol の定める $K(TX)$ の元の不変性を示す。

は自然である。

注意 2) classical elliptic op. の場合は principal symbol のみを考えたが、後で述べるように、ここでは total symbol というべきものを考えている。そして、Hörmander の考えた class はある程度の degenerated elliptic op. を含むことができる。

話は全て C^∞ の枠である。方法は Hörmander の開発した pseudodifferential operator ([2]) によっており、 $\mathcal{A}$ (実解析) で考えるための道具、即ち基本解あるいは parametrix の構成、その他の解析はまだよく出来てない。更に $\mathcal{A}$ での話を徹底すれば、特有のものとして 'hyper-differential' op. が登場するが、 X の実解析構造と結びつきの深い作用素があるのか、まだ

わからない。これも先回りのしきたりが、超函数論的 operator theory は指数定理の相対化のとき有効と期待される。

1. まず pseudo-diff. op. を次のように定義する ([1]). E, F は X 上の complex vector bundle, $E \xrightarrow{\pi_E} X$, $F \xrightarrow{\pi_F} X$ とし, $C^\infty(X; E)$, $C^\infty(X; F)$ は C^∞ -sections をあらわす.

$L_{p, \delta}^m(X; E, F) \ni \mathcal{P}$ とは, $\mathcal{P} : C^\infty(X; E) \rightarrow C^\infty(X; F)$ が線型, 連続. 更に, diffeom $\kappa : X \supset U \rightarrow \omega \subset \mathbb{R}^n$ かつ, E, F は κ にて直積構造をもつ, 即ち, $\varphi_E : \pi_E^{-1}U \xrightarrow{\cong} \omega \times \mathbb{C}^{N_E}$, $\varphi_F : \pi_F^{-1}U \xrightarrow{\cong} \omega \times \mathbb{C}^{N_F}$ とし, このとき, 任意の $f \in C_0^\infty(U)$ に対し, $\omega \times \mathbb{R}^n$ 上の $N_F \times N_E$ 行列値関数:

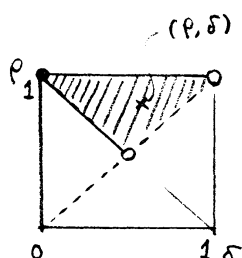
$$(1) \quad p_f(\cdot, \xi) v = e^{-i\langle \cdot, \xi \rangle} (\varphi_F^{-1})^* \mathcal{P} (f \varphi_E^* v e^{i\langle \cdot, \xi \rangle})$$

$$\text{ただし } \xi \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{C}^{N_E}.$$

かつ $\omega \times \mathbb{R}^n \ni (y, \xi) \mapsto p_f(y, \xi)$ について C^∞ -級である. かつ, 任意の compact $L \subset \omega$, 多重指数 α, β に対し, 定数 C があって,

$$(2) \quad \|p_f^{(\alpha)}(y, \xi)\| \leq C (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}$$

$$\text{ただし } p_f^{(\alpha)}(y, \xi) = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial \xi^\alpha \partial y^\beta} p_f(y, \xi).$$



m, p, δ の範囲は, $m \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq 1 - p \leq \delta < p \leq 1$$

とする. ($p > \frac{1}{2}$ に注意.)

次に, $P \in L_{\rho, \delta}^m$ の symbol を定義する. $TX \xrightarrow{\pi} X$ とし, compact $K \subset U \subset X$ とする. $\pi^{-1}K$ 上の symbol とは, $\xi \in (TX)_x, x \in K$,

$$(3) \quad P(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_F^{-1} p_f(\kappa(x), {}^t \kappa'(x)^{-1} \xi) \varphi_F$$

である. 但し, $f \in C_0^\infty(U)$ は K 上で 1 とする. $P(x, \xi) \in \text{Hom}((\pi^*E)_\xi, (\pi^*F)_\xi)$ と考えられるが, 定義に使った f, κ 等に依存している.

