

球面上の Spherical Fibre Space の連結和について

東京工大(理) 山口耕平 (K. Yamaguchi)

§1 Introduction

Poincaré duality の成立する有限複体は Poincaré complex と言われる。たとえば、多様体はそうであり、その点においても、Poincaré complex のホモトピー型を分類することは、大変興味ある問題と思われる。ここでは、十分連結性の高い Poincaré complex について考える。

今、単連結な Poincaré complex M で、その homology 群が、次の形のものをとる。

$$H_i(M; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0, n+m) \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ 個}} = r\mathbb{Z} & (i=n, m) \\ 0 & (\text{その他の } i) \end{cases}$$

(ただし $n < m-1$)

とくに、 M が滑らかな閉多様体の場合には、Wall,

田村, 石本により、適当な条件のもとで、 M は r 個の m 次元球面 S^m 上の n 次元球面バンドルの、連結和に微分同相になる。したがって、この場合には、 M のホモトピー型の分類は、球面上の球面バンドルの連結和の分類に帰着する。そこで、その一般化として、球面上の spherical fibre space の連結和のホモトピー型を分類することを、本論の目的とする。

§2 定義と結果

M_1, M_2 を p 次元 Poincaré complex とするとき、disk theorem より、 $M_i \simeq K_i \cup_{\alpha_i} e^p$ --- (*)

(ただし $\alpha_i \in \pi_{p-1}(K_i)$, K_i は $(p-1)$ 次元以下の次元の有限複体; $i=1, 2$) の形に (up to homotopy) で

かける。このとき、Poincaré complex M_1, M_2 の連結和

$$M_1 \# M_2 \text{ を, } M_1 \# M_2 = (K_1 \vee K_2) \cup_{\alpha_1 \# \alpha_2} e^p$$

と定義する。(この定義は (*) の形によらず、up to homotopy で well-defined である; Wall [12])

$$\text{今, } SG_n = \{ f: S^n \rightarrow S^n \text{ 連続写像} \mid \text{degree } 1\text{-map} \}$$

$$F_n = \{ f \in SG_n \mid f \text{ は based map} \}$$

$$j_n: F_n \hookrightarrow SG_n: \text{inclusion map}$$

$$(\text{とくに, } J \circ \partial' = -P, \quad E \circ J = -J \circ \partial'_*)$$

$$\text{今, } \chi(X) = j_{n*}(\xi) = j_{n*}(\xi') \quad (\xi, \xi' \in \pi_{m+1}(F_n)) \text{ と,}$$

(2.1) か, 2 通りに書けたと仮定すると Fig. Q.2) より,

$$\xi - \xi' = \partial(x) \quad (\exists x \in \pi_m(S^n)) \text{ とおける。}$$

$$\text{よって, } \lambda(\xi) - \lambda(\xi') = \lambda(\xi - \xi')$$

$$= P(x) = [x, L_n]$$

したがって, $\lambda(\xi)$ は $\text{mod } P\pi_m(S^n)$ で, 一意的に決まる。そこで, James-Whitehead invariant $\lambda(X)$ を,

$$(2.3) \quad \lambda(X) = [\lambda(\xi)] \in \pi_{m+1}(S^n) / P\pi_m(S^n)$$

と定義できる。

この不変量 $\lambda(X)$ について, 次はよく知られる。

定理 2.4. (I.M. James - J.H.C. Whitehead [3], S. Sasao [5])

$2n \geq m+2$ とし, X_1, X_2 を, cross-section を持つ, S^m 上の orientable n -spherical fibre space とする。

このとき,

$$X_1 \simeq X_2 : \text{same homotopy type}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(X_2) = \pm \lambda(X_1)$$

この定理の一般化として, 我々は次の定理を得る。

定理 A

$$2n \geq m+2 \text{ とし, } \left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_r \\ X'_1, X'_2, \dots, X'_r \end{array} \right\} \text{ は, cross-section}$$

を持つ, $2r$ 個の S^m 上の orientable n -spherical fibre space とする。

このとき、

$$\#_{i=1}^r X'_i \simeq \#_{i=1}^r X_i : \text{ same homotopy type}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda(X'_1) \\ \lambda(X'_2) \\ \vdots \\ \lambda(X'_r) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(X_1) \\ \lambda(X_2) \\ \vdots \\ \lambda(X_r) \end{bmatrix} \quad \exists A \in GL(r, \mathbb{Z})$$

(ただし, $\pi_{m+1}(S^m)/p\pi_m(S^m)$ を左 $\mathbb{Z}$ -module と考える)

