

幾何種数の計算公式と楕円型特異点について (総合報告, その他)

京大数理研 泊 昌孝 (Masataka Tomari)

この話は [12] に続いて 2 次元正規特異点 $\mathbb{C}$ の不変量に関するものである。結果は, Laufer - Yau の結果のいくつかの発展と, それらのつながりについての再認識である。そしてある不変量の関係式 ($L = P_g$) を満たす特異点の resolution process の言葉による特徴づけを中心にして, 3 つの部分からなる。I は不変量のための話であり中心は定理 (2.4) である。これは Stephen Yau の定理 (1.8) を自分なりに消化して得たもので, 特に, ある resolution 上で fundamental cycle Z_0 と maximal ideal cycle が一致する特異点について $P_g(Z_0) = \dim R^1_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/m \cdot R^1_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}))$ が成立することがわかる。dual graph よりきまる $P_g(Z_0)$ が $R^1_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})$ をこの等式の意味で制限する。実際, 後に (5.9, 10) 極大楕円型特異点がある特殊な resolution process を有する事を導く。次に II では, 楕円型特異点の resolution process についての基礎を述べます。 P_g の計算, P_g を固

定して特異点の Hilbert 関数も制限すること, Zariski's canonical resolution に於ける dualizing sheaf の計算, そして elliptic sequence が論じられる。更に筆者は III で話題となる定理により「1次元特異点 node と cusp に対応する 2次元特異点が最小楕円型特異点ならば, 1次元2重点に対応するものは resolution process の類似性から Gorenstein 特異点に限ると $L = p_g$ を満たす特異点である」と結論づけたい。

以上 II の詳細はプレプリント [14] を見て下さい。また, 実際の講演では全く触れられなかった §8, 9 についても書かせていただきます。

I. 正規2次元特異点の不変量について.

§1. p_a, p_g , そして $p_a(\mathbb{Z}_0)$. 1). (V, p) と書けば a germ of normal 2-dim complex space V with a reference point p (以下, 2次元正規特異点と呼ぶ) をあらわし, $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ で, A を例外集合とする特異点 (V, p) の resolution をあらわす。この時, 特異点 (V, p) の geometric genus (幾何種数) とは整数 $p_g(V, p) = \dim R'_{\psi} \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ のことである。また, arithmetic genus (算術種数) とは整数 $p_a(V, p) = \max \{ p_a(D) \mid D: \text{non-zero effective divisor on } \tilde{V} \text{ s.t. } D \text{ の } |D| \subseteq A \}$ である。ただし $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ とする。

その他の記号は大体 Wagon [15] のものに従う ([6], [12] も参)。そして, V を適当な Stein 近傍にとるというようなこともいさゝち断らずに行なうことにする。まず, 最も基本的な事からおもい出してゆきましょう。

2) 命題 P_g 及び P_a は resolution のとり方に依らない。[15]

3) 命題 [15], $P_a(V, p) \leq P_g(V, p)$ である。

4) 定義 [2]. $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を正規 2 次元特異点の resolution とし, $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$ という具合に既約成分に分解されているとせよ。この時, 集合 $\{ D > 0 \mid D: \text{divisor on } \tilde{V}, |D| \leq A, D \cdot A_j \leq 0 \ \forall j \}$ の中の最小元を ϵ と fundamental cycle と呼ぶ。

5) 注意 (i) fundamental cycle は任意の ψ に対して必ず存在して unique である。(ii) [6] Laufer の computation sequence for $\mathbb{Z}_0$ により $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_0}) \cong \mathbb{C}$, 特に $P_a(\mathbb{Z}_0) = \dim H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_0})$ である。だから $0 \leq P_a(\mathbb{Z}_0) \leq P_a \leq P_g$ が成立している。

6) 命題 (i) [2] $P_a(\mathbb{Z}_0) = 0$ ならば $P_a = 0$ 。(ii) [1, 2] $P_a = 0$ ならば $P_g = 0$ 。(iii) ([15] 及びその他の人々, 本稿の (8.5) も参) $P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ ならば $P_a = 1$ 。(iv) $P_a = 1$ でも P_g はいくさでも大きくなり得る。^(OK → p31 を見よ)(v) [11] $P_a(\mathbb{Z}_0) \geq 2$ の時, $P_a(\mathbb{Z}_0)$ を固定しても P_a はいくさでも大きくなり得る。||

これに対して, Gorenstein である時, 次の結果が得られて

いた。

7) 定理 (大柳-吉永 [8], Stephen Yau [17]). $(V, p) \in$ 2次元正規 Gorenstein 特異点とする。この時 $p_g(V, p) = 2$ ならば $p_a(\mathbb{Q}_0) = 1$ である。 ||

これは更に、2つの方向に拡張された。ひとつは、 $p_g = p_a(\mathbb{Q}_0)$ (又は $p_g = p_a$) である時、特異点がどのような制約を受けるかを調べるもので、日高-渡辺敬一 [3], 渡辺公夫 [16] 及び筆者による研究があるが、ここでは触れないことにする。もうひとつは、やはり Yau による次の statement である。

8) 定理 (Th. 3.2. Yau [17]). $(V, p) \in$ 2次元正規特異点であり $p_g \neq 0$ とする。resolution manifold $\tilde{V}$ が 1-convex manifold になるようにとり、compact support の cohomology $H_*^1(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ について次の条件が成立しているとせよ。 $\exists \beta \in H_*^1(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2) \cdot \exists f \in \mathfrak{m}$ (maximal ideal of $\mathcal{O}_{V,p}$) s.t. $\beta, f\beta, \dots, f^{p_g-1}\beta$ が $H_*^1(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ の $\mathbb{C}$ -basis をなす。すると、 $p_a(\mathbb{Q}_0) = 1$ である。 ||

次節では、この定理の発展したものを論ずる。

§ 2. 単項化定理. 1) 記号. 正規 2次元特異点の resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ with $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$ とする。 I を $\mathcal{O}_{V,p}$ の ideal とするとき、 $\tilde{V}$ 上の divisor $D(I, \psi)$ を

$$D(I, \psi) = \sum_{j=1}^m \left(\min_{f \in I} (\text{ord}_{A_j}(\psi^* f)) \right) \cdot A_j$$

と定める。また ψ^*f ($f \in \mathcal{O}_V$) が定める $\tilde{V}$ 上の divisor $\in \text{div}(\psi^*f)$ と書き, $\{f=0\}$ on V の ψ による強変換像を $D_{f,\psi}$ と書く。特に, $\text{div}(\psi^*f) = D(f, \psi) + D_{f,\psi}$ が成立する。

2) 定義 I は $\mathcal{O}_{V,p}$ の ideal, $f \in I$ とする。この時, f が I -initial element であるとは, 適当な resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ が存在して関係式 $\text{div}(\psi^*f) = D(I, \psi) + D_{f,\psi}$ が成立することである。

3) 注意 (i) $D(I, \psi)$ は 極大イデアル因子 と呼ばれ, Υ_ψ と書かれる。(ii) 任意のイデアル $I \subset \mathcal{O}_{V,p}$ と resolution ψ に対して元 $f \in I$ で定義 (2.2) の関係が成立するものがとれる。

4) 定理 (単項化定理). (V, p) は 2 次元正規特異点, $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_V$ の coherent ideal sheaf, そして $f \in \mathcal{I}_p \in \mathcal{I}_p$ -initial 元とする。この時, 任意の resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ について次の関係が成立する。

$$\begin{array}{ccc} R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{I} \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} & = & R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/f \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \cong H^1(\mathcal{O}_{D(f,\psi)}) \\ & & \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\psi^*(\mathcal{I})) \\ \uparrow \text{dual}/\mathbb{C} & & \uparrow \text{dual}/\mathbb{C} \end{array}$$

