

Regularity for pseudoconvex domains and CR manifolds

J. J. Kohn

1. Ω は $\mathbb{C}^n$ の擬凸有界領域であり、その境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 級の実超曲面であるものとする。 $L_2(\Omega)$ を Ω 上の複素数値二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間とし、

$$\mathcal{H} = \{h \in L_2(\Omega) \mid \bar{\partial}h = 0\}$$

とおく。 $\mathcal{H}$ は $L_2(\Omega)$ の閉部分空間である。直交射影

$$B : L_2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}$$

を Ω 上の Bergman 射影という。 $f \in L_2(\Omega)$ に対し

$$Bf = f - u$$

$$\iff u \perp \mathcal{H} \text{ かつ超関数の意味で } \bar{\partial}u = \bar{\partial}f$$

である。Bergman 射影の多変数関数論における一つの位置づけが Levi 問題との関連によって与えられる。実際、 $x \in \partial\Omega$ に対し、 x で特異点をもつ正則関数を Ω 上に作るには、 x の十分小さな近傍 U に対して $\Omega \cap U$ 上で正則で x を越えて解析接続でき

ない Ω 上の関数 f で $\bar{\partial}f$ が $\bar{\Omega}$ 上で C^∞ 級であるものを取り、方程式 $\bar{\partial}u = \bar{\partial}f$ の解 u で $\mathcal{H}$ に直交するものを求めてから $g = f - u$ とおけばよい。

上の u を f で表すには以下のようにする。(もちろん $u = f - Bf$ 以外の表し方が問題である。)

まず 2 階の楕円型微分方程式

$$\square \varphi := \bar{\partial} \bar{\partial}^* \varphi + \bar{\partial}^* \bar{\partial} \varphi = \alpha$$

を考える。ただし $\varphi, \alpha \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) := \{ \bar{\Omega} \text{ 上の } C^\infty \text{ 級 } (0,1) \text{ 形式} \}$ で、方程式は α に対して $\bar{\Omega}$ 上で $\bar{\partial}$ -Neumann 条件

$$\begin{cases} \varphi \wedge \bar{\partial} \bar{\Omega} = 0 \\ \bar{\partial} \varphi \wedge \bar{\partial} \bar{\Omega} = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

(ただし $\bar{\Omega}$ は Ω の定義関数) をみたす解 $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i d\bar{z}_i$ を求める問題である。

$\square \varphi = \alpha$ であれば、二次形式

$$Q(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) := (\bar{\partial} \tilde{\varphi}, \bar{\partial} \tilde{\psi}) + (\bar{\partial}^* \tilde{\varphi}, \bar{\partial}^* \tilde{\psi})$$

に対し

$$Q(\varphi, \psi) = (\alpha, \psi) \quad \forall \psi \in \text{Dom } \bar{\partial}^* \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$$

が成立する。 Ω の有界性と擬凸性から

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 \leq CQ(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \quad C \text{ は定数}$$

が従い、これより Hilbert 空間

$$L_2^{0,1}(\Omega) := \left\{ \sum_{i=1}^n f_i d\bar{z}_i \mid f_i \in L_2(\Omega) \right\}$$

上の作用素として $\square$ の逆にあたるノイマン作用素 N が定義される。

$\alpha = \bar{\partial}f$ のときには、 $u = \bar{\partial}^* N \alpha$ とおくと

$$u \perp \mathcal{H} \quad \text{かつ} \quad \bar{\partial}u = \square N \alpha = \bar{\partial}f$$

だから、 $Bf = f - \bar{\partial}^* N \bar{\partial}f$ となる。

Q に関する一定の条件の下で $\bar{\partial}^* N \bar{\partial}f$ が C^∞ 級であることを示すことができる。いわゆる楕円性条件

$$\|\varphi\|_1 \leq CQ(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \text{Dom } \bar{\partial}^* \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$$

は $n=1$ と同値なのでつまらない。従って Q の条件としては

$$\|\varphi\|_\varepsilon \leq CQ(\varphi, \varphi) \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

なる形のものが問題になる。周知の如くこのとき $\bar{\partial}^* N \bar{\partial}f$ は C^∞ 級で、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \iff \Omega \text{ は強擬凸}$$

である。但し Ω が複素曲線片を含む場合は上の評価式が成り立つような ε は存在しない。

p を Ω の境界点とする。 $\mathbb{C}^n$ における p のある近傍 U とある正数 ε, C に対し

$$\|\varphi\|_{\varepsilon}^2 \leq C Q(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \text{Dom } \bar{\partial}^* \cap C_0^{0,1}(U)$$