とくに、球面上の球面バンドルの場合を考えると、

定理 B (H. Ishimoto [2], K. Yamaguchi [14])

$$2n \geq m+2 \text{ とし, } \left. \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_r \\ X'_1, X'_2, \dots, X'_r \end{array} \right\} \text{ は, cross-section を持つ}$$

$2r$ 個の S^m 上の n 次元球面バンドルとする

このとき、

$$\#_{i=1}^r X'_i \simeq \#_{i=1}^r X_i : \text{ same homotopy type}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \lambda(x_1') \\ \lambda(x_2') \\ \vdots \\ \lambda(x_r') \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \lambda(x_1) \\ \vdots \\ \lambda(x_r) \end{bmatrix} \quad (\exists A \in GL_r(\mathbb{Z}))$$

(ただし, $\mathbb{Z}\pi_m(SO(n))/p\pi_m(S^n)$ は, 左 $\mathbb{Z}$ -module と考える)

§3 The group of self-homotopy equivalences $\mathcal{E}(X)$

基点付きの位相空間 $X=(X, x_0)$, $Y=(Y, y_0)$ に対して,
ホモトピー-集合 $[X, Y]$ を,

$$[X, Y] = \{ f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \} / \sim \quad (\sim: \text{homotopy})$$

とおく。とくに $X=Y$ のとき, $[X, X]$ は写像の合成により,
1) $1_X = [\text{id}_X]$ を単位元とする monoid となる。そこで,

$[X, X]$ の元で可逆元全体のつくる群を, $\mathcal{E}(X)$ とする:

$$\mathcal{E}(X) = \{ [f] \in [X, X] \mid f \text{ は homotopy equivalence} \}$$

次のことに注意する。
に

命題 3.1 (Homotopy theory)

$$X = K \cup_{\alpha} e^p$$

$$Y = K \cup_{\beta} e^p$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha, \beta \in \pi_{p-1}(K) \\ K \text{ は } \dim K \leq p-2 \text{ の CW-complex} \\ K: 1\text{-connected} \end{array} \right)$$

このとき,

$$X \simeq Y: \text{homotopy 同値} \iff \exists \theta \in \mathcal{E}(K); \theta \circ \alpha = \pm \beta$$

したがって、定理 A (または定理 B) を証明するには、ある適当な複体 K の $\Sigma(K)$ を求め、その homotopy 群 $\pi_{p-1}(K)$ への作用

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} \Sigma(K) \times \pi_{p-1}(K) & \longrightarrow & \pi_{p-1}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\theta, \alpha) & \longmapsto & \theta \cdot \alpha \end{array}$$

を調べることに必要となる。我々の場合必要となる K は、次の形のものと十分である (See §4)

$$(3.3) \quad K = \bigvee_{i=1}^r K_i = \bigvee_{i=1}^r (S^n \vee S^m) \\ (\text{ただし } K_i = S^n \vee S^m \quad (1 \leq i \leq r))$$

そこで、各 $1 \leq i \leq r$ に対して、

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_i: S^n \longrightarrow S^n \vee S^m = K_i & : \text{inclusion map} \\ \xi_i: S^m \longrightarrow S^n \vee S^m = K_i & : \quad // \\ p_i: K_i = S^n \vee S^m \longrightarrow S^m & : \text{retraction map} \end{array} \right.$$

とおく。同様に、各 $1 \leq i, s \leq r$ について、

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{is}: K_i \longrightarrow K_s \\ \lambda_{is}: K_i \longrightarrow K_s \end{array} \right\} \Sigma.$$

$$\sigma_{is} = \text{identity}, \quad \lambda_{is} = \xi_s \circ p_i \quad \text{とおく。}$$

とくに、各空間 K_i は double suspension space であり、ホモトピー集合 $[K_i, K_s]$ は (track addition での) abelian group となり、 $2n \geq m+2$ とすると、 $[K, K]$ は (和は track

addition, 積は、写像の合成で定義すること) 非可換環となる。今、次のことに注意する。

命題 3.4 ([14] §, [4])

$$[K_A, K_S] \cong \mathbb{Z}\{\sigma_{AS}\} \oplus \mathbb{Z}\{\lambda_{AS}\} \oplus G_{AS}$$

$$\text{ただし } G_{AS} = i_S \pi_m(S^n) \circ p_A \cong \pi_m(S^n)$$

命題 3.5 ([14])