$\{\beta \in H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}}) \mid \mathcal{I} \cdot \beta = 0\} = \{\beta \in H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}}) \mid f \cdot \beta = 0\}$ (ただし, $H^1_*(\Omega^2_{\tilde{V}})$ は (1.8) と同様に 1-convex manifold $\tilde{V}$ に対して考える。) 特に, $\mathcal{I} \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = f \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ が成立する。 ||

証明は次の 3 つの部分 (2.5) ~ (2.7) に分かれる。

5) ψ を定理の通りとする。 $f_1 \in \mathcal{L}_p$ を $\text{div}(\psi f_1) = D(I, \psi) + D_{f_1, \psi}$ on $\tilde{V}$ が成立するものとする。この時、 $R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / f_1 R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \cong H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_{D(I, \psi)}) \cong R^1\psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \psi^*(I))$ である。

証明 次の縦横の完全列からなる可換図式を見よ。

$$\begin{array}{ccccc}
 R^1\psi_*(\psi^*(f_1)) & \longrightarrow & R^1\psi_*(\mathcal{L}_{D(I, \psi)}) & \longrightarrow & R^1\psi_* (\mathcal{L}_{D(I, \psi)} / \psi^*(f_1)) \\
 \parallel s & \searrow a & \downarrow c & & \downarrow d \\
 (f_1) \otimes R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & \xrightarrow{b} & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & \xrightarrow{e} & R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / f_1 R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & \nearrow f & \\
 & & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(I, \psi)}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

ここで、 b は積による射である。 a と b の可換性は projection formula, 消滅 d は relative dim of support of $\mathcal{L}_{D(I, \psi)} / \psi^*(f_1)$ with respect to ψ が zero である事による。 $\text{Im } a = \text{Im } b = \text{Im } c$ in $R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ であり、対応により $R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(I, \psi)}) \cong R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / f_1 R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ である。 もうひとつの対応については次の可換図式を見よ。

$$\begin{array}{ccccc}
 R^1\psi_*(\psi^*(I)) & \longrightarrow & R^1\psi_*(\mathcal{L}_{D(I, \psi)}) & \longrightarrow & R^1\psi_* (\mathcal{L}_{D(I, \psi)} / \psi^*(I)) \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \\
 & & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(I, \psi)}) & \longleftarrow & R^1\psi_* (\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \psi^*(I)) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

同様にして $R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(U,\psi)}) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}/\psi^{-1}(U)})$ である。 //

6) 記号を (2.5) と同様であるとする。この時

$$R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \text{ である。}$$

証明 f が $\mathcal{L}_p$ -initial element であるから、適当な resolution $\psi_0: (\tilde{V}_0, A_0) \rightarrow (V, p)$ が存在して、 $\tilde{V}_0$ 上で関係式

$$\operatorname{div}(\psi_0^*(f)) = D(I, \psi_0) + D_{f, \psi_0} \text{ が成立する。そこで } \psi \text{ と } \psi_0 \text{ に}$$

対応して resolution ψ_2 をとって次の図式が成立するようにする。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_2 & \xrightarrow{\pi_0} & \tilde{V}_0 \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \psi_2 & \downarrow \psi_0 \\ \tilde{V} & \xrightarrow[\psi]{} & V \end{array}$$

$\mathcal{L}_p \in \mathcal{L}$ として、 $\tilde{V}_2$ 上で $\operatorname{div}(\psi_2^*(f_2)) = D(I, \psi_2) + D_{f_2, \psi_2}$ が成立する
 ようにする。明らかに、 $\operatorname{div}(\psi_0^*(f_2))$

$$= D(I, \psi_0) + \pi_{2*}(D_{f_2, \psi_2}) \text{ か } \pi_{2*}(D_{f_2, \psi_2}) = D_{f_2, \psi_0} \text{ on } \tilde{V}_0,$$

$$\operatorname{div}(\psi^*(f_2)) = D(I, \psi) + \pi_{1*}(D_{f_2, \psi_2}) \text{ か } \pi_{1*}(D_{f_2, \psi_2})$$

$$= D_{f_2, \psi} \text{ on } \tilde{V} \text{ である。 (2.5) を用いて, } R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) =$$

$$R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde{V}_0})/_{f_*} R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde{V}_0}) = R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{D(U, \psi_0)}) =$$

$$R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde{V}_0})/_{f_2*} R^1\psi_{0*}(\mathcal{O}_{\tilde{V}_0}) = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_2*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(I, \psi)})$$

$$= R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \text{ である。}$$

7) f_1 について

$$R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \stackrel{\text{liv}}{=} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})/_{f_1*} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})$$

(i) $\updownarrow$ dual

$\updownarrow$ (iii) dual.

$$\{\beta \in H^1_*(\tilde{V}, \Omega^2_{\tilde{V}}) \mid \mathcal{L}\beta = 0\} \stackrel{\text{iii}}{=} \{\beta \in H^1_*(\tilde{V}, \Omega^2_{\tilde{V}}) \mid f_1\beta = 0\}$$

が成立することを示す。

証明

(i) 完全列 $0 \rightarrow \mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \xrightarrow{a} R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow 0$ の $\mathbb{C}$ -dual に associate して次の図式を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & (R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}})^* & \rightarrow & (R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}})^* & \xrightarrow{a^*} & (\mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}})^* \rightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \parallel s & \searrow \langle \cdot, \beta \rangle & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{J} & \rightarrow & H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2) & \xrightarrow{\beta} &
 \end{array}$$

ここで、同型 b を Serre duality $\langle \cdot, \cdot \rangle : R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \times H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2) \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて定義するのだが、特に $\alpha \in R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}, \beta \in H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ $r \in \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ に対して self-adjoint property $\langle \alpha, r\beta \rangle = \langle r\alpha, \beta \rangle$ が成立するようにとる [10]。この対応により $(R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}})^*$ に相当する部分を $\mathcal{J}$ とおくと、 $\beta \in H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ について、
 $\beta \in \mathcal{J} \Leftrightarrow a^*(\langle \cdot, \beta \rangle) = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \cdot R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}$
 $\Leftrightarrow \langle r\alpha, \beta \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}}, \forall r \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \langle \alpha, r\beta \rangle = 0$
 $\forall \alpha \in R'_{\mathbb{A}} \mathcal{O}_{\tilde{V}} \quad \forall r \in \mathcal{I} \Leftrightarrow r\beta = 0 \quad \forall r \in \mathcal{I}$. (i) は証明された。
(ii) Laufer の定理 [5] $H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2) =$

$P(\tilde{V} - A, \Omega_{\tilde{V}}^2) / P(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ を使う。 $\beta \in H'_*(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ を

$\beta = \text{cl}[\omega], \omega \in P(\tilde{V} - A, \Omega_{\tilde{V}}^2)$ という形に表示する。

ω は有理型形式として $\tilde{V}$ へ延張されるが、それを $f \cdot \omega$ と書く。その事に気を付けて、 $\mathcal{I}\beta = 0 \Leftrightarrow f \cdot \omega$ は正則 on $\tilde{V} \quad \forall f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f \cdot \omega$ が定める $\tilde{V}$ 上の divisor $\text{div}(\omega) + \text{div}(f^*(f))$ が effective $\forall f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \text{div}(\omega) + D(\mathcal{I}, \psi) \geq 0$
 $\Leftrightarrow f \cdot \omega$ が $\tilde{V}$ 上正則 $\Leftrightarrow f \cdot \beta = 0$. (ii) は証明された。