が成り立つとき、 p において ($\bar{\partial}$ 作用素に対する) 劣楕円型評価が成立するという。劣楕円型評価の成立条件を幾何学的に述べることができる。それは $\mathcal{A}$ 'Angelo の意味の型 (タイプ) によるものである。

定義 V を p を通る複素曲線片とするとき、

$$I_p(V, \partial\Omega) := \sup \{ \gamma \mid \exists C' \text{ s.t. } \forall q \in V \mid r(q) \leq C' |p - q|^{\gamma} \}$$

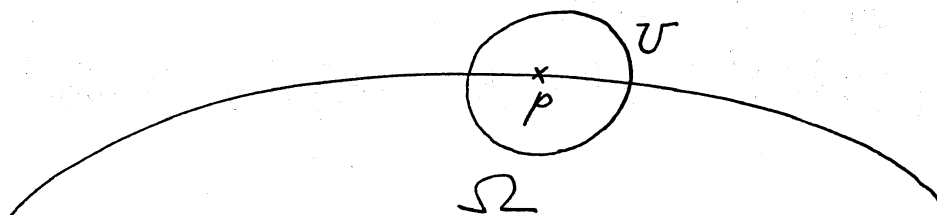
を p における V と $\partial\Omega$ の接触次数といい、

$$\sup \{ I_p(V, \partial\Omega) \mid V \text{ は } p \text{ を通る複素曲線片} \} < \infty$$

のとき p は ($\mathcal{A}$ 'Angelo の意味で) Ω の有限型の境界点であるという。

定理 1. ($\mathcal{A}$. Catlin)

p が有限型 $\iff p$ において劣楕円型評価が成立



乗数イデアル (multiplier ideal)

劣楕円型評価の代数的な成立条件を述べたい。そのために点 $p \in \partial\Omega$ における乗数イデアル $\mathcal{I} (= \mathcal{I}_p)$ を

$$\mathcal{I} = \{ f \mid f \text{ は } p \text{ における } C^\infty \text{ 級関数芽であり,}$$

$$\exists U \ni p, \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 \text{ s.t.}$$

$$\|f\varphi\|_\varepsilon^2 \leq C Q(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \text{Dom } \bar{\partial}^* \cap C_0^{\infty,1}(U) \}$$

により定義する。

予想 (または理想)

$$p \text{ において劣楕円型評価が成立} \iff 1 \in \mathcal{I}$$

定理 2. $\mathcal{I}$ は以下の性質をもつ。

$$(1) \quad \iota \in \mathcal{I} \text{ かつ } \text{coeff.}((\partial\bar{\partial}\iota)^{n-1} \wedge \partial\iota \wedge \bar{\partial}\iota) \in \mathcal{I}$$

$$(2) \quad \mathbb{R}\sqrt{\mathcal{I}} = \mathcal{I}. \text{ ただし } "g \in \mathbb{R}\sqrt{\mathcal{I}} \iff \exists f \in \mathcal{I} \\ \exists m > 0 \text{ s.t. } |g|^m \leq |f|."$$

$$(3) \quad f_1, \dots, f_j \in \mathcal{I} \text{ ならば} \\ \text{coeff.} \{ (\partial\bar{\partial}\iota)^{n-j-1} \partial f_1 \wedge \bar{\partial} f_1 \wedge \dots \wedge \partial f_j \wedge \bar{\partial} f_j \wedge \partial\iota \wedge \bar{\partial}\iota \} \in \mathcal{I}$$

$$I_0 = \mathbb{R}\sqrt{(r, \text{coeff.}\{\partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-1}\})}$$

$$I_k = \mathbb{R}\sqrt{(I_{k-1}, \text{coeff.}\{\partial f_1 \wedge \cdots \wedge \partial f_j \wedge \partial r \wedge \bar{\partial} r \wedge (\partial \bar{\partial} r)^{n-j}\})}$$

(ただし $f_1, \dots, f_j$ は I_{k-1} を動く)

とおくと.

$$1 \in I_k \implies \text{劣楕円型評価}$$

$$\xleftarrow{\quad ? \quad}$$

(ただし $\partial\Omega \in C^\omega$ なら OK)

であることが知られている。(Acta Math. 142, Ann. Math. 107)

2. $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の局所正則性に関する最近の進展状況を説明しよう.