そこで, $\pi^{-1}K$ 上の別の symbol P' との関係は, $P_{(\rho)}^{(\omega)}$ の記号を使うと,

$$(4) \quad \begin{cases} P'(x, \xi) \sim \sum P^{(\alpha)}(x, \xi) \varphi_\alpha(\xi) \\ \varphi_\alpha(\xi) \text{ は 次数が } |\alpha|/2 \text{ 以下の多項式} \end{cases}$$

と, ξ について '漸近展開' できる. ([2]) 従って (2) の評価と $\rho > \frac{1}{2}$ から,

$$(4)' \quad |P'(x, \xi) - P(x, \xi)| \leq C |\xi|^{1-2\rho} \quad (|\xi| \text{ 十分大})$$

がわかる.

E, F の metric とは別に以下の metric を π^*E, π^*F に導入する.

定義 π^*E 上の cont. hermitian metric $\|\cdot\|$ が 'tempered' というのは 任意の compact $K \subset X$ に対し, 定数 C_K, M_K が存在して, $(x, \xi) \in \pi^{-1}K$ なら

$$(5) \quad C_K^{-1} (1 + |\xi|)^{-M} \|e_0\| \leq \|e_\xi\| \leq C_K (1 + |\xi|)^{M} \|e_0\|$$

が成立することである. ここで e_ξ とは $e \in E_x$ の $E_x \cong (\pi^*E)_\xi$ による像. この t.h. metric で計った symbol の operator norm を $|\cdot|$ とかく.

この metric を使って hypoelliptic op. のある class を次のように定めることができる ([2] 参照)

定義 $P \in L_{p,\delta}^m(X; E, F)$ が hypoelliptic of type p, δ (H.E. (p, δ) と略す) とは, 任意の compact $K \subset X$, $\pi^{-1}K$ 上の symbol P に対し, $P(x, \xi); (\pi^*E)_\xi \rightarrow (\pi^*F)_\xi$ が $\pi^{-1}K$ 内のある compact を除いて 同型, かある固定した t.h. metric で計って

$$(6) \quad |P(\xi)^{-1}| \leq C_1, \quad \xi \in \pi^{-1}K, \quad |\xi| > C_2$$

$$(7) \quad |P_{(\beta)}^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{-p|\alpha|+\delta|\beta|}$$

が成立する.

例 t.h. metric の増大度は, operator の次数に関係する.

① t.h. metric として, E, F から みちびかれるものを使うと, 0 次の classical elliptic pseudo-diff op. は $p=1, \delta=0$ で 定義をみたす.

② $E = \oplus E_i, F = \oplus F_j$ とし, 各 E_i, F_j について

$$\|e_\xi^i\| = (1+|\xi|)^{s_i} \|e_0^i\|, \quad \|f_\xi^j\| = (1+|\xi|)^{t_j} \|f_0^j\|$$

とすれば "Douglas - Nirenberg の意味での elliptic system" が 定義をみたす.

③ $p \neq 1$ でないのを考えるのは, hypoelliptic op. の 定数係数 における 特長づけ の形 に由来する. 変数係数での 特長づけ は 未完で, この定義はその一部を与えるにすぎないが, 条件が座標系のとり方に依らないのが重要である.

X の座標近傍に合せた 1 の分解を $\sum \varphi_j = 1$ とする.

$\pi^{-1}(\text{supp } \varphi_j)$ 上の symbol を P_j とするとき, 次の命題の成立が 初めに述べた手順①を保証する.

命題 1. $P \in HE(p, \delta)$ とするとき, P は a -index をもつ.

更に $P(\xi) = \sum \varphi_j(\pi\xi) P_j(\xi)$ とおくと, TX 内の compact を除いて $\pi^*E \rightarrow \pi^*F$ への isom を定める. 従って $K(TX)$ の元を定める.

<証明の方針> $HE(p, \delta)$ は adjoint, parametrix がその枠でとれることから前半が従う ([2]). $K(TX)$ の元が P のとり方によらないことは, (4)' の評価から従う. $P(\xi)$ と $P'(\xi)$ 2 つあったとして, $tP + (1-t)P'$ が $|\xi|$ が十分大きいところで isom. になり ($0 \leq t \leq 1$) $K(TX)$ の定義から P と P' は同じ元を定める.