(iii) は(i)の特別な場合に相当する。(iv)は(i),(ii),(iii)より明らかである。

定理(2.4)の証明終わり。

§3. 不変量 $L(V, p)$ について 1) 正規2次元特異点

の resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ をとる。そして $R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の m -adic filtration $R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supseteq m \cdot R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supseteq m^2 R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supseteq \dots$ を考えよ。 $f_0 \in m$ を m -initial element とすると、任意の自然数 α に対して f_0^α は m^α -initial element である。特に $m^\alpha \cdot R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f_0^\alpha \cdot R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ であり、上の filtration は f_0 を掛けることによつてできる ψ -zero endomorphism $f_0: R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} \rightarrow R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ によつて決定される。この endomorphism の nilpotency order として、筆者が以前導入した不変量 $L(V, p)$ [11], [12] を書き直そう。

2) 定義 $L(V, p) := \min \{ r \geq 0 \mid m^r \cdot R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0 \}$.

$$\begin{aligned} \text{これは明らかに} \quad &= \min \{ r \geq 0 \mid f_0^r \cdot R'_\psi \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0 \} \\ &= \min \{ r \geq 0 \mid m^r \cdot H'_*(\Omega_{\tilde{V}}^2) = 0 \} \\ &= \min \{ r \geq 0 \mid f_0^r \cdot H'_*(\Omega_{\tilde{V}}^2) = 0 \} \\ &= \min \{ r \geq 0 \mid \dim H'(\mathcal{O}_{r, \tilde{V}}) = p_g \} \\ &= \max \{ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\psi^*(f_0)] \cdot \beta \mid \beta \in H'_*(\Omega_{\tilde{V}}^2) \} \end{aligned}$$

とあらわすことができる (by (2.4))。そして更に特異点 (V, p) が Gorenstein である場合には, resolution 多様体 $\tilde{V}$ 上

の標準因子 $K\tilde{v}$ であって A に台が含まれるものを使って,
 $L(v, p) = \min \{ r \geq 0 \mid -K\tilde{v} \leq r \cdot \gamma_4 \}$ ともあること
 ができる (pp 9-10 [11]). この表示は §11 で使われる。

3) 命題 $L \leq p_3$, $\dim H'(O_{\gamma_4}) \leq p_3$, として $p_3 \leq$
 $L \cdot \dim H'(O_{\gamma_4})$ である。

証明 (2.4) と (3.1) により Jordan の分解定理より従う。||

4) さらに、次の 3 条件が同値であることを見ることは
 正しい。(i) ある $f \in \mathfrak{m}$ について、積によって生じる線型
 写像 $f: H'_*(\Omega_0^2) \rightarrow H'_*(\Omega_0^2)$ が Jordan 細胞 1 つによる行列
 表示を持つ (定理 (1.8) の条件) (ii). $L = p_3$ であって $p_3 \neq 0$.
 (iii) $\dim H'(O_{\gamma_4}) = 1$ である。最後の条件から, $p_2(\mathbb{Z}_0)$
 $= h'(O_{\mathbb{Z}_0}) \leq h'(O_{\gamma_4}) = 1$ であり (1.6) に注意すれば (1.8)
 の結果が従う。

5) 筆者は以前 [11], いくつかの計算をまとめる為にこの
 不変量 $L(v, p)$ を導入した。この数も考えて議論することによ
 り [11] では問題のもつ個々の側面を明確にとらえることがで
 きていたと思う。そして今, 数 $L(v, p)$ は上の様な意味での
 $R' \# O_{\tilde{v}}$ の $O_{\tilde{v}}$ -加群としての構造の 1 つの側面をあらわす不
 変量として認識され, $L(v, p)$ を考えることの有効性は, $R' \# O_{\tilde{v}}$ の
 $O_{\tilde{v}}$ -加群構造を考えることの有効性に吸収された。

II 正規2次元 Gorenstein 特異点であって $p_g = 1$ であるものの resolution process に関する foundation.

§4 p_g の計算 §1 [12] に対して本質的に付け加えることはない。そこでの principle を復習しておく。正規2次元特異点 (V, p) について, compact 解析空間 $\bar{V}$ を $V \subset \bar{V}$ となるようにとる。blowing-up with smooth center の合成による (V, p) の resolution をとると, 次の図式ができる。

$$\begin{array}{ccccccc} V = V_0 & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N = \tilde{V} \\ \cap \parallel & \cap \parallel & \psi_1 & \cap \parallel & & \gamma_N & \cap \parallel & \cap \parallel \\ \bar{V} = \bar{V}_0 & \longleftarrow & \bar{V}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \bar{V}_N = \tilde{\bar{V}} \end{array}$$

ただし, $\psi_i: V_i \longrightarrow V_{i-1}$ は center $\Gamma_i \subseteq V_{i-1}$ による V_{i-1} の blowing-up であり $\bar{V}_i$ は $\bar{V}$ によってひきおこされる自然な V_i の compact 化である。Leray の spectral sequence により

$$-p_g(V, p) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = \sum_{i=1}^N \{ \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) \}$$

であるが,

命題 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) = \sum_{k \geq 0} \left\{ P_i(k) - \chi\left(\Gamma_i, \frac{\mathcal{I}_{\Gamma_i}^k \mathcal{O}_{V_{i-1}}}{\mathcal{I}_{\Gamma_i}^{k+1} \mathcal{O}_{V_{i-1}}} \right) \right\}$ ただし, $\mathcal{I}_{\Gamma_i}$ は center の定義イデアル, そして, $P_i(t)$ は $\mathbb{Q}$ -係数1変数多項式であって

$$P_i(k) = \chi\left(\Gamma_i, \frac{\mathcal{I}_{\Gamma_i}^k \mathcal{O}_{V_{i-1}}}{\mathcal{I}_{\Gamma_i}^{k+1} \mathcal{O}_{V_{i-1}}} \right) \quad (k \text{ 十分大})$$

となるものである。

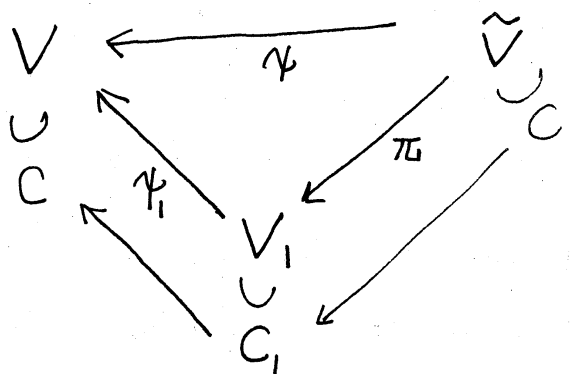
この方法で p_g を計算しようとするとき, center に対する関

数 $[k \mapsto \chi(P_i, \mathcal{I}_{P_i}^k \mathcal{O}_{V_{i-1}} / \mathcal{I}_{P_i}^{k+1} \mathcal{O}_{V_{i-1}})]$ を知らなければならぬ。

§5. R による特異点の制約 この節の前半で述べるこ

とはすでに §2 [2] で使った method であるが、まずは、それを抜き出して書いておこう。

1) 2次元正則特異点 (V, p) を $(\mathbb{C}^N, 0)$ に埋め込み、 $\mathbb{C}^N$ における超平面 $H \ni 0$ と V との交わりを $(C, 0)$ とする。resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ であって $\psi^*(m)$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ -invertible になるもの ψ とすると次の図式ができる。ここで、 $\psi_i: V_i \rightarrow V$ は



blowing-up of V with center m , $C_i \rightarrow C$ は strict transform of C として ψ_i より生ずる map, そして C' は ψ による strict

transform ((2.1) 参) である。§2 [2] における Laufer の命題の变形として

2) 命題 上の situation で generic な (定式化できるが省略) H について、等式 $P_a(\psi) = \dim \pi_* (\mathcal{O}_{C'} / \mathcal{O}_{C_1}) + \sum_{k \geq 1} \{ P_{C, p}(k) - H_{C, p}(k) \}$ が成立する。ただし、 $H_{C, p}(k) := \dim m^k \mathcal{O}_C / m^{k+1} \mathcal{O}_C$ として $P_{C, p}$ はそれに対する Hilbert polynomial である。