定理 3 (M. Christ)

$\Omega \subset \mathbb{C}^2$ とする. $\partial\Omega$ に含まれる総実な曲面 M で $M \subset \partial\Omega \setminus \{\text{強擬凸境界点}\}$ であり, かつ $\partial\Omega$ の Levi 形式 $\lambda(x)$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow M} \text{dist}(x, M) \log \lambda(x) = 0$$

であるものが存在すれば Neumann 作用素は局所正則である.
(すなわち α が p の近傍で C^∞ 級ならば $N\alpha$ も p の近傍で C^∞ 級である.)

一般にもこれに類した制約の下で Neumann 作用素の局所正則性が期待できる。

予想: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ とし.

$\{\rho \in \mathcal{C}\Omega \mid \rho \text{ は有限型でない}\} \subset \text{可微分曲線 } C$

かつ C は $\mathcal{C}\Omega$ の接ベクトル束の複素部分と横断的に交わるとする。(すなわち $\forall p \in C$ に対し、 p における C の接線を含む複素直線は p で $\mathcal{C}\Omega$ に接しないとする。)

このとき Neumann 作用素の局所正則性が成り立つ。

3. L^2 標準解の滑らかさについては、 $\bar{\partial}$ 方程式だけでなく、接 Cauchy-Riemann 方程式に対しても研究がなされている。

定義 $2n-1$ 次元の C^∞ 級可微分多様体 M 上の CR 構造とは、 M の接ベクトル束の複素化 $\mathbb{C}T_M$ の部分束 $T_M^{1,0}$ で以下の条件をみたすものをいう。

(i) $\text{rank } T_M^{1,0} = n-1$

(ii) $T_M^{1,0} \cap \overline{T_M^{1,0}} = \{0\}$ ($= \mathbb{C}T_M$ の零断面)

(iii) $\Gamma(T_M^{1,0})$ を $T_M^{1,0}$ の C^∞ 級断面の集合とすると、
 $s, s' \in \Gamma(T_M^{1,0}) \Rightarrow [s, s'] \in \Gamma(T_M^{1,0})$.
 ただし $[s, s']$ は Lie 括弧積を表す。

CR 構造が (一) 与えられた多様体を CR 多様体という。
向きづけ可能な CR 多様体 M に対し、ある $\zeta \in \Gamma(T_M)$ が存在して

$$\mathbb{C}T_M = T_M^{1,0} + \overline{T_M^{1,0}} + \mathbb{C}\zeta$$

となるから、 $T_{M,x}^{1,0}$ 上の二次形式 $E = E_x$ を

$$\begin{array}{ccc} T_{M,x}^{1,0} \times T_{M,x}^{1,0} & \xrightarrow{E} & \mathbb{C} \\ \psi & & \psi \end{array}$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto \sqrt{-1} [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}](x) \text{ の } \zeta \text{ 成分}$$

によって定義することができる。ここに $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ はそれぞれ ξ, η の x の近傍上への滑らかな拡張である。(ζ 又は $-\zeta$ に対して)
 E が M 上いたる所正定値 (または 半正定値) であるとき、
 M は 強擬凸な (または 擬凸な) CR 多様体であるという。
CR 多様体上の接 Cauchy-Riemann 作用素を

$$\begin{array}{ccc} \bar{\partial}_\zeta : C^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma(\overline{T_M^{1,0}}^*) \\ \psi & & \psi \\ u & \longmapsto & du|_{\overline{T_M^{1,0}}} \end{array}$$

により定義する。 $\bar{\partial}_\zeta u = 0$ をみたす関数を CR 関数という。
与えられた CR 多様体上に CR 関数がどれだけ多く存在するか
を知ることは、多変数関数論において Levi 問題と同様の
意味で重要な問題である。これに関しては Boutet de
Monvel の埋め込み定理などが有名である。

定理 4. (Boutet de Monvel) 5次元以上のコンパクトな強擬凸CR多様体 M に対し、 M 上の C^∞ 級CR関数 $u_1, \dots, u_N$ が存在して、写像 $(u_1, \dots, u_N)$ は M を $\mathbb{C}^N$ に埋め込む。

$\dim M = 3$ のときは Rossi による反例がある。

Rossi の反例: (Proc. Conf. Complex Analysis 1965)

$$M = S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\} \quad \text{に対し}$$

$$L_t := \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + t \left(z_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right)$$