2. index の stability. 後で行う deformation について手順の ① の部分を準備しておく. t -ind については $K(TX)$ の定義を考えればよい. a -ind については, hypoellipticity にもとづいて, $C^\infty(X)$ の代りに, Sobolev space $H_{(s)}(X)$ ([2] §5) を使う. P の次数が m のとき, $P: H_{(s)} \rightarrow H_{(s-m)}$ なら P は有界作用素で済むが, $P: H_{(s)} \rightarrow H_{(s)}$ で扱う必要があるので, 閉作用素の枠で準備する必要がある.

parameter space I は compact, E, F は Banach space とする. $\{P_t\}_{t \in I}; E \rightarrow F$ が closed family とは graph $G = \{(t, u, f); t \in I, u \in \mathcal{D}(P_t), P_t u = f\}$ が $I \times E \times F$ で closed なこと, strongly cont. family とは P_t が有界で, t について強

位相で連続なことを, compact とは $I \times \{\|u\|_E = 1\}$ の像が F で "相対 compact なこと" と定義する.

命題 2 $\{P_t\}: E \rightarrow F$ において (i) $\{P_t\}$ は closed family
 (ii) $\{Q_t\}: F \rightarrow E$ st. cont. family (iii) $\{K_t\}: E \rightarrow E$ compact
 (iv) $Q_t P_t \subset I_E + K_t$, $t \in I$. を仮定すると, index P_t は 上半連続である.

系 3 $\{P_t\}$ とその adjoint $\{P_t^*\}: F^* \rightarrow E^*$ も又仮定をみたすなら index P_t は t について loc. const. である.

次に, $HE(P, \delta)$ において cont. family を次のように設定する. まず $L_{P, \delta}^m$ における cont. family P とは $P: I \rightarrow L_{P, \delta}^m(X; E, F)$ の map であり, $P: C^\infty(X; E) \times I \rightarrow C^\infty(X; F)$ は cont. かつ式 (1) の P_f は $\omega \times \mathbb{R}^n \times I \rightarrow N_F \times N_E$ 行列への連続関数で "評価 (2)" が $L \times \mathbb{R}^n \times I$ で一様に成立するものである. 次に t. h. metric の family とは, $TX \times I \xrightarrow{\pi} X$ とおもて定義し直す. (5) は $\pi^{-1}(K \times I)$ 上で一様に成立する. 従って $HE(P, \delta)$ の cont. family とは, ある m に対し, $L_{P, \delta}^m(X; E, F)$ の元であり, かつある $T(X) \times I$ 上にもち上げた π^*E, π^*F の t. h. metric について "評価 (6) (7)" が $K \times I$ 上で成立するものをいう. (7) から (5) の評価を用いて,

$$|P_f^{(m)}(y, E)| \leq C(H(E))^{2M - |I_1| + \delta|I|} \quad \text{がわかるので}$$

以下 $m \leq 2M$ と仮定してよい.

$HE(P, \delta)$ の cont. family P が与えられたとき, 同じ t. h. metric について $HE(P, \delta)$ の cont. family で P の parametrix Q が構成できる. [2] における考察を parameter をこめてくり返す必要があるが.

又, P の adjoint は, E, F の dual bundle, dual metric を考えて, それに対して $HE(P, \delta)$ の元になることもわかる. 従って, これらを見とめると 命題 3 に応用して, 次の定理を得る.

定理 4. P は parameter space I とする $HE(P, \delta)$ の cont. family とする. そのとき, $a\text{-ind } P$, $t\text{-ind } P$ は loc. const.

<証明の方針> $t\text{-ind } P$ は $K(TX)$ の定義から従う. $P: H_{(s)} \rightarrow H_{(t)}$ とすると closed family を作る. parametrix Q が $H_{(t)} \rightarrow H_{(s)}$ について st. cont. になるように Q を定める. $QP - 1 = R$ は smooth であり X compact だから compact family を作る.