そして次の事に気をつけよう。

3) 定理 $\mathcal{O}_{C,p}$ を 1 次元 Cohen-Macaulay 特異点 (C,p) の局所環とすると, $H_{C,p}(k) \leq P_{C,p}(k)$ for $\forall k$ である。||

特に, (5.2) において $P_a(Y_4) \geq 0$ であることがわかった。

さて, 一般の resolution との関係については次の命題を見よ。

4) 命題 図式 $(\tilde{V}, A) \xrightarrow{\psi} (V, p)$ ϕ, ψ は (V, p) の resolution

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \uparrow & \searrow & \nearrow \\ & (V', A') & \end{array}$$

について (i) $P_a(Y_4) \geq P_a(Y_\phi)$ である。(ii) 更に $\phi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_V$ -invertible である時には, $P_a(Y_4) = P_a(Y_\phi)$ であることが $\psi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ -invertible になるための必要十分条件である。

5) 系 (i) 任意の resolution ϕ に対して $P_a(Y_\phi) \geq 0$ である。
(ii) resolution ψ について, $\psi^{-1}(m)$ が $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ -invertible になるための必要十分条件は, $P_a(Y_4)$ が $\{P_a(Y_\phi) \mid \phi: \text{resolution of } (V, p)\}$ の中で最小値をとることである。

6) 大雑把な関係であるが, まとめると

$$0 \leq \sum_{k \geq 1} \{P_{C,p}(k) - H_{C,p}(k)\} \quad (5.2) \text{ の situation} \\ \leq P_a(Y_\phi) \text{ 任意の resolution } \phi. \leq P_a.$$

である。だが, この報告のように P_a の小さな特異点を調べる時は, 細かい情報をさぐる手掛りとなる。

§ 6. Zariski's canonical resolution

1) 2次元正規特

異点 (V, p) は次の process で特異点解消することができる (by Zariski, 筆者は J. Lipman の論文によって勉強した [7]).

$\sigma_1: V_1 \longrightarrow V$ the blowing-up of V at p ,

$T_1: \tilde{V}_1 \longrightarrow V_1$ the normalization of V_1 ,

$\sigma_2: (\tilde{V}_1)_1 \longrightarrow \tilde{V}_1$ the blowing-up of $\tilde{V}_1$ at a point in $\text{Sing}(\tilde{V}_1)$

$T_2: (\tilde{V}_1)_1^\sim \longrightarrow (\tilde{V}_1)_1$ the normalization. 等々と続く.

そして, 有限回で終わる。これを Zariski's canonical resolution (Z.C.R.と略す) と呼ぶ。

2) 定理 (V, p) を 2次元正則 Gorenstein 特異点であって $P_a = 1$ であるとする, Z.C.R. は次のような blowing-up の合成に分解される。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square = \square_0 & \longleftarrow & \square_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \square_N \\
 (*) \quad \cup \parallel & & \cup \parallel & \psi_1 & & \cup \parallel & \psi_N \quad \cup \parallel \\
 V = V_0 & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N
 \end{array}$$

ここで $V \subseteq \square$ は minimal embedding であるとする。 ψ_i は $\square_{i-1}$ の smooth center $P_i \subset V_{i-1}$ による blowing-up であり, して V_i は V_{i-1} の strict transform である ($1 \leq i \leq N$)。更に, ある数 $M (\leq N)$ について $\bigcap_{i=1}^M (i) V_i$ は正則である for $i \leq M$.
 (ii) ψ_i は blowing-up with point center $p_i (= P_i)$ であり, かつ (V_{i-1}, p_i) は Gorenstein of maximal embedding dimension (例 1 [2] を見よ) であり重複度は 3 以上であ

(iii) 一般に、正規である V_i 上には non-rational point は高々1つである。

る for $i \leq M$ (iv) V_M の任意の点での重複度は2以下である。(v) V_M の Z.C.R. の各正規化はそれぞれ blowing-up along (reduced) $\mathbb{P}^1$ 1回で得られる。

3) 証明に於いて (Reid の論文 [9] におけるのと同様に) $\text{grm}(O_V)$ の Gorensteinness に関する J. Sally の研究結果が重要な役割を果たすことを注意しておく。

4) 上記の図式(*)の V を compact 化して §4 のような compact 解析空間の modification の列を考え、 $\chi(O_{\bar{V}_i})$ の変化を調べよう。そこで $\{j_1=1 < \dots < j_M=M < j_{M+1} < \dots < j_F\}$ を $\{1, \dots, N\}$ の部分集合であって、 ψ_{j_k} が blowing-up with point center of multiplicity ≥ 3 であるか、または with center $\mathbb{P}^1$ であるようなもの全体とする。

5) 命題 2次元正規 Gorenstein 特異点 (V, p) の Z.C.R. が (6.2) (*) の条件を満たす blowing-up の合成で得られたとせよ ($p_a=1$ である必要はない)。すると、(i) $\chi(O_{\bar{V}_i}) - \chi(O_{\bar{V}_{i-1}}) = -1$ for $i=j_1, \dots, j_F$ (ii) $\chi(O_{\bar{V}_i}) - \chi(O_{\bar{V}_{i-1}}) = 0$ for other i , 特に、 $F = P_g(V, p)$ である。

6) 我々は Z.C.R. について考察したわけだが、これがその他の resolution, 特に minimal resolution とどの様な関係を持つのかというのは、自然な問題である。それは §9 において答えられるが、それを理解する為には次の2つの事 (§7, §8)

を考察する必要がある。

§7 canonical divisor

1) 定理 2次元正規 Gorenstein 特異点 (V, p) の Z.C.R. が (6.2) (*) の条件を満たす blowing-up の合成で得られたとせよ ($p_a = 1$ である必要はない)。 $\{j_1, \dots, j_{p_2}\}$ を (6.4) (6.5) の index set とし, K_{V_N} を V_N の canonical divisor であって台が resolution $V_N \rightarrow V$ の例外集合に含まれるものとするとき,

$K_{V_N} = \sum_{h=1}^{p_2} -W_{j_h}$ である。ただし, divisor W_i on V_N は $\mathcal{L}W_i = \mathcal{O}_{V_N}(-W_i) = (\psi_N \circ \dots \circ \psi_1)^{-1}(\mathcal{L}p_i) \cdot \mathcal{O}_{V_N}$ で定義されるものである。||

2) これを証明することについて, いったい何が問題なのかという事について以下では論ずる。 $\psi_1, \dots, \psi_N$ の合成を ψ と書くことにする。定理の右辺の divisor は ambient space $\mathbb{L}_N$ 上の divisor の V_N への制限と書けている。つまり「 $\mathbb{L}_N$ 上の divisor D であって台が $|\psi(p)|$ に含まれていて, かつ $D|_{V_N} = K_{V_N}$ となるものを見出すこと」が問題となる。更に, ψ

$\mathbb{L}_N \rightarrow \mathbb{L}$ の functional determinant E_ψ を用いて,
 $\mathcal{O}_{\mathbb{L}_N}([E_\psi]) = \bigwedge_{\mathbb{L}_N}^{\dim \mathbb{L}}$ と書けることに気をつければ「 $\mathbb{L}_N$ 上の divisor G であって $|\psi(p)|$ に台が含まれていて, かつ $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{L}_N}}^{\dim \mathbb{L}-2}(\mathcal{O}_{V_N}, \mathcal{O}_{\mathbb{L}_N}([G])) \cong \mathcal{O}_{V_N}$ となるもの