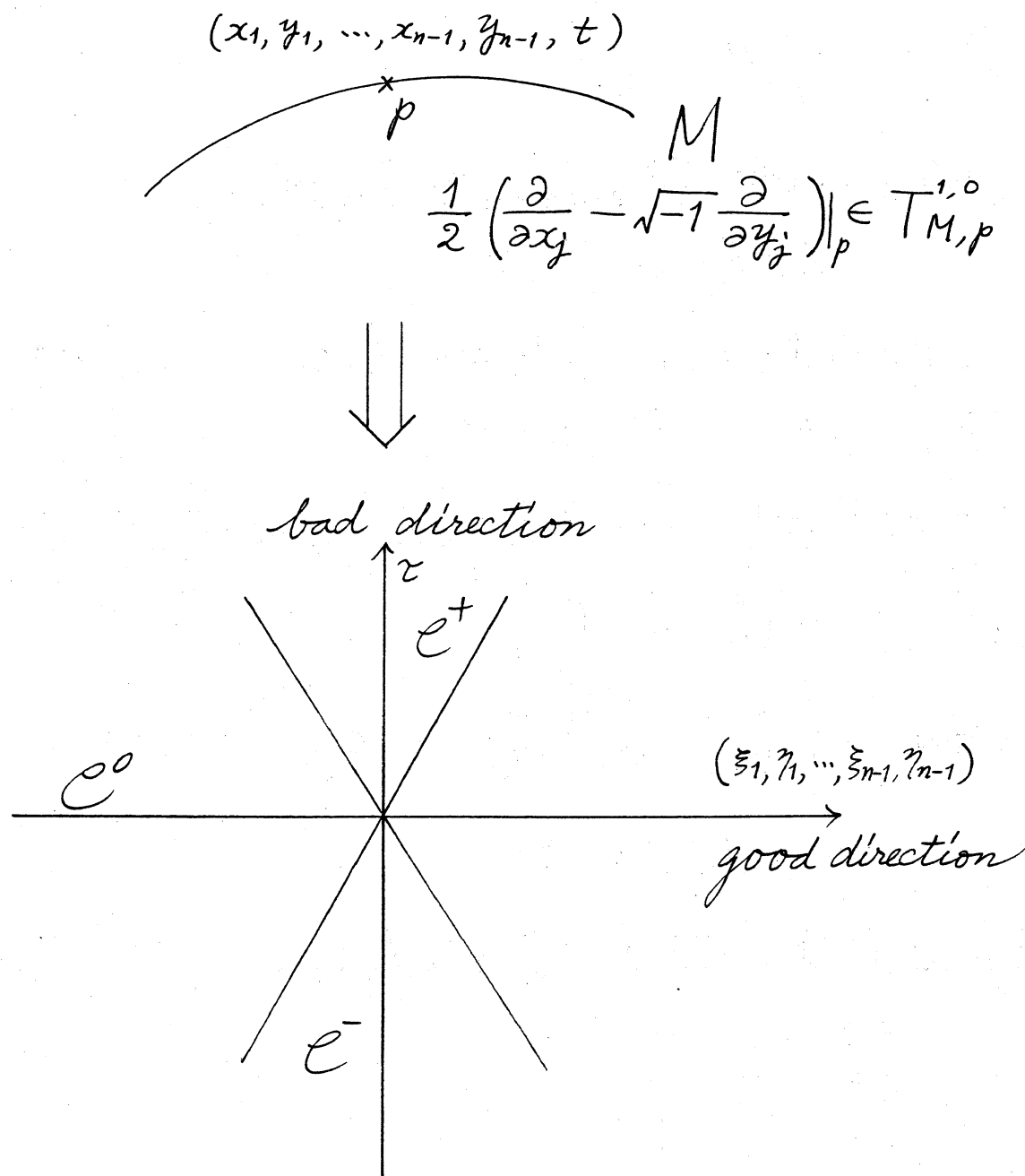
によって生成されるCR構造は、 $t \neq 0$ のとき $\mathbb{C}^N$ に埋め込むことはできない。(∵ CR関数の対蹠点における値が同じになってしまう)

一方では次の埋め込み定理がある。(Proc. Symp. 43, 1985)

定理 5. M をコンパクトな3次元強擬凸多様体とする。 $\bar{\partial}_M$ の $L_2(M)$ における閉拡張の値域が閉集合であれば、 M は $\mathbb{C}^N$ に埋め込める。

定理5の証明は $\bar{\partial}_M$ に対するノイマン作用素の局所正則性に帰着するが、それを実行するには超局所解析の方法が有効である。その理由は大略、 $\bar{\partial}_M$ 作用素が二種類の方向の微分を含むからである。一つは $T_M^{1,0} + \overline{T_M^{1,0}}$ 方向で、 $\bar{\partial}_M$ は超局所的にはこの部分空間を含む錐体上で楕円