$$2n \geq m+2 \text{ のとき } [K, K] \cong \text{Mat}(r, [K_A, K_S])$$

よって、各元 $\Theta \in [K, K]$ は、次の形に一意的に書ける。

$$(3.6) \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1r} \\ \theta_{21} & & & \vdots \\ \vdots & \theta_{AS} & & \vdots \\ \theta_{r1} & \cdots & \theta_{rr} \end{bmatrix}$$

$$(\text{ただし } \theta_{AS} \in [K_A, K_S])$$

$$\theta_{AS} = a_{AS} \sigma_{AS} + b_{AS} \lambda_{AS} + g_{AS}$$

$$(a_{AS}, b_{AS} \in \mathbb{Z}; g_{AS} \in G_{AS})$$

そこで、このとき、 $(3r \times 3r)$ -行列 $F(\Theta)$ を、

$$(3.7) \quad F(\Theta) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{rr} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ g'_{r1} & g'_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \Pi_m(S^n)) \end{array} \right.$$

一般に.

$$\begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A'+B' & \Gamma' \\ 0 & 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'A & 0 & 0 \\ 0 & A'A+(B'A+AB'+B'B) & \tilde{\Gamma} \\ 0 & 0 & A'A \end{bmatrix}$$

$$(\text{ただし } \tilde{\Gamma} = (A'+B')\Gamma + \Gamma'A)$$

に注意すると, 各 abelian group G に對し, 次の $(3r \times 3r)$ -行列

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+B & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ただし} \\ \left\{ \begin{array}{l} A, B \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z}) \\ \Gamma \in \text{Mat}(r, G) \end{array} \right. \end{array}$$

全体のなす matrix ring $M(r; G)$ が定義できる。

とくに, 命題 (3.5) と (3.7) に注意すると, $2n \geq m+2$ とき group isomorphism

$$F: [K; K] \xrightarrow{\cong} M(r; \Pi_m(S^n))$$

が定義できる。実は, もっと強く, 次のことも言える。

定理 3.8 ([14])

$2n \geq m+2$ のとき、 F は、環の同型

$$F: [K, K] \xrightarrow{\cong} M(r; \pi_m(S^n)) \quad \text{§5.23.}$$

とくに、各非可換環 R に対して、その可逆元全体の
つくる群を $\text{Inv}(R)$ とおく：

$$\text{Inv}(R) = \{x \in R \mid \exists x^{-1} \in R\}$$

このとき、

系 3.9 ([14])

$2n \geq m+2$ のとき、 $\mathcal{E}(K) \cong \text{Inv}(M(r; \pi_m(S^n)))$

§4 定理の証明

今、 $X_1, \dots, X_r, X'_1, \dots, X'_r$ を定理 A の仮定を満足する
ように与える。まず次のことに注意する。

補題 4.1 (S. Sasao, [5])

各 X_α, X'_α は、次の形の cell 分解を持つ。

$$X_\alpha = K_\alpha \cup \rho_\alpha e^{n+m}$$

$$X'_\alpha = K'_\alpha \cup \rho'_\alpha e^{n+m}$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} p_n = i_n * \lambda(\delta_n) + [\xi_n, i_n] \in \Pi_{n+m-1}(K_n) \\ p'_n = i_n * \lambda(\delta'_n) + [\xi_n, i_n] \in \Pi_{n+m-1}(K_n) \\ \lambda(X_n) = [\lambda(\delta_n)], \lambda(X'_n) = [\lambda(\delta'_n)] \\ (1 \leq n \leq r) \end{cases}$$

したがって, $X = \#_{i=1}^r X_i$, $X' = \#_{i=1}^r X'_i$ とおくと,

$$(4.2) \quad \begin{cases} X = K \cup_p e^{n+m} \\ X' = K \cup_p e^{n+m} \end{cases}$$

ただし,

$$p = \sum_{n=1}^r j_n * p_n, \quad p' = \sum_{n=1}^r j_n * p'_n \in \Pi_{n+m-1}(K)$$

($j_n: K_n \hookrightarrow K$: n -th factor $\wedge$ の inclusion map)

今, $\Theta = [K, K]$ を (3.6) の形の元とすると, 容易な計算により

$$(4.3) \quad \Theta \circ p = \sum_{s=1}^r j_{s*} \left(\sum_{n=1}^r a_{ns} i_{s*} \lambda(\delta_n) + \sum_{n=1}^r a_{ns} (a_{ns} + b_{ns}) [\xi_s, i_s] + \sum_{n=1}^r i_{s*} [g'_{ns}, \ell_n] \right)$$

(ただし $g_{ns} = i_s \circ g'_{ns} \circ p_n$, $g'_{ns} \in \Pi_m(S^n)$)