を見出すこと」という adjunction formula に関する問題と同値である。それは $N=1$ の場合に限っても難しさは変わらない。 $N=1$ の時は「 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_U}^{\dim U-2}(\mathcal{O}_{V_1}, \mathcal{O}_U(\alpha[\mathcal{V}^{-1}(p)])) \cong \mathcal{O}_{V_1}$ となる整数 α が存在するか? そして存在すれば求めよ」という問題である。これは $\text{Proj}(\bigoplus_{k \geq 0} m^k \mathcal{O}_U)$ 上の問題であり、肯定的に解ける為のひとつの十分条件として「 $\bigoplus_{k \geq 0} m^k \mathcal{O}_U$ 上で $\bigoplus_{k \geq 0} m^k \mathcal{O}_V$ が T.N.-isomorphism の意味で self-duality を持つ projective free resolution を有する」という条件がある。筆者は (V, p) が Gorenstein of maximal embedding dimension になることと、それに対する J. Sally の研究、及び J. Wahl による Artin-Rees 定理の精密化を用いて上の条件をチェックし定理を導いた。

§8 elliptic sequence 1) (V, p) を正則 2 次元特異点, として $\psi: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を resolution とせよ。B を $\tilde{V}$ 上の reduced connected divisor で $B \subseteq A$ なるものとします。この時 B 上の fundamental cycle を $\mathbb{Z}B$ と書くことにします。

2) 命題 上の situation に於いて, reduced connected divisors の集合 $\{C_i; i=1, \dots, r\}$ が $C_i \subseteq A$ であり、かつ $i \neq j$ ならば C_i と C_j は irreducible component を共有しないものが与えられたとせよ。すると、次の不等式が成立す

$$3. \quad \sum_{i=1}^r P_a(\mathbb{Z}_{C_i}) \leq P_a(\mathbb{Z}_0) //$$

これは Laufer の computation sequence により容易に証明できますが, これを念頭に置いて我々の elliptic sequence を導入しよう。

3) 定義 (elliptic sequence) . (V, p) を正規2次元特異点であって $P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ であるとせよ。resolution $\gamma: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ with $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$ に対して reduced connected divisor on $\tilde{V}$ の集合 $\{B_i: i=1, \dots, l\}$ を次のような標準的な帰納的手続きで定める。(i) $B_1 := A$. (ii) B_i から B_{i+1} . まず $\hat{B}_i := \bigcup_{\substack{j=1 \\ m_i}}^m A_j$ と置き。そして $\hat{B}_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} D_{ij}$; (D_{ij} は $\hat{B}_i$ の連結成分) と分解せよ。ここでもし $P_a(\mathbb{Z}_{D_{ij}}) = 0$ $\forall j$ ならば"手続きは終わり"であり, $\{\mathbb{Z}_{B_1}, \dots, \mathbb{Z}_{B_l}\}$ を elliptic sequence と呼ぶ。また, もし $P_a(\mathbb{Z}_{D_{ij}}) = 1$ となる j が存在すれば, そんな j は丁度ひとつである (8.2) ので $B_{i+1} := D_{ij}$ とする。 $(A_i \cdot A_j)$ が負定値であり, B_i は B_i の真部分集合になるから, この操作は有限回で終わる。

4) 定理 $\gamma: (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を特異点 (V, p) の resolution とし $P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ であり, $\{\mathbb{Z}_{B_i}; i=1, \dots, l\}$ を $\tilde{V}$ 上の elliptic sequence とする。すると, $\{D: \text{non-zero effective divisor on } \tilde{V} \text{ such that (i) } |D| < A \text{ (ii) } D \cdot A_j \equiv 0 \forall j. \text{ (iii)}$

$P_a(D) = P_a \setminus = \left\{ \sum_{i=1}^k \mathbb{Z}_{B_i} ; k=1, \dots, l \right\}$ かつ, $\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{B_i}$ は $P_a(D) = 1$ となる $|D| < A$, $D > 0$ なる divisor の中で最大の元として特徴づけられる。

5) 注意 (i) minimal good resolution ψ に対しては, 我々の elliptic sequence は勿論, You の elliptic sequence と一致する。
(ii) 定理 (8.4) は次の有名な命題の証明を含んでいる。「

$P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ ならば $P_a = 1$ である。」なおこの命題は, Laufer や渡辺公夫によっても証明されているが, 筆者は Wagreich の original なアプローチを見ながら自分流に証明しているうちに定理 (8.4) にたどり着いてしまった。(iii) 定理により,

Laufer sequence [8] = elliptic sequence であることも容易に確かめることができる。なおこの等号は J. Stevens も証明している。

6) 命題 elliptic sequence は次の意味で invariant である。

$\tilde{V} \xrightarrow{\psi} V_{\geq p}$ ψ と ϕ を $P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ を満たす特異点 (V, p) の resolution とし, Γ で左図の様に結ばれているものとする。 $\{\mathbb{Z}_{B_i} ; i=1, \dots, l\}$ と $\{\mathbb{Z}_{B'_i}$

$; i=1, \dots, l'\}$ をそれぞれ $\tilde{V}$ と V' 上の elliptic sequence とする
と, $l = l'$ であり, かつ $\Gamma^{-1}(\mathbb{Z}_{B'_i}) = \mathbb{Z}_{B_i}$ $\forall i$ である。

7) 定理 (You [17, 18]) $P_a(\mathbb{Z}_0) = 1$ である特異点 (V, p) に対して $P_g \leq \# \{ \text{elliptic sequence } \{\mathbb{Z}_{B_i} ; i=1, \dots, l\} \} = l$ である。

ある。

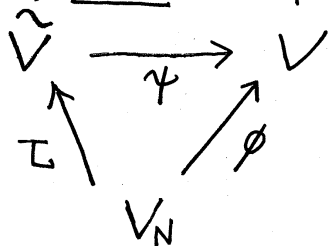
§9 Z.C.R. と minimal resolution の関係

1) 2次元正則 Gorenstein 特異点 (V, p) の Z.C.R. が (6.2) の(*)の条件を満たす blowing-up の合成で得られたとせよ ($p_a = 1$ であることは仮定しない)。その時、次の p_g 個の点に名前を付けることにする。

定義 上のような時、次の normal point q を starting point (出発点) と呼ぶ。(i) (V, p) (ii) $q \in V_{j_h}$ であって $p_q(V_{j_h}, \mathfrak{f}) \neq 0$ であるもの。 ||

そして、index の集合 $\{i_1 < \dots < i_{p_g}\} \subset \{1, \dots, N\}$ の部分集合であって、 ψ_{i_h} が blowing-up at starting point であるようなものとなるように定める。この定義により、
 $1 = i_1 = j_1, \dots, i_M = j_M = M, i_h < j_h$ for $h \geq M+1$ である。また $i_h = j_{h-1} + 1$ for $h = 2, \dots, p_g$ であることも明らかである。このような index を用いて、我々の結果を述べよう。

2) 定理 (V, p) を正則 2次元 Gorenstein 特異点であって



$p_a = 1$ であるものとし、左の可換図式を考える。ここで ψ は minimal resolution of (V, p) , $\phi: V_N \rightarrow V$

は定理 (6.2) によつて得られた $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ の blowing-up τ の分解として τ は $\phi \neq \tau \circ \tau$ を満たす morphism である。 $\tilde{V}$ 上の elliptic sequence $\varepsilon \{ \mathbb{Z}_{B_i}; i=1, \dots, l \}$, V_N 上の divisors $\{ W_i; i=1, \dots, N \}$ ε 87 で定義したものとする。この時、
 (i) 整数の列 $1 \leq k_1 < \dots < k_{p_3} = l$ が存在して、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_1} \mathbb{Z}_{B_i} &= \tau_* (W_{i_1}) = \dots = \tau_* (W_{j_1}) \\ \sum_{i=k_{h-1}+1}^{k_h} \mathbb{Z}_{B_i} &= \tau_* (W_{i_h}) = \dots = \tau_* (W_{j_h}) \\ \sum_{i=k_{p_3-1}+1}^{k_{p_3}} \mathbb{Z}_{B_i} &= \tau_* (W_{i_{p_3}}) = \dots = \tau_* (W_{j_{p_3}}) \end{aligned}$$