3. 指数定理 5. $HE(P, \delta) \Rightarrow P$ ならば

$$a\text{-ind } P = t\text{-ind } P.$$

<証明の方針> P を変形して, cont. family を作り, 結局 classical elliptic operator につなげられればよい.

local charts を定め, その 1 の分解を $\sum \psi_i = 1$, その $\text{supp } \psi_i$ 上 1 なる ψ_i' , さらに $\text{supp } \psi_i'$ 上 1 である ψ_i'' を使って,

$$\begin{aligned} P_0 u &\stackrel{\text{def}}{=} \sum \psi_i P \psi_i' u = \sum \psi_i \underline{P \psi_i' \psi_i''} u \\ &= \sum \psi_i \varphi_F^{i-1} p^i(y, D) (\varphi_E^{i-1})^* \psi_i'' u \end{aligned}$$

とかく. 以下 P の代りに P_0 を扱う. なぜなら $P - P_0$ は smooth だから index をかえないからである. P_0 の代りに各 $p^i(x, D)$ を扱う.

それを TX を半径 r の disc bundle $B(X)$ への retraction

で変形する. $\chi(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ \frac{2}{t} & t \geq 3 \end{cases}$ なる C^∞ -関数とする.

$$p_\varepsilon^i(y, \xi) = p^i(y, \xi \chi(\varepsilon r^i(y, \xi))) \quad \text{とかく.}$$

ここで r^i は $K^i: U_i \rightarrow \omega_i \subset \mathbb{R}^n$ diffeom. とするとき,

$$r^i(K^i(x), \xi) = |t K^{i'}(x) \xi| \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in U_i$$

である. 右辺は TX での riemannian metric.

$$P_\varepsilon u = \sum \psi_i \mathcal{G}_F^{i*} p_\varepsilon^i(y, D_y) (\mathcal{G}_E^{i-1})^* \psi_i'' u$$

とかく. ($\varepsilon=0$ で元の P_0 に一致する.)

$$p_\varepsilon^i(y, \xi) \text{ は } r^i(y, \xi) \geq 3/\varepsilon \text{ なら}$$

$$p_\varepsilon^i(y, \xi) = p^i(y, \frac{2\xi}{\varepsilon r^i(y, \xi)})$$

$$= p^i(K(x), \frac{2\xi}{\varepsilon |t K^{i'}(x) \xi|})$$

だから ξ に関して 0-homogeneous になる. 従って P_ε の principal

symbol を考えることができる. $\text{supp } \psi_i$ 上の symbol は

$$\begin{aligned} p^i(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_F^{i-1} p^i(K^i(x), t K^{i'}(x)^{-1} \xi) \mathcal{G}_E^i \\ &= \mathcal{G}_F^{i-1} p^i(K^i(x), t K^{i'}(x)^{-1} \frac{2\xi}{\varepsilon |\xi|}) \quad (|\xi| > \frac{3}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

であるから, P_ε は $\varepsilon \neq 0$ で elliptic.

あとは, ε が十分 0 に近い範囲で P_ε が cont. family を作れば

よい. まず t.h. metric の family は, $\Phi_\varepsilon: TX \rightarrow TX$

$(\Phi_\varepsilon(f) = \varepsilon \chi(\varepsilon|f|))$ を使って, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対し,

$$\|e_\varepsilon\|_\varepsilon = \|e_{\Phi_\varepsilon(f)}\|, \quad e \in E_{\pi f}$$

で定める. 右辺の $\|\cdot\|$ は元の t.h. metric である. $\|\cdot\|_\varepsilon$ で計った operator norm は $1 \cdot |_\varepsilon$ で示す. 各 $P_\varepsilon^i(f)$ について評価する.