型である, これはいわば '良い方向' である。言い換えれば
 $T_M^{1,0} + \overline{T_M^{1,0}}$ の零化空間である一次元の余接方向
 (= 悪い方向) 以外では $\overline{\sigma}_\delta$ は楕円型である。



$$u \sim u^0 + u^+ + u^-, \quad \text{supp } \hat{u}^\pm \subset e^\pm$$

$$\hat{u}^0 | e^+ \cup e^- = 0$$

上図の如く悪い方向を正負に分解して考え、 $\mathcal{I}$ と同様の方法で(すなわち $\|f\varphi\|_\varepsilon$ の代りに $\|f^\pm\varphi\|_\varepsilon$ が評価されるという条件によって)符号つき乗数イデアル $\mathcal{I}^\pm$ を定義する。 $\mathcal{I}^\pm$ の基本的性質は以下の通りである。

$$\mathcal{I}^+ : \quad \mathbb{R}\sqrt{\mathcal{I}^+} = \mathcal{I}^+$$

(M 上の任意の Riemann 計量に対して)

$$\det E \in \mathcal{I}^+$$

E に付随する $(1, 1)$ 形式を $\sum c_{ij} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j$ とすると、

$f_1, \dots, f_p \in \mathcal{I}^+$ ならば

$$\text{coeff}(\partial_b f_1 \wedge \dots \wedge \partial_b f_p \wedge (\sum c_{ij} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j)^{n-p-1}) \in \mathcal{I}^+.$$

$$\mathcal{I}^- : \quad \mathbb{R}\sqrt{\mathcal{I}^-} = \mathcal{I}^-$$

$$d_{ij} = \left(\sum_{k \neq i} c_{kk} \right) \delta_{ij} - c_{ij} \quad \text{とおくと}$$

$$\det(d_{ij}) \in \mathcal{I}^-$$

I_k と同様の方法で $I_k^\pm$ を定義すると、($I_k^\pm = I_k^\pm(x), x \in M$)

$$I_0^+ \subset I_0^-$$

$$\vdots$$

$$I_k^+ \subset I_k^-$$

である。

$\mathcal{V}^+$ と $\mathcal{V}^-$ は互に双対的であり、 $\mathcal{V}^+$ の零点集合が曲線ならば $\mathcal{V}^-$ の零点集合は $n-2$ 次元である。

以下の諸結果はこれらの方向ごとの滑らかさを継ぎあわせること
によって得られたものである。(Proc. Symp. 43, '85, Duke M. J. 53, '86)

定理 6. M を 5 次元以上のコンパクトな擬凸 CR 多様体とする。このとき

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \forall x \in M \quad 1 \in I_k^+(x) \implies \exists \varepsilon, C > 0 \text{ s.t.} \\ \forall \varphi \in \Gamma(\overline{T}_M^{1,0*}) \quad \|\varphi\|_\varepsilon^2 \leq C(\|\bar{\partial}_k \varphi\|^2 + \|\bar{\partial}_k^* \varphi\|^2 + \|\varphi\|^2).$$

定理 7. 擬凸な CR 多様体 M に対し、以下を仮定する。

- (a) $\bar{\partial}_k$ の値域は閉集合である。
(b) ある点 $x_0 \in M$ に対し、 $1 \in I_k(x_0)$ なる k が存在する、
このとき x_0 の近傍 U と正数 ε が存在して、

$$\zeta, \zeta' \in C_0^\infty(U), \quad \text{supp } \zeta \text{ の近傍で } \zeta' = 1$$

$$u \perp \text{Ker } \bar{\partial}_k, \quad \zeta' \bar{\partial}_k u \in H_s$$

ならば $u \in H_{s+\varepsilon}$ であり、

$$\|\zeta u\|_{s+\varepsilon} \leq C_s (\|\zeta' \bar{\partial}_k u\|_s + \|\bar{\partial}_k u\|)$$

が成り立つ。ただし H_s は Sobolev 空間、 $\|\cdot\|_s$ は Sobolev ノルムを表す。

定理 8. $M \subset \mathbb{C}^N$ が解析集合の境界をなすコンパクト
擬凸 CR 多様体 (C^∞ 級) ならば $\bar{\partial}_k$ は閉じた値域 ($\subset L^2$)
をもつ。