以上の準備のもとに, 定理 A を示す。

⇒: まず、 X と X' が、本モトと同一値であると仮定する。

命題 3.1 より、 $\exists \Theta \in \mathcal{E}(K); \quad \Theta \circ \rho = \pm \rho'$

よって、このとき、(4.2), (4.3) から、

$$\lambda(\delta'_s) \equiv \pm \sum_{n=1}^r a_{ns} \lambda(\delta_n) \pmod{P \Pi_m(S^n)} \quad (1 \leq s \leq r)$$

そこで、 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z})$ とおく。

$$\tau(\lambda(X'_1), \dots, \lambda(X'_r)) = A \cdot \tau(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_r))$$

よくに、 $\Theta \in \mathcal{E}(K)$ より、系 3.9 を用いると $A \in \text{GL}(r, \mathbb{Z})$

したがって前半は示された。

$$\Leftarrow: \text{逆に、} \tau(\lambda(X'_1), \dots, \lambda(X'_r)) = A \cdot \tau(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_r))$$

を満足する $A \in \text{GL}(r, \mathbb{Z})$ が、与えられたと仮定する。

今、 $A = (a_{ns})$ とおく。一般性を失うことなく、

$$(4.4) \quad \lambda(\delta'_s) = \sum_{n=1}^r a_{ns} \lambda(\delta_n) \quad (1 \leq s \leq r)$$

と仮定してよい。

各 $(r \times r)$ -行列 $B = [b_{ns}] \in \text{Mat}(r, \mathbb{Z})$ に対して、

$$\Theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_{r1} & \cdots & \theta_{rr} \end{bmatrix} \in [K, K] \quad \text{とおく。}$$

(ただし、 $\theta_{hs} = a_{hs} + b_{hs} \lambda_{hs} \in [K_h, K_s]$)

このとき、(4.3) により、

$$(4.5) \quad \theta_B \circ \rho = \rho' \iff \sum_{h=1}^r a_{hs} (a_{hs} + b_{hs}) = 1$$

($1 \leq \forall s \leq r$)

$$\iff {}^t A \cdot (A+B) = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$$

また、系 3.9 により、

$$(4.6) \quad \theta_B \in \Sigma(K) \iff A+B \in GL(r, \mathbb{Z})$$

そこで、 $A \in GL(r, \mathbb{Z})$ に注意して、 $B = ({}^t A)^{-1} - A$ とおくと、

$$\begin{cases} A+B \in GL(r, \mathbb{Z}) \quad \text{かつ,} \\ {}^t A(A+B) = E_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

したがって、(4.5), (4.6) により、 X と X' はホモトピー同値となる。

以上で定理 A は示された。

定理 B の証明は、そはや、定理 A の系にすぎない。

References.

- 1 P.Hilton and J.Roitberg : Note on quasifibrations and fibre bundles, Illinois J. Math., 15 (1971), 1-8.
- 2 H.Ishimoto : Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres I, II, Nagoya Math. J., 83 (1981), 15-36; Publ. RIMS. Kyoto Univ., 18 (1982), 307-324.
- 3 I.M.James and J.H.C.Whitehead : The homotopy theory of sphere bundles over spheres I, II, Proc. London Math. Soc., 4 (1954), 196-218; *ibid.*, 5 (1955), 148-166.
- 4 S.Oka : Groups of self-equivalences of certain complexes, Hiroshima Math. J., 2 (1972), 285-298.
- 5 S.Sasao : Homotopy types of spherical fibre spaces over spheres, Pacific J. Math., 52 (1974), 207-219.
- 6 L.Smith : Manifolds with few cells and the stable homotopy of spheres, Proc. A.M.S., 31 (1972), 279-284.
- 7 M.Spivak : Spaces satisfying Poincaré duality, Topology, 6 (1967), 77-101.
- 8 J.D.Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology, 2 (1963), 239-246.
- 9 B.Steer : Extensions of mapping into H-spaces, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 219-272.
- 10 R.Stöcker : Note on quasifibrations and manifolds, Proc. A.M.S., 43 (1974), 219-225.

- 11 I.Tamura : On the classification of sufficiently connected manifolds, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 371-389.
- 12 C.T.C.Wall : Poincaré complexes I, Annals of Math., 86 (1967), 213-245.
- 13 C.Wissemann Hartmann : Spherical fibrations and manifolds, Math. Z., 177 (1981), 187-192.
- 14 K.Yamaguchi : On the self-homotopy equivalences of the wedge of certain complexes, to appear in Kodai Math. J. (1983).
- 15 _____: Homotopy types of connected sums of spherical fibre spaces over spheres, preprint.