(6), (7) を $1 \cdot |_\varepsilon$ でかき直すと

$$|P_\varepsilon^i(f)|_\varepsilon \leq C, \quad |P_\varepsilon^i(f)^{-1}|_\varepsilon \leq C, \quad |f| > C,$$

$$(4)' \text{ は } |P_\varepsilon^i(f) - P_\varepsilon^j(f)|_\varepsilon = O(\Phi_\varepsilon(f)^{1-2p}) \quad \text{をあらわす.}$$

従って, 十分大きい ε i.e. $|f| > C$ に対して,

$$|\sum \psi_i(\pi f) P_\varepsilon^i(f)|_\varepsilon \leq C, \quad |\sum \psi_i(\pi f) P_\varepsilon^i(f)^{-1}|_\varepsilon < C.$$

次に (7) に対応する評価を出すには, 合成関数の微分公式を使って

$P_\varepsilon^{i(\alpha)}_{(p)}(f)$ を $P_\varepsilon^{i(\alpha)}_{(p)}(\Phi_\varepsilon(f))$ で評価することが必要. 結局,

$$|P_\varepsilon^{i(\alpha)}_{(p)}(f)|_\varepsilon \leq C_{\alpha,p} (1+|f|)^{-p|\alpha| + \delta|p|}$$

を得る. よって P_ε^i は $L^2_{p,\delta}(X; E, F)$ で cont. family を作り, (4)' も一様に成立するので, P_ε の symbol $P_\varepsilon(f)$ に対し,

$$|P_\varepsilon(f) - \sum \psi_i(\pi f) P_\varepsilon^i(f)|_\varepsilon \leq C |f|^{1-2p}, \quad |f| > C$$

が成立する. 故に, これらから, 求める評価が得られる.

4. 今迄の議論は X compact の条件の下である. X が noncompact であるときは, operator P に制限をつけることにより修正される. つまり, ある compact $X_0 \subset X$ があって, X_0 の外で isom. である掛算作用素 P_0 を P から引くと, $P - P_0$ の核超関数の台が $X_0 \times X_0$ に含れる.

この制限は X のある種の 'compact化' と考えられる. Atiyah-Singer による指数定理の証明 ([1]) で $K(TR^n)$ の元である Bott - element に対応する operator の a -ind が 1 になることが核心の1つであった. K_G -理論によって特殊な場合へ帰着して計算されたのだが, Hörmander は $HE(p, \delta)$ の例として, その直接証明を与えている. $TR^n \cong \mathbb{C}^n$ とおき, $\mathbb{C}^n$ の p 次外積を Λ^p とする. $\mathbb{C}^n$ から Λ^p への関数 (section) を $C^\infty(\Lambda^p)$, $L^2(\Lambda^p)$ とする.

operator $(x^e + d)f = \sum x_i dx_i \wedge f + df$, その formal adjoint を $x^i + \delta$ とする. 今 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし, ε に ε の近くで 1 とする. 2次元 parameter (ε, τ) に対す operator $A_j^{\varepsilon, \tau} = \varphi(\tau x) \chi(\varepsilon D) \partial_j \varphi(\tau x)$ を考え, d, δ において $\partial_j \in A_j^{\varepsilon, \tau}$ とおきかえて, $P^{\varepsilon, \tau} = (x^e + d_A) + (x^i + \delta_A); L^2(\Lambda^{\text{even}}) \rightarrow L^2(\Lambda^{\text{odd}})$ とする. $P^{0,0} = (x^e + d) + (x^i + \delta)$ である. この operator については $\dim \ker P^{0,0} = 1$, $\dim \operatorname{coker} P^{0,0} = 0$ 従って index 1 がわかる. 一方, φ, χ をうまくとると, $\tau, \varepsilon \neq 0$ で $P^{\varepsilon, \tau}$ は Bott element に対応し, かつ family $P^{\varepsilon, \tau}$ に命題 2 を適用できる. 従って Bott element の a -ind が 1 とわかる.

— 文献 —

- [1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87 (1968), 484-530

- [2] L. Hörmander , Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. 10 (1967), 138-183.
- [3] " , On the index of pseudodifferential operators.