(ii) 更に, $k_{p_3-1} = l-1$, すなわち $\tau_* (W_{i_{p_3}}) = \dots = \tau_* (W_{j_{p_3}})$ は $(\tilde{V}, A)$ 上の minimal elliptic cycle に一致する。

3) 系 上の situation に於いて, length of the elliptic sequence $l = p_3$ (この場合, (V, p) は maximally elliptic singularity と呼ばれる (極大楕円型特異点)) ならば

$\mathbb{Z}_0 = \tau_* (W_1)$ (すなわち maximal ideal cycle) である。//

更に, 次の定理も比較的容易に証明できる。

4) 定理 (V, p) を 2 次元正規 Gorenstein 特異点であって $p_a = 1$ を満たすものとし, $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ を minimal resolution, そして $\tilde{V}$ 上の divisor E を minimal elliptic cycle であるとせよ。この時, (i) Z.C.R. of (V, p) が minimal resolution を与える為の必要十分条件は $E^2 \leq -2$ であることである。(ii) (V, p) が absolutely isolated singularity (すなわち, Z.C.R. における normalization がすべて trivial なもの) である為の必要十分条件は $E^2 \leq -3$ であることである。 //

5) ここで述べられた statement の原型は Laufer の minimally elliptic singularity に対する仕事にある (Th. 3.13, Th. 3.15 [6])。それは, Stephen Yau により更に一般的な $p_a = 1$ なる特異点の研究に拡張された ([14] にあげた Yau の諸文献を参照)。彼等の method と我々の method の間には共通する部分もあるがハード analysis の部分で根本的に相違がある。彼らは, resolution 多様体上の cohomology 群に対して, いわゆる Laufer type vanishing theorem と呼ばれる numerical なアプロach を行う (Chapter II [7])。我々は, 局所環 $\mathcal{O}_{V,p}$ の invariant (例えば Hilbert-Samuel 関数, reduction exponent) に関する解析 (J. Sally 等による) を基礎としている。

III 関係式 $L = P_g$ を満たす 2 次元正規 Gorenstein 特異点の resolution process の言葉による特徴づけ.

§ 10. I でとりあげた $L = P_g$ を満たす特異点 (3.4) を II の理論を基礎にして解析する。(我々は $P_g \neq 0$ である場合に興味がある.)

1) 定理 (V, p) を正規 2 次元 Gorenstein 特異点であるとせよ。すると次の 4 条件は同値である。

(i). $L(V, p) = P_g(W, p)$ である ((3.4) を見よ).

(ii) - 1. (V, p) の Z.C.R. は (6.2) (*) の条件を満たす blowing-up の合成で得られ, 更に L, p ($\dim L = \dim {}^m V / {}^m W = p$ とする。) の regular parameter system $(x_1, \dots, x_p)$ があって, 超平面 $\{x_i = 0\}$ の strict transform がすべての starting point を通る. for $i = 2, \dots, p$.

(ii) - 2. (V, p) の Z.C.R. は (6.2) (A) の条件を満たす blowing-up の合成で得られ, 更に L 内に smooth curve ℓ が存在して, その strict transform 上にすべての starting point はのる。

(ii) - 3. (V, p) の Z.C.R. は (6.2) (*) の条件を満たす blowing-up の合成で得られ, 更に $P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$ をすべての starting point とすると, index 集合の関係式

$$\{j \in \{1, \dots, i-1\} \mid P_i \subseteq (\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_j)^{-1}(\Gamma_j) \text{ in } V_{i-1}\}$$

$= \{i-1\}$ が i_{P_2} 以下の i について成立する。

2) 極大楕円型特異点が $L=P_2$ を満たすことは系(9.3)と(3.4)よりわかるから、上の定理が適用できる。

この他、 $L=P_2$ を満たす特異点について、筆者が得て来た結果及び observation 等は [1], [2], [3] を見て下さい。ここでは、残りの部分を定理の証明にあてる。

§11. 定理(10.1) の証明 (その1)

1) (ii)-2 $\Rightarrow$ (ii)-1 $\mathcal{L}_2 \in \mathcal{O}_L$ -ideal sheaf であって $\mathcal{L}$ を定めるものとする。 $x_2, \dots, x_p$ を p における $\mathcal{L}_2$ の minimal generator とすると, strict transform の定義 (chapter IV [47]) により $\{x_i=0\}$ の strict transform $\supseteq \mathcal{L}$ の strict transform が各 stage で成立する。

2) (ii)-1 $\Rightarrow$ (i) 定理(6.2)(*)の条件を満たす blowing-up の合成による resolution $V_N \longrightarrow V$ について, $x_1, \dots, x_p$ を (ii)-1 のような $\mathcal{O}_{L,p}$ の regular system parameter とする。 V_N 上定まる divisor $\text{div}((\psi_1 \cdots \psi_k)^*(x_i))$ について $\text{div}((\psi_1 \cdots \psi_k)^*(x_i)) \geq \sum_{h=1}^{P_2} W_{i,h}$ が $i=2, \dots, p$ について成立するが, $W_{i,h} \geq W_{j,h}$ に注意して定理(7.1)により, 関係式 $\text{div}((\psi_1 \cdots \psi_k)^*(x_i)) + K_{V_N} \geq 0$ が $i=2,$

..., p について成立する。 $V-p$ 上の nowhere vanishing 正則 2 形式 ω をひとつとり, 固定して, $H_*^1(V, \Omega_V^2) = \mathcal{O}_V \cdot d\omega = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p] \cdot d\omega$ と書くと, $x_i \cdot d\omega = 0$ が $i=2, \dots, p$ について, 上で示されたので, $H_*^1(V, \Omega_V^2) = \mathbb{C}[x_1] d\omega$ となる。

3) 以下この δ は (i) $\Rightarrow$ (ii)-3 の証明に用いられる。

Yam の定理 (1.8) により $P_n(V, p) = 1$ であり, 定理 (6.2) の (*) を満たす resolution として Z, C, R が得られる。

$$U = U_0 \leftarrow U_1 \leftarrow \cdots \leftarrow U_N$$

$$\cup \quad \cup \quad \psi_i \quad \cup \quad \psi_N \quad \cup$$

$$V = V_0 \leftarrow V_1 \leftarrow \cdots \leftarrow V_N.$$

ここで U_i 上の divisor $\psi_i^{-1}(\Gamma_i) \in \Theta_i^{(1)}$, として U_j における σ の strict transform を $\Theta_i^{(j)}$ ($j > i$) と書く。

議論を算術的にする為に index 集合 $\Lambda_i \in \Lambda_i = \{j \in \{1, \dots, i-1\} \mid \Gamma_i \subseteq \Theta_j^{(i-1)} \text{ in } U_{i-1}\}$, として 整数の集合

$$\{S_i^{(j)}; i, j \in \{1, \dots, N\}\} \in \quad \underline{S_i^{(j)} = 0 \quad i < j},$$

$$\underline{S_i^{(i)} = 1, \quad S_i^{(j)} = \sum_{k \in \Lambda_i} S_k^{(i)} \quad i > j}, \quad \text{として定める。}$$

我々は $\Lambda_i = \{i-1\}$ が i_B 以下の i について成立すること示したいのであるが, 次の事実は容易にチェックできる。

4) 補題 整数 i_0 in $\{1, \dots, N\}$ について, 次の3

条件は同値である。(i) $\Lambda_i = \{i-1\}$ for $i \leq i_0$. (ii) $S_i^{(1)} = 1$ for (i, j) such that $1 \leq j \leq i \leq i_0$. (iii) $S_{i_0}^{(1)} = 1$.

