

可解多様体のファイバー束のドラムホモトピー

東京大学数理科学研究科 糟谷 久矢

Hisashi Kasuya

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo

1 目的

論文 [8] の内容に関して、論文内ではあまり説明されなかった観点から紹介し、さらにそこから考えられる新しい展望について紹介する。

2 背景：冪零ドラムホモトピー

ドラムホモトピー理論とは、多様体の微分形式を用いてホモトピーの情報を得る手法に関する理論である。最も重要な手法として、Sullivan の極小モデル理論がある。Sullivan はコホモロジー連結 ($H^0 \cong (\text{係数体})$) な微分を持つ次数付き代数 (DGA) に対して、コホモロジー同型を導く射を持つ”極小”な DGA が一意に存在する事を示した ([13])。この”極小”な DGA を Sullivan の極小モデルと呼ぶ。ドラムホモトピー理論では、多様体の微分形式がなす DGA (ドラム DGA) の Sullivan の極小モデルを考える。

M を単連結なコンパクト多様体とする。このとき、ドラム $DGAA^*(M)$ の Sullivan 極小モデル $\mathcal{M}_M = \bigwedge V^*$ に対して同型 $V^* \cong \text{Hom}(\pi_*, \mathbb{R})$ が成り立つ ([13])。また、 G を格子 Γ を持つ単連結冪零リー群とし、 $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。このとき、冪零多様体 G/Γ のドラム $DGAA^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルはリー環の $DGA \bigwedge \mathfrak{g}^*$ に同型である ([10], [6])。ここで、冪零多様体 G/Γ は Γ を基本群に持つ aspherical 多様体である。さらに冪零多様体 G/Γ 上の単連結なコンパクト多様体をファイバーに持つファイバー束

$$M \rightarrow E \rightarrow G/\Gamma$$

を考える。 G/Γ の基本群はファイバー M に冪零に作用していると仮定する。Halperin や Grivel の結果より ([5], [3])、 $A^*(E)$ の Sullivan の極小モデルは $\bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M}_M$ (ここで $\mathcal{M}_M$ 上の微分は $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ によって振られている)。

3 結果と展望：可解ドラムホモトピー

前章において、冪零な基本群を持つ多様体のドラム $DGA A^*(M)$ の Sullivan 極小モデルがホモトピーの良い情報を持っている事を見た。では、より一般的な場合である基本群が可解の場合にはどうだろうか。

単連結可解リー群 $G = \mathbb{R} \ltimes_{\phi} \mathbb{R}^2$ 、 $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ を考える。このとき、 G は格子 Γ を持つ。 G/Γ のドラム $DGA A^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルは $S^1 \times S^2$ の Sullivan 極小モデルと同型になる ([12])。ここで、 G/Γ は aspherical であり、その基本群 Γ は非可換な可解群である。よって、 $A^*(G/\Gamma)$ の Sullivan 極小モデルは G/Γ のホモトピーに関してよい情報を持っているとは言い難い。

Hain の DGA: X を多様体、 $\rho: \pi_1(X) \rightarrow T$ を X の基本群からダイアゴナルな代数群 T へのザリスキ稠密な像を持つ表現とし、 $\{E_{\alpha}\}$ を T の 1 次元表現全体から得られる X の平坦束の集合とする。このとき、直和 $A(X, \mathcal{O}_{\rho}) = \bigoplus A(X, E_{\alpha})$ は DGA となる。

私は [8] で次を示した。

定理: G を単連結可解リー群で格子 Γ を持つ者とする。表現 $\text{Ad}_{\mathfrak{s}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を G の随伴表現 Ad の (リーの定理による) 三角化の対角部分として定義する。この表現 $\text{Ad}_{\mathfrak{s}}$ に対して、Hain の $DGA A(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{\mathfrak{s}}})$ を考える。このとき、 $A(G/\Gamma, \mathcal{O}_{\text{Ad}_{\mathfrak{s}}})$ の Sullivan 極小モデルは、 G から定まる unipotent hull と呼ばれるあるユニポテン ト代数群 U_G (コメント (1) 参照) のリー環 $\mathfrak{u}_G$ の $DGA \bigwedge \mathfrak{u}_G^*$ と同型である。

Halperin や Grivel の結果を冪零ではないファイバー束上の Hain の DGA に関して拡張する事で次の予想を証明したい。

予想: 可解多様体 G/Γ 上の単連結なコンパクト多様体をファイバーに持つファイバー束

$$M \rightarrow E \rightarrow G/\Gamma$$

を考える。このとき、 Γ のダイアゴナルな表現 ρ をうまくとると Hain の DGA $A(E, \mathcal{O}_\rho)$ の Sullivan 極小モデルは $\bigwedge u_G^* \otimes \mathcal{M}_M$ となるだろう。

4 コメント、リマーク

(1) 単連結可解リー群 G に対して、次の条件を満たすような代数群 H_G が一意に存在する。([11]) :

- 単射 $i: G \rightarrow H_G(\mathbb{R})$ で像 $i(G)$ が Zariski-位相に関して H_G 内で稠密になる者が存在する。

- U_G を H_G の極大ユニポテント正規部分群とする。 $\dim U_G = \dim G$ が成り立つ。

- U_G に関する H_G の中心化群は U_G に含まれる。

このような代数群 H_G を algebraic hull と呼び、 U_G を unipotent hull と呼ぶ。

(2) ドラームホモトピー理論において、Sullivan の極小モデルと並んで重要な手法として、Chen の反復積分がある。 U_G は格子 Γ の Ad_s に関する Malcev 完備化と見る事ができ、Chen の反復積分の拡張である Exponential 反復積分で記述する事が出来る ([7])。

(3) 複素可解多様体の Dolbeault 理論へのアナロジーが得られる。([9])。

参考文献

- [1] Y. Félix, J. Oprea and D. Tanré, Algebraic Models in Geometry, Oxford Graduate Texts in Mathematics 17, Oxford University Press 2008.
- [2] M. Fernandez, and A. Gray, Compact symplectic solvmanifolds not admitting complex structures. Geom. Dedicata **34** (1990), no. 3, 295–299.
- [3] P. P. Grivel, Formes différentielles et suites spectrales, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 17–37.
- [4] R. M. Hain, The Hodge de Rham theory of relative Malcev completion. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 1, 47–92.
- [5] S. Halperin, Lectures on minimal models, Soc. Math. France **9–10** (1983).
- [6] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

- [7] H. Kasuya, Algebraic hulls of solvable groups and exponential iterated integrals on solvmanifolds. *Geom. Dedicata* DOI: 10.1007/s10711-012-9725-1.
- [8] H. Kasuya, Minimal models, formality and hard Lefschetz properties of solvmanifolds with local systems. To appear in *J. Differential Geometry*. <http://arxiv.org/abs/1009.1940>.
- [9] H. Kasuya, Dolbeault Cohomology of complex parallelizable solvmanifolds. <http://arxiv.org/abs/1207.3988>
- [10] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups.
- [11] M.S. Raghathan, Discrete subgroups of Lie Groups, Springer-verlag, New York, 1972.
- [12] J. Oprea, and A. Tralle, Symplectic manifolds with no Kähler structure. *Lecture Notes in Math.* 1661, Springer (1997).
- [13] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **47** (1977), 269–331 (1978).