5) 一般に V_N 上の divisor W_i は $W_i = \left(\sum_{j=1}^N S_j^{(i)} \cdot \theta_j^{(N)} \right) |_{V_N}$ と表わされる。だから、定理(7.1)により $-K_{V_N} = \sum_{k=1}^{p_g} \left(\sum_{i=1}^N S_i^{(j_k)} \cdot \theta_i^{(N)} \right) |_{V_N} = \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{k=1}^{p_g} S_i^{(j_k)} \right) \cdot \theta_i^{(N)} \right) |_{V_N}$

となる。そこで、整数の集合 $\{l_i; i=1, \dots, N\}$ を

$l_i = \min \left\{ d \in \mathbb{Z} \mid \sum_{k=1}^{p_g} S_i^{(j_k)} \leq d \cdot S_i^{(1)} \right\}$ for $i=1, \dots, N$ として定めよう。すると、(3.2)の表示 $-K_{V_N} = \sum_{i=1}^N l_i \cdot W_i$ に気をつければ、不等式 $-K_{V_N} \leq d \cdot W_1$ に気がつけば、不等式 $L(V, p) \leq$

$\max_{1 \leq i \leq N} l_i$ の成り立ちがわかる。また、次の事実は容易に確かめることができる。

6) 補題 (i) $l_1 = 1$ (ii) $i \notin \{j_1, \dots, j_{p_g}\}$ ならば、 $\max_{1 \leq j \leq i} l_j = \max_{1 \leq j \leq i-1} l_j$ である。(iii) $i \in \{j_1, \dots, j_{p_g}\}$ ならば $\max_{1 \leq j \leq i} l_j \leq \max_{1 \leq j \leq i-1} l_j + 1$ である。特に、 $\max_{1 \leq j \leq N} l_j \leq p_g(V, p)$ が成り立つ。

7) これより $L = p_g$ ならば $p_g = \max_{1 \leq j \leq N} l_j$ として、 $\max_{1 \leq j \leq j_k} l_j = k$ for $k=1, \dots, p_g$ が成り立つ。これは $l_{j_k} = k$ for $k=1, \dots, p_g$ であることと等しく、これから、

$S_{i_k}^{(1)} = 1$ for $k=1, \dots, p_g$ と k についての帰納法により証明しよう。まず、 $k=1$ については定義により $S_{i_1}^{(1)} =$

$S_1^{(1)} = 1$ である。次に、ある整数 $\mu (\geq 1)$ に対して $S_{i_\mu}^{(1)} = 1$ が成立したと仮定せよ。補題(11.4) により $\Lambda_i = \{i-1\}$ for $i \leq i_\mu$ である。 $S_{i_\mu}^{(1)} = \dots = S_{i_\mu}^{(i_\mu)} = 1$ であり、また $i_\mu \leq \beta \leq j_\beta$ なる β に対して $\Lambda_\beta \subseteq \{i_\mu, i_\mu+1, \dots, N\}$ である。 $\{S_i^{(i)}\}$ の定め方により、 $\alpha \leq i_\mu$ か $i_\mu \leq \beta \leq j_\beta$ である (α, β) について $S_\beta^{(\alpha)} = S_\beta^{(1)}$ がわかる。特に $l_{j_{\mu+1}}$ の計算は

$$\begin{aligned} l_{j_{\mu+1}} &= \min \left\{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid \sum_{j=1}^{p_\alpha} S_{j_{\mu+1}}^{(j_\mu)} \leq \alpha \cdot S_{j_{\mu+1}}^{(1)} \right\} \\ &= \min \left\{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid (\mu-1)S_{j_{\mu+1}}^{(1)} + S_{j_{\mu+1}}^{(j_\mu)} + 1 \leq \alpha \cdot S_{j_{\mu+1}}^{(1)} \right\} \end{aligned}$$

となる。よって $l_{j_{\mu+1}} = \mu+1$ となるのだから、 $S_{j_{\mu+1}}^{(j_\mu)} \geq S_{j_{\mu+1}}^{(1)}$ であるなければならない。一般には $S_\beta^{(\alpha)} \leq S_\beta^{(1)}$ for $\alpha \geq 1$ であるから $S_{j_{\mu+1}}^{(j_\mu)} = S_{j_{\mu+1}}^{(1)}$ が成立する。ゆえに $\sum_{h \in \Lambda_{j_{\mu+1}}} S_h^{(j_\mu)} = \sum_{h \in \Lambda_{j_{\mu+1}}} S_h^{(1)}$ である。やはり $S_h^{(j_\mu)} \leq S_h^{(1)}$ であることにより、 $S_h^{(j_\mu)} = S_h^{(1)}$ for $h \in \Lambda_{j_{\mu+1}}$ である。(特に $j_{\mu+1}-1 \in \Lambda_{j_{\mu+1}}$ に気をつけて) この議論をくり返して、等式 $S_h^{(j_\mu)} = S_h^{(1)}$ for h such that $j_\mu \leq h \leq j_{\mu+1}$ が得られる。特に $i_{\mu+1} = j_\mu + 1$ に気をつけて $S_{i_{\mu+1}}^{(1)} = S_{i_{\mu+1}}^{(j_\mu)} = S_{j_{\mu+1}}^{(j_\mu)} = \sum_{h \in \Lambda_{j_{\mu+1}}} S_h^{(j_\mu)} = S_{j_\mu}^{(j_\mu)} = 1$ である。

§12. 定理(10.1)の証明(その2) (ii)-3 $\Rightarrow$ (ii)-2.

もう少し一般に, 次の situation で命題を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \square = \square_0 & \xleftarrow{\psi_1} & \square_1 & \xleftarrow{\quad} & \cdots & \xleftarrow{\psi_R} & \square_R \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & & \Psi & \end{array}$$

ここで $\square_i$ は n 次元多様体であり, $\psi_i: \square_i \rightarrow \square_{i-1}$ は non-singular subvariety Γ_i of $\square_{i-1}$ であり, そして Ψ は $\psi_1, \dots, \psi_R$ の合成とする。記号 $\Theta_i^{(r)}$ や Δ_i は §11 と同様に定義する。主張 (ii)-3 $\Rightarrow$ (ii)-2 より一般的な次の事が成り立つ。

1) 定理 上の situation で条件 $\Delta_i = \{i-1\}$ が k 以下の i で成り立っており, $\bigcup_{i=1}^{R-1} \Theta_i^{(R)}$ に含まれない $\Theta_R^{(R)}$ の点 p が与えられているとせよ。すると $\Psi(p)$ の近傍において smooth curve ℓ in $\square$ があって, ℓ の $\square_R$ における strict transform が p を通る。特に任意の $\square_i$ において, この ℓ の strict transform が p の image を通る。 //

2) 以下この定理の証明を行う。 $\square_{i-1}$ の点 $(\psi_1 \cdots \psi_R)(p)$ を p_i と書く。話は $|\Psi^{-1}(\Psi(p))|$ の近傍に限られる。smooth curve $\tilde{\ell}$ in $\square_R$ であって次の条件が成り立つものをとる。

$$\tilde{\ell} + \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}} = \mathcal{M}_p \text{ in } \mathcal{O}_{\square_R, p}.$$

我々は $\Psi_*(\tilde{\ell})$ が $\square$ 内の smooth curve を定めることを証明したいのだ。その為

Claim (i) $\psi_{R*}(\tilde{\ell})$ は p_R を通る $\square_{R-1}$ 内の smooth curve を定める。 (ii) $\psi_{R*}(\tilde{\ell}) + \mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} = \mathcal{M}_{p_R}$ in $\mathcal{O}_{\square_{R-1}, p_R}$

(iii) $P_R \notin \bigcup_{i=1}^{R-2} \Theta_i^{(R-1)}$ 勿論. $P_R \in \Theta_{R-1}^{(R-1)}$ //

それらが, 我々の仮定から導かれれば, 明らかに Step by Step に L_{i-1} 内に smooth curve が定まり, 我々の定理を得る。

3) 補題 $R^1\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} \cdot (\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}})^{\vee}) = 0$ for $\nu \geq 0$.

証明は省略する。

4) Claim (i) の証明 位相的には, $\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}})$ と $\tilde{L}$ は同型である。そして補題により $0 \rightarrow \mathcal{O}_{L_{R-1}}/\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}}) \rightarrow \psi_{R*}(\mathcal{O}_{L_{R-1}}/\mathcal{L}_{\tilde{L}}) \rightarrow 0$ を得る。(完全列) ゆえに, $\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}})$ の定める curve は $\tilde{L}$ と同型であり smooth である。

5) Claim (ii) の証明 まず議論を maximal ideal が center となる場合に帰着させる。 $\tilde{L}$ のとり方より $\mathcal{L}_{\tilde{L}} \cap \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}} = \mathcal{L}_{\tilde{L}} \cdot \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}$ が成立する。ゆえに補題の $\nu = 1$ の場合に当てつけて 完全列

$$0 \rightarrow \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} \cap \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) \rightarrow \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}}) \oplus \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) \rightarrow \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} + \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) \\ \rightarrow R^1\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} \cap \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) = R^1\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} \cdot \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) = 0$$

が従うが, $\tilde{L}$ のとり方より $\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}} + \mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) = \mathcal{M}_{P_R}$ であり

$$\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}} \cap \mathcal{L}_{\tilde{L}}) = \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) \cap \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}}) \quad (\text{Lemma (1.6)})$$

[14]) であるから $\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\tilde{L}}) + \psi_{R*}(\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) = \mathcal{M}_{P_R}$ である。

そして $\psi_{R*}(\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}}) = \mathcal{M}_{P_R}$ である。

ゆえに, center P_R の次元を k とすると, P_R における $\mathcal{O}_{L_{R-1}}$ の regular parameter system $u_1, \dots, u_m$ を

$\mathcal{L}_{\Theta_R^{(R)}} = u_1 \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$, $\mathcal{L}_{P_R} = (u_1, \dots, u_{m-k}) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$, として
 $\mathcal{V}_R^*(\mathcal{L}) \supseteq (u_{m-k+1}, \dots, u_m) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}}$ が成立するよう
 にとれる。($u_{m-k+1}, \dots, u_m$) で定義される U_{R-1} の部分多様体
 ΣA とし, その $\mathcal{V}_R$ による strict transform $\Sigma(A)$, とする。
 $\mathcal{V}_R(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$ によって定まる curve $\Sigma \mathcal{L}'$, として, $\mathcal{V}_R$ によ
 る strict transform ($\mathcal{L}$ の Σ とたが) $\Sigma(\mathcal{L})$, と書くとき,
 $\mathcal{L}' \subset A$ であり, $(\mathcal{L}'), \cap (A \cap \Theta_{R-1}^{(R-1)}) \subseteq \mathcal{L} \cap \Theta_{R-1}^{(R)} = p$ が
 仮定より従う。 A に制限して Claim(ii) が言えれば, (すなわち
 $\mathcal{L}' + (u_{m-k+1}, \dots, u_m) \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}} + u_1 \cdot \mathcal{O}_{U_{R-1}} = \mathcal{M}_{P_R}$ が証
 明できれば) $\mathcal{L}' + \mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} = \mathcal{M}_{P_R}$ がしたがう。 A に制限
 すると blowing-up の center は $\mathcal{L}_{P_R} + (u_{m-k+1}, \dots, u_m) = \mathcal{M}_{P_R}$
 である。

ゆえに, はじめから $\mathcal{L}_{P_R} = \mathcal{M}_{P_R}$ と仮定して証明する。 $p \notin \Theta_{R-1}^{(R)}$
 だから $\Theta_{R-1}^{(R)} \cap (\mathcal{L} \cap \Theta_R^{(R)}) = \text{Proj} (\text{gr}_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) / \text{gr}_m(\mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} + \text{gr}_m(\mathcal{L}')))$
 は空集合である。ゆえに $\text{gr}_m(\mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}}) + \text{gr}_m(\mathcal{L}')$ は
 $\text{gr}_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}})$ と T.N.-isomorphic である。とこから, $\text{gr}_m(\mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}})$
 と $\text{gr}_m(\mathcal{L}')$ は 互いに degree 1 の元で生成されているので
 $m \cdot \text{gr}_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) = \text{gr}_m(\mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}}) + \text{gr}_m(\mathcal{L}')$ であり,
 $m \cdot \text{gr}_m(\mathcal{O}_{U_{R-1}}) = \text{gr}_m(\mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} + \mathcal{L}')$ が成立する。ゆえ
 に $\mathcal{M}_{P_R} = \mathcal{L}_{\Theta_{R-1}^{(R-1)}} + \mathcal{L}'$ である (Lemma 6 of Chapter II
 [4])。

6) Claim (iii) の証明. 我々は $j \leq R-2$ なる j を固定する。仮定より divisor $\Theta_j^{(R-1)}$ は P_R を含まない。ゆえに $\Theta_j^{(R-1)}$ の γ_R による strict transform は total transform に一致する。 $P \notin \Theta_j^{(R)}$ であるから $P_R \notin \Theta_j^{(R-1)}$ がこれより従う。

以上で定理 (10.1) の証明終。

(1.6) の (iv) について. 講演では、もう少し強く、「 $p_a \geq 1$ の時、 p_a を fix して、 p_g はいくらでも大きくなり得る」と言ったが、実は、わかっていない事であった。p3 の形に訂正します。

文献表

- [1] Artin, M.: Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces. Amer. J. Math. 84, 485-496 (1962)
- [2] ———: On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math., 88, 129-136 (1966).
- [3] Hidaka, F., Watanabe, Kei-i.: Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor Tokyo J. Math., 4, 319-330 (1981).
- [4] Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. II. Ann. Math.,

- 79, 109 - 326 (1964).
- [5] Laufer, H. B.: On rational singularities. Amer. J. Math., 94 (1972) 597 - 608.
- [6] _____: On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math., 99, (1977) 1257 - 1295.
- [7] Lipman, J.: Rational singularities ---. Publ. I.H.E.S. 36. 195 - 279 (1969).
- [8] Ohyanagi, S., Yoshinaga, E.: A criterion for 2-dimensional normal singularities to be weakly elliptic, Science reports of Yokohama National Univ. Ser II. vol 26, 5-7 (1979).
- [9] Reid, M.: Canonical 3-folds, Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979, "Algebraic geometry" edited by A. Beauville, Stijthoff and Noordhoff, 273-310 (1980).
- [10] Serre, J. P.: Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9 - 26 (1955).
- [11] Tomari, M.: A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $p_2 \leq 1$, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 20., 1-26 (1984).
- [12] _____: 幾何種数の計算公式と楕円型特異点について, 数理研講究録 474, (1982) 98-116.
- [13] _____: On resolution process of normal Gorenstein

- surface singularity with $p_a \leq 1$, Proc. Japan Academy 59
No 5. 211 - 213 (1983).
- [14] _____: A p_3 -formula and elliptic singularities.
preprint R.I.M.S. No 458 (October 1983).
- [15] Weigreich, P.: Elliptic singularities of surfaces, Amer. J.
Math., 92, 419 - 454 (1970).
- [16] Watanabe Kimi.: On plurigenera of normal isolated singularities
I. Math. Ann., 250, 65 - 94 (1980).
- [17] Yau, Stephen, S.-T.: On maximally elliptic singularities,
Trans. Amer. Math. Soc., 257, 269 - 329 (1980).
- [18] _____: On strongly elliptic singularities,
Amer. J. Math., 101, 855 - 884 (1979).